

Les calellettes programmables peuvent-elles contribuer à la rénovation de l'enseignement des classes préparatoires ?

par J.-P. SARMANT,
Lycée Louis-le-Grand, Paris.

I. REFLEXIONS SUR LA SITUATION ACTUELLE.

Les textes réglementaires sont tels que beaucoup de collègues considèrent, avec raison, leur présence plus comme une gêne que comme une aide. En effet, bien que leur emploi aux divers concours soit toléré, il est recommandé aux auteurs des sujets de veiller à ce que les possesseurs de ces machines ne soient pas avantagés par la nature des questions posées. De plus, l'apparition de machines alphanumériques dotées de mémoires permanentes de capacité considérable pose, à terme, des problèmes relatifs aux fraudes. Laissant délibérément de côté cet aspect de la question, je m'efforcerai, ci-après, de proposer quelques éléments de réflexion sur les thèmes suivants : Est-il raisonnable d'envisager un emploi effectif de la programmation dans les classes préparatoires ? Sous quelles formes cet emploi pourrait-il se concevoir ? Quels avantages notre enseignement en retirerait-il ?

Il me semble tout d'abord évident que l'état actuel des choses ne pourra pas durer très longtemps, ceci pour plusieurs raisons :

- En nombre croissant, les élèves manifestent très tôt leur intérêt pour la programmation. Malgré l'absence de tout enseignement de l'informatique, certains d'entre eux sont déjà de véritables virtuoses à leur entrée dans les classes préparatoires. Ce phénomène procède, pour une part, de la curiosité intellectuelle, il me semble aussi qu'il traduit une prise de conscience : les étudiants réalisent spontanément l'intérêt pour leur avenir d'une formation, même élémentaire, à ces techniques.
- Les auteurs de problèmes de concours ont bien du mal à respecter les instructions recommandant de ne pas favoriser les possesseurs de machines programmables. Ceci est tout particulièrement vrai en ce qui concerne les problèmes rela-

tifs à la cinétique chimique ou aux équilibres ioniques. Dans ce domaine, les textes réglementaires ne sont déjà pas respectés de manière stricte et l'on ne voit du reste guère comment ils pourraient l'être. Nos étudiants ont très bien réalisé quelle est la situation de fait : presque tous ceux qui en ont les moyens acquièrent déjà une calculatrice au moins « modestement » programmable.

- La réglementation actuelle a pour origine le souci tout à fait justifié de ne pas avantager les étudiants les plus fortunés. Il est toutefois probable que l'évolution des prix ne permettra plus d'exclure encore très longtemps la programmation au nom de ce critère. Déjà, le prix des calculettes programmables les plus simples (environ 250 F) n'est plus considérablement supérieur à celui des calculettes scientifiques « ordinaires » (de l'ordre de 150 F).

Les points précédents m'amènent à penser qu'il sera raisonnable, d'ici quelques années, de commencer à profiter des possibilités offertes par les calculettes programmables. Je commencerai par proposer quelques exemples d'emploi de la programmation, relatifs à des problèmes de physique qui peuvent se rencontrer en spéciales. Je précise que les cas traités ne demandent aucune formation préalable en informatique autre que la lecture du mode d'emploi de l'une des plus élémentaires des calculatrices actuellement sur le marché. Il serait en effet déraisonnable d'ajouter à nos programmes un enseignement informatique donné par le professeur de physique. Par ailleurs, il me semble évident qu'une éventuelle introduction progressive de la programmation ne devrait faire appel qu'aux techniques les plus élémentaires pour une autre raison essentielle : la nécessité de ne pas favoriser les possesseurs de machines onéreuses.

II. QUELQUES EXEMPLES.

1. Un exemple en mécanique : période des oscillations de forte amplitude d'un pendule pesant.

Quelle est la période du mouvement d'une balançoire qui oscille avec une amplitude de 60° ? Dans une approche traditionnelle, la réponse à une question d'apparence aussi banale est loin d'être élémentaire : l'équation générale du mouvement du pendule pesant conduit à une intégrale elliptique. Après avoir identifié la nature de celle-ci, « il suffit » de se reporter à l'un des volumineux ouvrages spécialisés où de telles intégrales sont tabulées... Nous allons voir que l'emploi d'une calculette programmable permet d'aborder la même question de front à l'aide des seules connaissances disponibles en fin de Mathématiques supérieures.

