

Étude matricielle des systèmes catoptriques et catadioptriques

par José-Philippe PÉREZ,

Université Paul-Sabatier, 31055 Toulouse.

Dans les ouvrages habituels d'enseignement de l'optique géométrique, l'analyse matricielle des systèmes optiques comportant des surfaces réfléchissantes est généralement incomplète ou inexistante. Les auteurs se contentent le plus souvent de poser la relation bien connue entre l'indice du milieu image et celui du milieu objet, $n_2 = -n_1$, issue de la comparaison de la loi de la réflexion, sous forme algébrique, $i_2 = -i_1$ et de la loi de SNELL-DESCARTES, $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (cf. fig. 1).

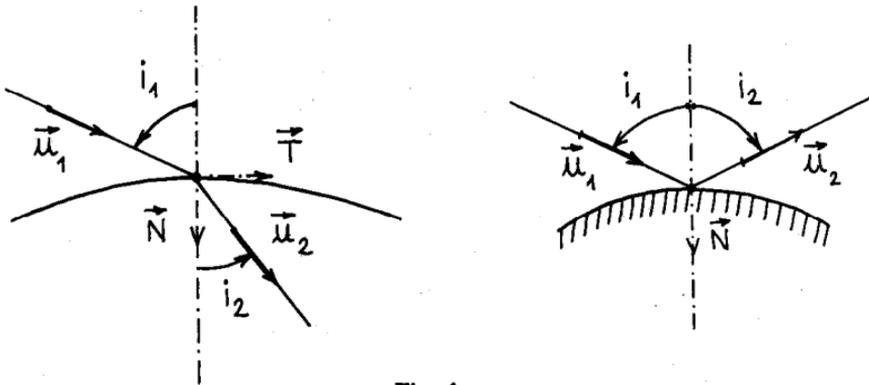


Fig. 1

Cette présentation a, selon nous, deux inconvénients majeurs :

- 1) Elle est artificielle ; pour rendre compte du changement de sens, on introduit un indice négatif.
- 2) Elle est particulière aux systèmes optiques ayant un axe rectiligne.

Dans le cours d'optique géométrique que nous destinons aux élèves du D.E.U.G.S. A, 1^{re} année, (cf. [1]), nous préférons utiliser la méthode générale qui s'avère indispensable lorsque l'axe optique n'est plus rectiligne. C'est le cas, par exemple, d'un télescope monté « en Newton ». Elle consiste à adopter pour axe optique, comme en optique corpusculaire, le rayon lumineux moyen.

Nous nous proposons d'établir d'abord l'expression de la matrice de réflexion \mathfrak{R}_m des miroirs sphériques et d'en déduire les éléments cardinaux et les relations de conjugaison. A titre d'exemple, nous appliquons les résultats à l'importante étude des cavités optiques. Nous étudions ensuite les systèmes catadioptriques en distinguant les systèmes équivalents à un système dioptrique et ceux équivalents à un miroir.

I. MIROIRS SPHÉRIQUES.

I.1. Matrice de réflexion.

Pour établir cette matrice, explicitons comme pour le dioptré, la relation vectorielle $n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{N}$ (cf. [2]), en faisant $n_2 = n_1$. Il vient, avec les notations de la figure 2 ($R = \overline{SC}$),

$$n_0 \begin{pmatrix} u_2^x \\ u_2^y \\ u_2^z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_1^z \end{pmatrix} = a \begin{bmatrix} -x/R \\ -y/R \\ \gamma_N \simeq 1 \end{bmatrix}$$

où u^x, u^y, u^z représentent les composantes de \vec{u} dans la base de $Sxyz$. Le scalaire a vaut $-2n_0$. En effet, si \vec{T} est le vecteur unitaire tangent au miroir en I, a vérifie :

$$(\vec{N} \wedge \vec{T}) a = n_0 (\vec{u}_2 \wedge \vec{T} - \vec{u}_1 \wedge \vec{T}),$$

soit aussi, puisque les angles i_1 et i_2 sont petits,

$$a = n_0 (-\cos i_2 - \cos i_1) \simeq -2n_0.$$

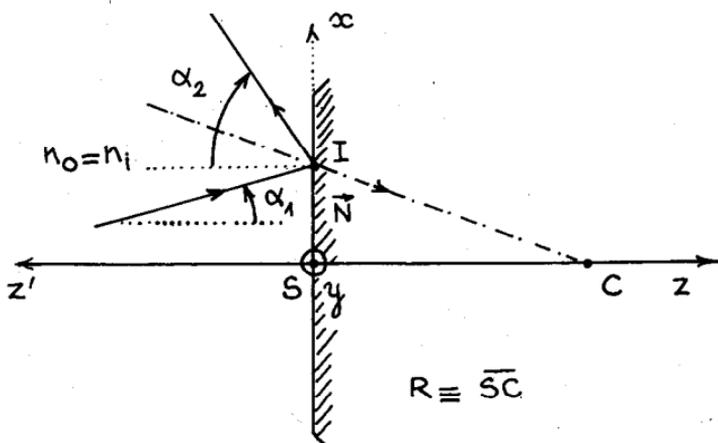


Fig. 2

La troisième équation exprime l'évidence $-2n_0 = -2n_0$ puisque $u_2^z \simeq -1$ et $u_1^z \simeq 1$. Donnons l'interprétation angulaire des deux premières équations : u_1^x et u_1^y représentent respectivement les angles α_1 et β_1 que font, avec l'axe Sz les projections de \vec{u}_1 dans les plans respectifs Sxz et Syz. Appelons α_2 et β_2 les angles que font, avec l'axe Sz' orienté dans le sens de la lumière émergente, les projections de \vec{u}_2 dans les plans Sxz' et Syz'. L'on a :

$$\alpha_2 \simeq u_2^x \quad \text{et} \quad \beta_2 \simeq u_2^y.$$

Par conséquent,

$$n_0 \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = n_0 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \frac{2n_0}{R} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ce qui s'écrit, matriciellement, avec les notations complexes suivantes :

$$\underline{x} \equiv x + iy \quad \text{et} \quad \underline{\alpha} \equiv \alpha + i\beta,$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n_0}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_1$$

La matrice de réflexion \mathfrak{R}_m est donc :

$$\mathfrak{R}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n_0}{R} & 1 \end{bmatrix},$$

d'où la vergence du miroir : $V = -\frac{2n_0}{R}$.

1.2. Matrice de translation.

Elle s'exprime comme pour un système dioptrique habituel, si l'on adopte pour axe optique, l'axe défini par la lumière : à l'aller le sens est celui de Sz et au retour celui de Sz'. La transcription concrète est alors immédiate. Ainsi, dans l'exemple de la fig. 3, la matrice de translation de A₁ à A₂ pour la lumière incidente est numériquement identique à la matrice de translation de A₂ à A₁ pour la lumière émergente.

$$\mathcal{T}(\overline{A_1 A_2}) = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^*(\overline{A_2 A_1}) = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'astérisque rappelle que le sens positif à considérer est celui de la lumière émergente.

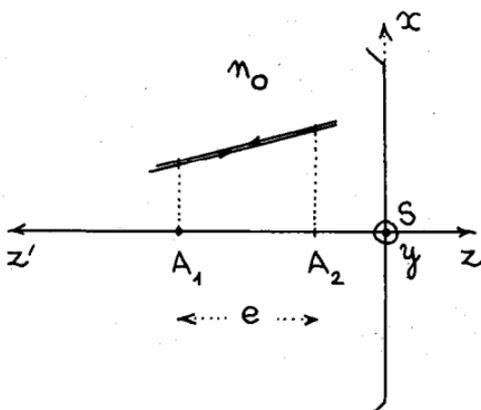


Fig. 3

1.3. Éléments cardinaux.

Il résulte de l'expression de \mathcal{R}_m , (cf. [2]), que les plans principaux sont confondus au sommet; d'où les distances focales :

$$f_i = \frac{n_i}{V} = -\frac{R}{2} \quad \text{et} \quad f_o = -\frac{n_o}{V} = \frac{R}{2}.$$

Les miroirs concaves sont donc convergents et les miroirs convexes divergents.

Comme $f_o = +R/2$ est compté algébriquement sur l'axe Sz et $f_i = -R/2$ est compté algébriquement sur l'axe Sz' , on retrouve la propriété bien connue des foyers F_o et F_i confondus au milieu du segment SC .

Remarque.