Avec les notations usuelles (élongation angulaire θ , amplitude α , moment d'inertie par rapport à l'axe d'oscillation J , distance du centre de masse à cet axe a) la conservation de l'énergie mécanique conduit à l'équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{\theta}^2 = 2 \omega_0^2 (\cos \theta - \cos \alpha) = 4 \omega_0^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1)$$

avec :

$$\omega_0^2 = \frac{J}{Mg a}.$$

L'examen de l'équation du second ordre déduite de (1) ou écrite directement à l'aide du théorème du moment cinétique montre que $T_0 = 2\pi/\omega_0$ représente la période des « petites oscillations » ($\alpha \ll 1$). De (1), on peut déduire que la durée de la phase $0 < \theta < \alpha$, égale au quart de la période T cherchée est donnée par l'intégrale :

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2 \omega_0} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \alpha/2 - \sin^2 \theta/2}}$$

Effectuant le changement de variable :

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin u$$

et posant :

$$x = \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

on est ramené au calcul de l'intégrale :

$$y = \frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - x \sin^2 u}} \quad (2)$$

Il est légitime d'intégrer cette expression terme à terme après un développement en série. On est ainsi conduit aux intégrales :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \, du = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} I_0 \quad \text{note (1).} \quad (3)$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$y = 1 + \sum_1^\infty \left[\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right]^2 x^n \quad (4)$$

(1) Cette expression classique se retrouve rapidement par une intégration par parties qui conduit à la récurrence : $2n I_n = (2n-1) I_{n-1}$.

Le principe des calculs précédents aura été reconnu par les lecteurs. Il est en effet courant de calculer par un développement limité les premiers termes de (4) :

$$y = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{9}{64}x^2 + \dots$$

On en déduit en général la *formule de Borda*, approximation utilisable pour des amplitudes pas trop fortes ($x \simeq a^2/4$) :

$$y = \frac{T}{T_0} \simeq 1 + \frac{a^2}{16}.$$

La différence est cette fois que (4) nous fournit la solution complète du problème. En remarquant en effet que (4) est une somme s_n des termes d'une suite u_n vérifiant la récurrence :

$$u_n = x \left[\frac{2n-1}{2n} \right]^2 u_{n-1}, \quad (5)$$

on élabore facilement un programme qui calcule les u_n puis les s_n à l'aide de produits en mémoire (voir annexe 1).

Remarque.

Avec une calculatrice qui possède un programme de calcul d'intégrales, on peut obtenir $y(x)$ beaucoup plus facilement en partant directement de (3). La possibilité illustrée ici demande un effort mathématique supérieur mais elle a le mérite d'être réalisable à l'aide des calculatrices les plus modestes. De plus, l'idée de base (intégration terme à terme et programmation d'une récurrence) peut être utilisée dans d'autres problèmes.

2. Un exemple en électromagnétisme : champ électrique d'un condensateur alimenté en haute fréquence.

Un condensateur plan est constitué de deux armatures circulaires de même rayon a . Soit $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire normal aux armatures. En un point situé à la distance r de l'axe des armatures, on peut chercher en régime sinusoïdal de pulsation ω si un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}(r, t) = E(r) \cos \omega t \vec{u}_z$$

peut satisfaire aux équations de Maxwell. En exprimant dans le vide entre les armatures l'équation de d'Alembert :

$$\square^2 \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On est conduit, après introduction du paramètre sans dimension $x = r\omega/c$, à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dE}{dx} + E = 0. \quad (6)$$

Au niveau de l'enseignement supérieur, on reconnaît ici une équation différentielle de Bessel, d'où la solution à condition d'être doué d'une bonne mémoire et d'avoir sous la main des livres épais... Pour un taupin qui ignore en général le nom de Bessel, il est en revanche naturel de chercher une solution de (6) sous forme de série entière :

$$E(x) = \sum a_n x^n. \quad (7)$$

En reportant (7) dans (6), on obtient :

$$a_{n+2} = -a_n/(n+2)^2. \quad (8)$$

D'où, en notant E_0 le module du champ sur l'axe et en tenant compte de la parité de $E(x)$:

$$J(x) = \frac{E}{E_0} = \sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)^2} = \sum_0 u_n. \quad (9)$$