Pour déterminer la position des points nodaux, il convient de rappeler que ces points N_o et N_i forment le couple tel que tout rayon passant par N_o émerge parallèlement à sa direction incidente en passant par N_i . Sur la fig. 4, on peut voir que compte tenu du sens positif adopté (suivant Sz pour les rayons incidents et suivant Sz' pour les rayons émergents), les angles α_o et α_i définis par le même rayon passant par les points nodaux sont de

signes opposés : $\alpha_o < 0$ et $\alpha_i > 0$. Par conséquent, le grandissement angulaire est égal à -1 . Evidemment, les points nodaux N_o et N_i sont confondus au centre de courbure du miroir.

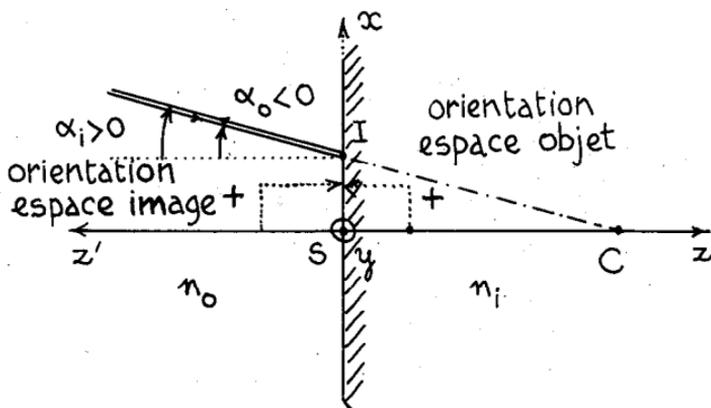


Fig. 4

1.4. Relations de conjugaison.

Elles découlent des relations générales établies pour les systèmes dioptriques en faisant $n_i = n_o$. Lorsque l'origine est en S, c'est-à-dire aux points principaux, il vient :

$$-\frac{n_o}{p_o} + \frac{n_i}{p_i} = V \quad \text{entraîne} \quad -\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = -\frac{2}{R},$$

$$G_t = \frac{n_o}{n_i} \frac{p_i}{p_o} \quad \text{entraîne} \quad G_t = \frac{p_i}{p_o}.$$

Lorsque l'origine est en F, c'est-à-dire aux foyers,

$$\sigma_o \sigma_i = f_o f_i \quad \text{entraîne} \quad \sigma_o \sigma_i = -R^2/4.$$

Notons que les quantités algébriques p_o , σ_o et f_o sont relatives à l'axe Sz, et que les quantités algébriques p_i , σ_i et f_i sont relatives à l'axe Sz'.

Exemple : Soit un miroir concave dont le rayon de courbure est de 4 mm (fig. 5). L'image d'un objet, placé à 6 m en avant du sommet S, est réelle, renversée et située à 3 m de S. En effet, comme $p_o = -6$ m et $R = -4$ m, on a :

$$-\frac{1}{-6} + \frac{1}{p_i} = -\frac{2}{-4}, \quad p_i = 3 \text{ m} \quad \text{et} \quad G_t = -0,5.$$

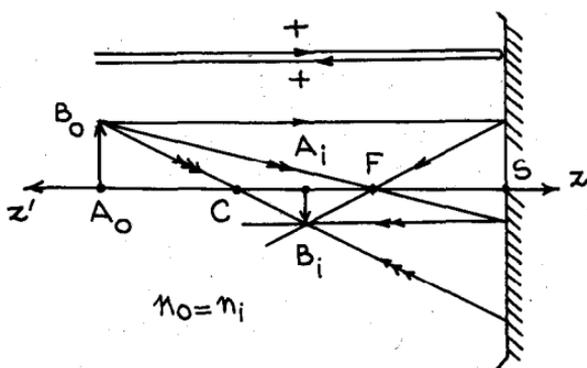


Fig. 5

II. CAVITES OPTIQUES.

Ces ensembles de deux miroirs en regard qui réfléchissent successivement la lumière plusieurs fois sont étudiés commodément à l'aide du calcul matriciel. En effet, A_0 et A_i désignant des points conjugués situés sur l'axe optique, la matrice de transfert entre ces points peut s'écrire :

$$T(\overline{A_0 A_i}) = \mathcal{T}^*(\overline{S_1 A_i}) T_{ar}^n \mathcal{T}(\overline{A_0 S_1})$$

où $T_{ar} = \mathcal{T}(\overline{S_2 S_1}) \mathcal{R}_m^*(S_2) \mathcal{T}^*(\overline{S_1 S_2}) \mathcal{R}_m(S_1)$ est la matrice de transfert au cours d'un « aller-retour ». L'astérisque qui accompagne certaines matrices rappelle que ces matrices sont comptées à partir du sens positif $S_1 z'$.

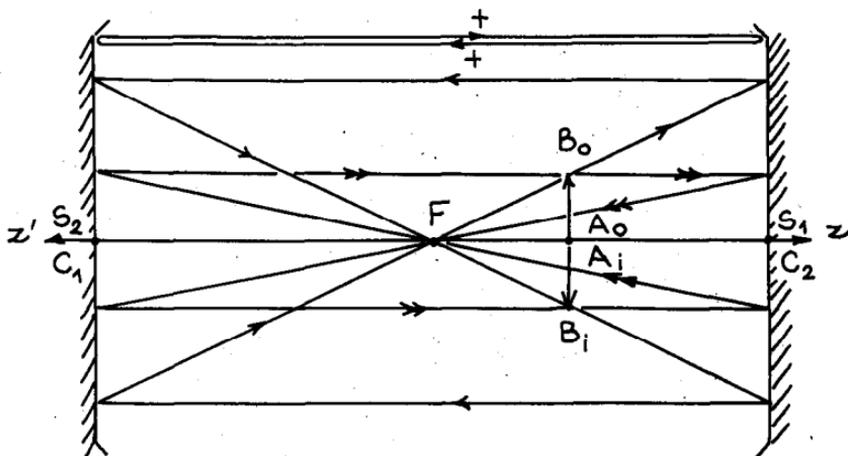


Fig. 6

Remarquons que la coordonnée $\overline{S_1 A_i}$ est comptée à partir du sens $S_1 z$ puisque l'image est obtenue après le même nombre de réflexions sur S_1 et S_2 .

Avec les notations évidentes, on a (cf. fig. 6),

$$T_{ar} = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - eV_1 - eV_2 & e + e(1 - eV_2) \\ -V & 1 - eV_2 \end{bmatrix} \text{ où } V = V_1 + V_2 - eV_1 V_2.$$

Exemple d'une cavité confocale symétrique.

Les foyers des deux miroirs sont confondus au centre de la cavité. Les centres de courbure C_1 et C_2 sont donc respectivement en S_2 et S_1 .

D'où $R_1 = R_2 = -e$, $V_1 = V_2 = \frac{2}{e}$ et $V = 0$ (cavité afocale).

$$T_{ar} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Comme $T_{ar} = (-1)^n [1]$, on voit que :

$$T(\overline{A_o A_i}) = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & z_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & z_i - z_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où : $z_i = z_o$ et $G_i = (-1)^n$.

Les positions objet et image coïncident donc après un nombre entier d' « aller-retour ». Cependant l'image n'est identique à l'objet qu'après un nombre pair d' « aller-retour », ce que la construction permet de retrouver aisément.

III. SYSTEMES CATADIOPTRIQUES EQUIVALENTS A UN MIROIR.

Ces systèmes peuvent être schématisés comme sur la fig. 7.

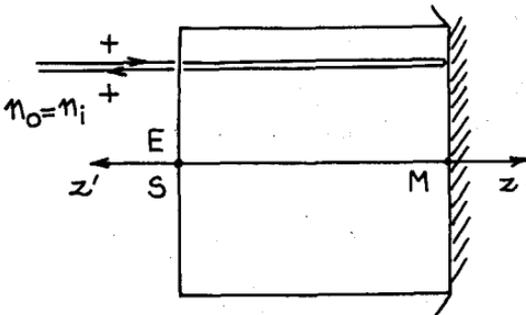


Fig. 7

A l'extrémité droite, un miroir impose à la lumière de retraverser le système dioptrique en sens inverse. Il semble alors naturel d'adopter comme plans d'entrée et de sortie deux plans confondus.

III.1. Matrice de transfert.

La matrice de transfert apparaît comme le produit de trois matrices :

$$T(\overline{ES}) = T^*(\overline{MS}) R_m(M) T(\overline{EM}).$$

Les matrices $T(\overline{EM})$ et $T^*(\overline{MS})$ sont les matrices de transfert du même système dioptrique à l'aller et au retour. Elles sont liées : les vergences sont identiques et les termes diagonaux sont permutés puisque les plans principaux qu'ils définissent sont intervertis. Quant aux derniers éléments, ils sont égaux puisque le déterminant des matrices vaut un.