Si l'on ne dispose pas de moyens de calcul, l'expression (9) est sans grand intérêt. Tout au plus permet-elle de voir que le champ dans un condensateur plan reste uniforme ($J \simeq 1$) tant que $x = r\omega/c$ reste petit devant 1. Cette condition peut encore être écrite $r \ll c/\omega = cT/2\pi$. Il est satisfaisant de constater que l'on retrouve la condition de l'approximation dite des régimes quasi permanents ou des états quasi stationnaires (distances à tous les points de la distribution considérée petites devant la longueur d'onde $\lambda = cT$ associée à la pulsation ω). En revanche, l'étude complète de $J(x)$ à partir de (9) est hors de portée, on ne voit pas notamment apparaître le comportement oscillatoire d'applications importantes telles que la construction de cavités résonantes (voir le chapitre 23 de l'Electromagnétisme de Feynman).

Avec une calculatrice programmable, il n'est même pas nécessaire de pousser le calcul jusqu'à (9). Il suffit de remarquer que (8) conduit à la récurrence :

$$u_{n+2} = -\frac{x^2}{(n+2)^2} u_n. \quad (10)$$

Cette expression permet de construire un programme faisant appel à des produits en mémoire (voir annexe 2 et partie V).

3. Un exemple en optique : diffraction à l'infini par une ouverture circulaire.

L'étude de la diffraction par une ouverture circulaire est un sujet tout à fait fondamental. En effet, les faisceaux optiques étant, en général, limités par des diaphragmes circulaires, les propriétés de cette figure de diffraction particulière sont à la base de la théorie du pouvoir séparateur des instruments optiques. Cette étude n'est pourtant pas abordée avant le niveau de la maîtrise car l'analyse conventionnelle du sujet fait intervenir une autre fonction de Bessel, reconnue cette fois sous forme intégrale.

Reprenons le problème sans idées préconçues à l'aide des seules connaissances d'un élève de spéciales.

Nous supposons que le faisceau incident est parallèle à une direction de vecteur unitaire $\vec{u}_z$ porté par l'axe de l'ouverture. Il est monochromatique et de longueur d'onde λ ($k = 2\pi/\lambda$). Soit $\vec{k}$ le vecteur d'onde d'une onde diffractée dans la direction définie par l'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{k})$. Le principe de Huygens-Fresnel montre que, $\vec{r}$ désignant le vecteur-position d'un élément d'aire dS , l'amplitude complexe diffractée dans la direction considérée est proportionnelle à :

$$D(\theta) = \iint e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dS.$$

Pour expliciter cette intégrale, il est raisonnable d'utiliser des coordonnées polaires (fig. 1).

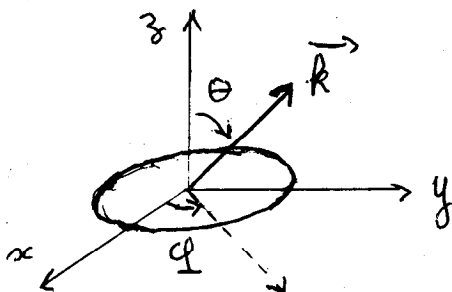


Fig. 1

En choisissant par exemple k dans le plan yOz , on est ramené

à :

$$D(\theta) = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{ikr \sin \theta \sin \varphi} r dr d\varphi. \quad (11)$$

En développant l'exponentielle en série et en intégrant terme à terme, on voit apparaître à nouveau une intégrale vérifiant la relation (3). En choisissant comme paramètre de diffraction la quantité sans dimension :

$$u = \frac{2 R \sin \theta}{\lambda},$$

on arrive à :
$$D(u) = \sum_j \frac{(-1)^n}{n+1} \left[\frac{(\pi u/2)^n}{n!} \right]^2 \quad (12)$$

En notant que cette expression est la somme des termes d'une suite vérifiant la récurrence (avec $x = \pi u/2$) :

$$u_{n+1} = - \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} u_n \quad (13)$$

on élabore un programme de calcul de $D(u)$ (voir annexe 3).