$$T(\overline{EM}) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{22} \\ -v & t_{22} \end{bmatrix} \text{ il en résulte que } T(\overline{MS}) = \begin{bmatrix} t_{22} & t_{12} \\ -v & t_{11} \end{bmatrix}.$$

$$\text{D'où, puisque } R_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v_m & 1 \end{bmatrix},$$

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} t_{11} t_{22} - t_{12}(v + v_m t_{11}) & t_{12} t_{22} + t_{12} t_{22} - v_m t_{12}^2 \\ -v t_{11} - t_{11}(v_m t_{11} + v) & t_{11} t_{22} - t_{12}(v + v_m t_{11}) \end{bmatrix}.$$

Ainsi les éléments de matrice T_{11} et T_{22} sont égaux, ce qui était prévisible puisque, par symétrie, les plans principaux du système total doivent être confondus.

III.2. Éléments cardinaux.

On les obtient toujours de la même façon (cf. [2]) :

$$f_i = \frac{n_i}{V} \quad \text{et} \quad f_o = -\frac{n_o}{V}$$

$$\overline{SH}_i = \frac{n_i}{V} (T_{11} - 1) \quad \text{et} \quad \overline{EH}_o = -\frac{n_o}{V} (T_{11} - 1).$$

Les points principaux H_o et H_i sont bien confondus si l'on tient compte de la convention adoptée. Il en est de même pour les foyers et pour les points nodaux. Établissons ce dernier résultat. Posant $z_o = \overline{EN}_o$ et $z_i = \overline{SN}_i$, il vient :

$$\begin{aligned}
 T(\overline{N_o N_i}) &= \mathcal{C}(\overline{SN_i}) T(\overline{ES}) \mathcal{C}(\overline{N_o E}) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & z_i/n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ -V & T_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z_o/n_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} T_{11} - Vz_i/n_i & 0 \\ -V & T_{11} + Vz_o/n_o \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Comme il résulte de $G_a = -1$ et $G_t G_a n_i/n_o = 1$ que $G_r = -1$, on obtient :

$$\overline{SN_i} = f_i(T_{11} + 1) \quad \text{et} \quad \overline{EN_o} = f_o(T_{11} + 1),$$

d'où $\overline{SN_i} = -\overline{EN_o}$.

Les éléments cardinaux H, F, N peuvent être considérés respectivement comme le sommet S, le foyer F et le centre C d'un miroir équivalent.

III.3. Exemple d'application : l'autocollimation.

Considérons une lentille mince convergente, de focale f , associée à un miroir plan (cf. fig. 8).

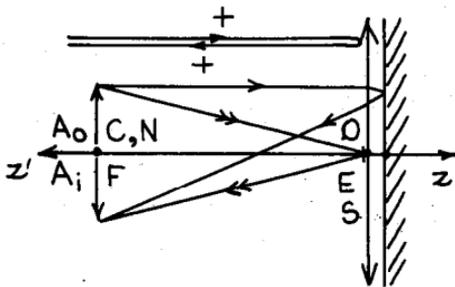


Fig. 8

La matrice de transfert entre l'entrée et la sortie s'écrit :

$$T(ES) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ f & \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ f & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ f & \end{bmatrix}$$

L'ensemble est donc équivalent à un miroir concave de sommet O et de centre de courbure N tel que $ON = f$. En N, où sont confondus les points nodaux, objet et image sont situés dans le

même plan. Le grandissement transversal est égal à -1 ; d'où la détermination de la focale de la lentille : il suffit de chercher l'image renversée que donne cette lentille, associée à un miroir, d'un objet réel situé précisément à la distance f de la lentille.

IV. SYSTEMES CATADIOPTRIQUES EQUIVALENTS A UN SYSTEME DIOPTRIQUE.

L'exemple caractéristique d'un tel système est l'objectif d'un télescope monté « en Cassegrain » (cf. fig. 9).

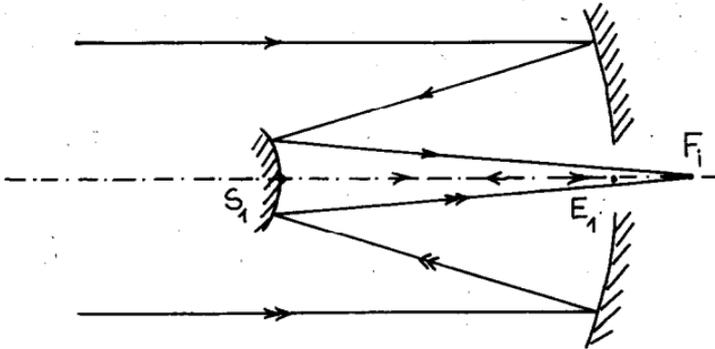


Fig. 9

Evaluons la matrice de transfert de l'objectif entre le sommet E_1 du miroir principal convergent et le sommet S_1 du petit miroir secondaire divergent :

$$T(\overline{E_1 S_1}) = \mathfrak{R}_m^*(S_1) \mathfrak{C}^*(\overline{E_1 S_1}) \mathfrak{R}_m(E_1).$$