III. CONCLUSIONS.

Tout en se rapportant à des systèmes très différents, les exemples précédents illustrent la même idée : dans une perspective traditionnelle, l'étude de systèmes dont l'intérêt physique est évident se trouve reportée en fin d'études supérieures en raison des difficultés mathématiques rencontrées ; dans de nombreux cas, la programmation permet d'obtenir dès le niveau des classes préparatoires l'essentiel des résultats importants. Certains lecteurs pensent sans doute que l'étude des exemples cités précédemment reste, malgré l'aide de la programmation, non élémentaire. C'est à dessein que j'ai choisi de traiter dans cet article des cas relativement élaborés, ceci à fin d'illustrer la puissance des méthodes numériques. En fait, le niveau de programmation le plus élémentaire apporte déjà dans bien des cas une aide considérable. Il suffit par exemple de savoir programmer un polynôme ou une fraction rationnelle pour rendre dérisoires bien des problèmes d'équilibres ioniques jugés redoutables il y a quelques années. Ainsi, il est certainement peu fructueux de recourir à la programmation pour le calcul d'un seul pH, mais il est en revanche très rentable, pour le tracé complet d'une courbe $\text{pH} = f(x)$, de programmer d'abord la fonction inverse $x = f^{-1}(\text{pH})$ qui se déduit rapidement et sans approximations des équations du problème. Par ailleurs, je me suis volontairement abstenu précédemment de faire appel à des programmes d'intégration ou de recherche de zéros. En effet, seules des calculs

lettes assez onéreuses (2) proposent actuellement de telles fonctions préprogrammées. Dans un avenir un peu plus lointain, l'utilisation de ces machines pourrait déboucher sur un nombre d'application encore plus considérable. En mécanique par exemple, quiconque a cherché un jour à élaborer des exercices originaux sait que l'immense majorité des équations auxquelles conduisent des cas concrets ne s'intègre pas à l'aide des fonctions élémentaires.

En revanche, beaucoup d'études conduisent à des équations différentielles du premier ordre du type :

$$\dot{u}^2 + w(u) = \text{constante} = e.$$

Il est déjà courant d'analyser qualitativement un tel problème par la méthode dite « des intersections » en traçant la fonction $w(u)$ assimilée à un potentiel apparent. Avec un programme d'intégration, le problème peut être résolu complètement en calculant des intégrales du type :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{du}{\sqrt{e - w(u)}}.$$

Bien entendu, je ne crois pas que l'analyse numérique puisse et doive supplanter en toutes circonstances le calcul algébrique traditionnel. La programmation ne m'apparaît pas comme un but en soi mais comme une nouvelle « corde à notre arc ». Après une phase progressive et prudente d'adaptation aux nouvelles techniques de calcul, une démarche possible serait la suivante :

- Proposer à nos étudiants des problèmes choisis en fonction de leur intérêt physique (et non pas en raison de la « beauté » des calculs auxquels ils conduisent) (3).
- Soumettre chaque problème à une analyse qualitative préalable aussi complète que possible avant de se précipiter vers une méthode de calcul.
- Dans chaque cas, rechercher quelle est la méthode, algébrique ou numérique qui fournit le plus commodément les renseignements demandés.

(2) La tendance est toutefois à la baisse : entre le début et la fin de la rédaction de cet article, le premier prix pour une machine dotée d'une touche « intégration » est tombé de 850 F à 350 F.

(3) Cette critique des « problèmes taupinaux », partiellement justifiée, est courante dans l'enseignement supérieur.

On reproche souvent la formation que nous donnons à son caractère « abstrait » ou « scolaire », il me semble que le type de démarche évoqué précédemment aurait pour effet de rapprocher notre enseignement des situations rencontrées dans l'industrie ou dans la recherche, contribuant ainsi à une évolution favorable de l'esprit des classes préparatoires.

IV. ANNEXES.

Les programmes ci-après sont écrits pour une calculette TI 58 ou TI 59. Sans autre modification appréciable que la numérotation des mémoires, ils peuvent être utilisés sur les TI 57 beaucoup moins onéreuses. De manière modifiée et moins pratique (il faut lire des résultats au vol), je les ai même réalisés sur la plus misérable des programmables : la TI 51 III. Il va de soi que ces programmes peuvent être facilement adaptés à la logique des calculettes de la série HP.

1. Pendule pesant.

Principe du programme : On range respectivement x , n , u_n et s dans les mémoires 01, 02, 03 et 04. Après avoir initialisé les mémoires et rangé la valeur 0,0001 dans le registre t pour limiter la durée du calcul de s_n tout en gardant une précision acceptable, on utilise la récurrence (5).

<i>Programme :</i>	<i>Compteur :</i>
: 2 = $\sin x^2$ STO 01	05
1 STO 2 STO 3 STO 04 0,0001 $x \rightleftharpoons t$	21
Lbl A RCL 2 $\times 2 - 1 = : 2 : RCL 2$	34
= $x^2 \times RCL 1 = Prd 3 RCL 3 x \geq t B$	47
RCL 4 R/S RST Lbl B SUM 04 1 SUM 2 GTO A	60

Exemple d'utilisation :

Pour $\alpha = 60^\circ$, on obtient en 12 secondes $y = 1,073$ (on notera que la formule de Borda aurait donné 1,069, ce qui peut être encore jugé ici comme une approximation acceptable). Le programme est encore utilisable pour des valeurs plus élevées de α pour lesquelles la formule de Borda n'est plus du tout adaptée. On obtient par exemple $y = 1,373$ pour $\alpha = 120^\circ$. Quand on se rapproche de $\alpha = 180^\circ$, la convergence de la série devient médiocre et les temps de calcul importants. Pour $\alpha = 150^\circ$, on obtient ainsi : $y = 1,762$ en plus de deux minutes.

2. Condensateur en haute fréquence (voir aussi V).

Principe :

x , n , u_n et la somme s_n des u_n sont respectivement rangés dans les mémoires 01 à 04. Rangeant cette fois la valeur 0,000 01 dans le registre t pour limiter la durée des calculs, on utilise (10).

Programme :	Compteur :
STO 01 0 STO 02 1 STO 3 STO 04	10
0,000 01 $x \rightleftharpoons t$ Lbl A	20
2 SUM 2 (RCL 2 : RCL 1)	30
x^2 1/x +/— Prd 3 RCL 3	36
SUM 4 x $x \geq t$ B	42
RCL 4 R/S RST Lbl B GTO A	50

Exemple d'utilisation :

En 7 secondes, on obtient $J(1) = 0,765$; en 15 secondes : $J(4) = -0,397$.

Les deux premiers zéros de J sont 2,405 et 5,520.

3. Diffraction par une ouverture circulaire.

Principe :

x , p , u_p et la somme des u_p sont rangés dans les mémoires 01 à 04. Après avoir initialisé les mémoires et rangé 0,000 01 dans le registre t , on utilise la formule (13).

Programme :	Compteur :
$X\pi : 2 =$ STO 01	7
0 STO 02 1 STO 3 STO 04	15
0,000 01 $x \rightleftharpoons t$ Lbl A	25
1 SUM 2 RCL 2 X (RCL 2 + 1)	37
$= 1/x$ X RCL 1 $x^2 =$ +/— Prd 3	46
RCL 3 SUM 4 x $x \geq t$ B	54
RCL 4 R/S RST Lbl B GTO A	62

Exemple :

Pour $u = 1$, on obtient $D(1) = 0,181$ en 15 secondes. Sans difficulté, on vérifie que le premier 0 de D correspond à $u_1 = 1,22$, obtenant ainsi le fameux facteur qui figure dans les expressions

dites d'Airy du pouvoir séparateur des instruments optiques. Terminons en proposant un petit problème aux amateurs : en construisant un programme d'intégration à partir de la fonction $D(u)$, ils pourront vérifier que la « tache d'Airy » définie par $u < u_1$ contient 83,8 % de l'intensité diffractée par l'ouverture. Ce résultat explique pourquoi, dans de nombreuses conditions, la figure de diffraction se réduit pratiquement à cette tache.

V. ET L'AVENIR PLUS LOINTAIN ?

Depuis deux ans, de véritables ordinateurs de poche programmables directement en BASIC, ont commencé à apparaître sur le marché. Je n'ai pas fait référence à ceux-ci dans ce qui précède en raison de leur prix élevé (quoique lui aussi en baisse rapide).