Si l'on assimile ces miroirs à des miroirs sphériques de sommets distants de e_1 , leurs vergences s'écrivent :

$$V_e = -\frac{2}{R_e} = -\frac{2}{|R_e|} \quad \text{et} \quad V_s = -\frac{2}{R_s} = -\frac{2}{|R_s|}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} T(\overline{E_1 S_1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_e & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - e_1 V_e & e_1 \\ -V_1 & 1 - e_1 V_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$V_1 = V_e + V_s - e_1 V_e V_s.$$

Considérons le cas concret de l'objectif du télescope du Pic du Midi de 2 m de diamètre ($|R_e| = 20$ m, $|R_s| = 4,5$ m, $e_1 = 8,2$ m).

Il vient :

$$T(\overline{E_1 S_1}) = \begin{bmatrix} 0,18 & 8,2 \\ -0,02 & 4,64 \end{bmatrix} .$$

Donc : $V_1 = 0,02 \delta$, $f_i = n_i/V_1 = 50 \text{ m}$; $f_o = -n_o/V_1 = -50 \text{ m}$.

Les plans principaux objet et image sont respectivement situés aux points H_o et H_i tels que :

$$\overline{E_1 H_o} = f_o(T_{22} - 1) = -50(4,64 - 1) = -182 \text{ m}$$

$$\overline{S_1 H_i} = f_i(T_{11} - 1) = 50(0,18 - 1) = -41 \text{ m}.$$

D'où la position du foyer image de l'objectif :

$$\overline{E_1 F_i} = \overline{E_1 S_1} + \overline{S_1 H_i} + \overline{H_i F_i} = -8,2 - 41 + 50 = 0,8 \text{ m}.$$

Monté « en Newton », cet objectif est constitué du même grand miroir sphérique et d'un petit miroir plan incliné à 45° (cf. fig. 10).

L'axe optique n'est plus rectiligne. Il est représenté par la trajectoire moyenne de la lumière « $S_1 E_1 S_1 S$ ». Matriciellement, l'étude d'un tel système avec un axe optique non rectiligne ne présente pas de difficulté particulière, si l'on adopte un système d'axes local tel que l'axe soit toujours défini par le sens de propagation de la lumière. Toute matrice de translation s'écrit alors entre deux plans de front situés aux points A_1 et A_2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{A_1 A_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\overline{A_1 A_2}$ est une quantité algébrique évaluée à partir du sens de progression de la lumière compté positivement. Le rôle du miroir plan est seulement de renvoyer latéralement l'axe optique. La matrice de réflexion associée s'identifie donc à l'unité.

$$\begin{aligned} T(\overline{E_1 S_1}) &= \mathfrak{R}_m^*(S_1) \mathfrak{T}^*(\overline{E_1 S_1}) R_m(E_1) = [1] \begin{bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_e & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - e_1 V_e & e_1 \\ -V_e & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En conclusion, même pour les systèmes catoptriques et catadioptriques, la méthode matricielle apparaît comme une méthode commode et efficace, pourvu que l'on adopte comme sens positif le sens défini par le rayon lumineux moyen. Un exemple actuel d'application est celui de l'adaptation de spectromètres ou de filtres en microscopie électronique.

Ces instruments imposent à l'axe optique, grâce à un champ magnétique, une trajectoire courbe formée d'une succession de portions de cercles et de segments. On obtient alors les spectromètres de type L (ou $\pi/2$), Ω ou α du nom de la lettre qu'ils forment. Le traitement de ces systèmes au sens de l'optique géométrique ne diffère fondamentalement en rien de l'analyse précédente.

REFERENCES

- [1] J.-Ph. PÉREZ. — *Optique, optique géométrique matricielle et ondulatoire*, 356 p., 1984, Masson.
 - [2] J.-Ph. PÉREZ. — B.U.P. n° 632, p. 819, 1981.
-