Pour permettre au lecteur d'apprécier la commodité d'emploi d'un tel engin, je cite ci-après le programme BASIC correspondant à l'exemple 2 (condensateur en haute fréquence) :

```
10 : INPUT « DERNIER TERME ? », T
20 : INPUT « ENTREZ X », X
30 : N = 0 : U = 1 : S = 1
40 : N = N + 2
50 : U = -U.(X/N)2
60 : S = S + U.
70 : IF ABS U > T GOTO 40
80 : PRINT S
90 : END
```

Sans connaissance préalable du BASIC, la signification de chaque ligne se devine car l'écriture est très proche de celle du calcul mathématique ordinaire.

Signalons enfin que les plus performants de ces mini-ordinateurs peuvent être associés à une imprimante-table traçante. Pour illustrer cette possibilité, voici ci-après les courbes correspondant aux exemples cités précédemment, tracées par un SHARP PC 1500 (fig. 2, 3 et 4).

Dès maintenant, de tels engins peuvent rendre des services aux professeurs. Il est bien entendu facile de leur faire tracer des réseaux de courbes dont les équations sont connues et de projeter le document obtenu. Ceci est déjà intéressant quand un tracé précis est souhaitable (courbes de résonance, isothermes de Van der Waals...).

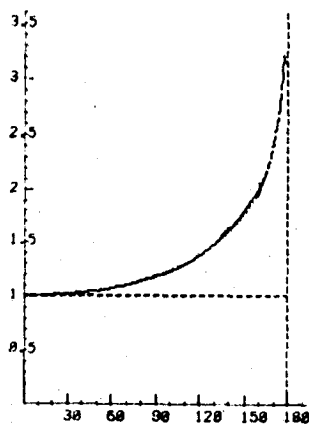
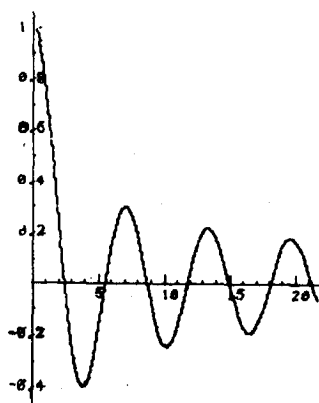


Fig. 2. — Pendule pesant.



Bessel

Zéros :

$$x_1 = 2.405$$

$$x_2 = 5.520$$

$$x_3 = 8.654$$

$$x_4 = 11.792$$

$$x_5 = 14.931$$

$$x_6 = 18.072$$

Fig. 3.

On peut également programmer très simplement le tracé des équipotentielles et des lignes de champ pour un bon nombre de distributions électrostatiques ou gravitationnelles. Enfin, à condition d'avoir au préalable programmé la résolution pas à pas d'équations différentielles du second ordre, on peut faire tracer par la machine la trajectoire de n'importe quel mouvement d'un point matériel placé dans un champ de forces connu avec des conditions initiales précisées. Ces deux dernières techniques peuvent illustrer des problèmes déjà traités, ou, ce qui est encore plus intéressant, guider l'intuition pour la résolution de pro-

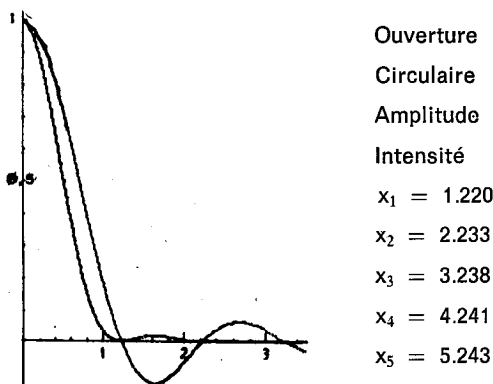


Fig. 4.

blèmes difficiles ; je terminerai en illustrant cette possibilité par deux exemples :

a) SATELLITE FREINÉ PAR LA HAUTE ATMOSPHÈRE.

La fig. 5 : ce que l'on obtient en ajoutant un terme de frottement fluide à la force en $1/r^2$ exercée par la Terre : on constate qu'une trajectoire elliptique se « circularise » rapidement (l'apogée A baisse à chaque tour d'une altitude appréciable alors que le périégée P est nettement moins modifié). Une fois ce comportement observé, il est assez facile de l'interpréter : l'interaction entre le satellite et l'atmosphère a lieu essentiellement au voisinage de P car c'est en ce point que la vitesse est maximale en

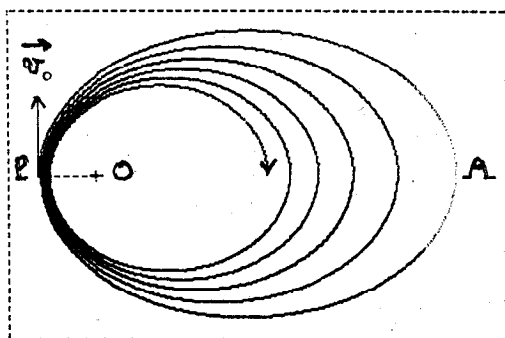


Fig. 5. — Satellite freiné.

vertu de la loi des aires (de plus, c'est également vers P que l'atmosphère est la plus dense). Tout se passe donc à chaque tour comme si le satellite était relancé de P avec une énergie mécanique E diminuée, il en résulte que le demi-grand axe qui est fonction croissante de E diminue également.

b) POINTS DE LAGRANGE.

Sur la fig. 6, les points A_1 et A_2 figurent deux astres de masses m_1 et m_2 qui gravitent dans le plan de figure P autour du centre de masse G du système. Il est facile d'établir (troisième loi de Kepler) que le repère R lié au segment $A_1 A_2$ est animé par rapport à un repère galiléen d'une rotation dont la vitesse angulaire est donnée par $\omega^2 = (m_1 + m_2)G/a^3$ (avec $a = A_1 A_2$). Avec $A_1 M = r_1$, $A_2 M = r_2$ et $GM = r$, l'énergie potentielle d'un point matériel de masse m placé dans le repère R est la somme de deux termes gravitationnels et d'un terme d'inertie centrifuge :

$$U = -\frac{mm_1 G}{r_1} - \frac{mm_2 G}{r_2} - \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

L'ordinateur a tracé les équipotentielles relatives à U. On constate que U est stationnaire en cinq points : deux « som-

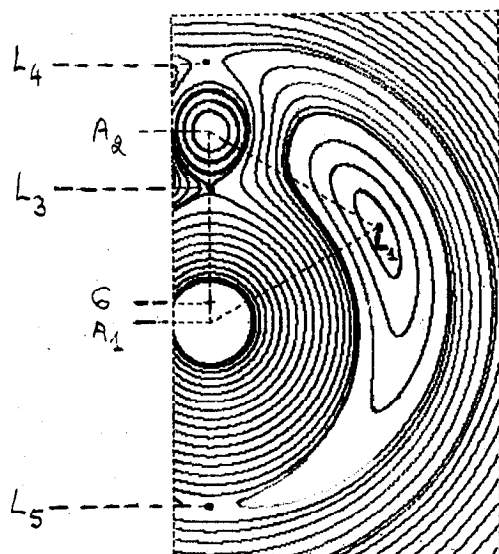


Fig. 6. — Points de Lagrange.

ments » L_1 et son symétrique L_2 par rapport à $A_1 A_2$, trois « cols » L_3 , L_4 et L_5 situés sur $A_1 A_2$. Ces cinq points qui constituent des positions d'équilibre possible par rapport à R sont appelés points de Lagrange. En exprimant les dérivées partielles $\partial U / \partial r_1$ et $\partial U / \partial r_2$, on peut établir que les triangles $A_1 A_2 L_1$ et $A_1 A_2 L_2$ sont équilatéraux comme le suggère la figure. Pour ce qui est du système (Soleil + Terre), l'existence de L_3 a déjà été exploitée par la NASA qui a lancé en 1978 la sonde « Halo Orbiter » qui gravite dans le voisinage de ce point. Pour le système (Soleil + Jupiter), les points L_1 et L_2 sont bien connus des astronomes qui y ont découvert des astéroïdes (les Grecs et les Troyens) qui gravitent au voisinage de ces points.

Ce résultat peut surprendre, puisque L_1 et L_2 sont des sommets de potentiel ; en fait, un calcul (qu'il faut, cette fois, faire sans ordinateur !) montre que la stabilité est assurée par la force de Coriolis à condition que m_2/m_1 soit supérieur à 24,96, condition largement vérifiée pour les systèmes (Soleil + Planète).
