

La fonction de transfert des systèmes linéaires

par Jean-Pierre CARON,
(E.N.S.A.M., centre de Lille, 59046).

INTRODUCTION.

Les structures des produits industriels sont d'une telle complexité que pour comprendre les processus mis en œuvre, il est nécessaire de procéder à une *analyse* des différents *systèmes* qui les constituent. Le rôle de ceux-ci est caractérisé par une fonction bien définie :

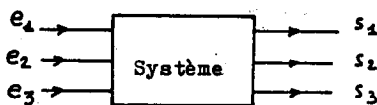
la fonction de transfert.

Nous abordons, dans cet exposé, l'étude des seuls systèmes linéaires dont le comportement est du type analogique, c'est-à-dire ceux qui sont décrits par un système d'équations différentielles linéaires.

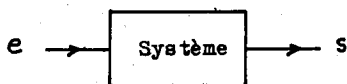
Nous avons limité les développements mathématiques qui font référence à la théorie des distributions, aux transformations de Laplace et de Fourier pour nous attacher aux raisonnements basés sur les analogies électromécaniques.

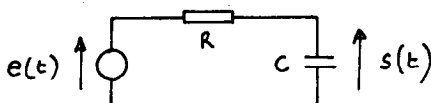
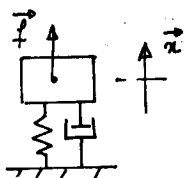
I. DEFINITIONS.

Un *système* est un assemblage de composants, destiné à opérer sur des grandeurs physiques ; les variables d'entrée et de sortie sont des fonctions du temps.



En général, on étudie une sortie principale $s(t)$ en fonction d'une entrée principale $e(t)$:



Exemples simples.**1. Variation de la charge d'un condensateur :****2. Réponse d'un système (masse-ressort-dashpot) à une force d'excitation :**

$$e(t) = f(t)$$

$$s(t) = x(t)$$

Système linéaire.

Aux excitations d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$ correspondent respectivement les réponses en sortie : $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

Le système est linéaire, si pour l'entrée :

$$e(t) = a x_1(t) + b x_2(t),$$

la sortie s'exprime par $s(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$, quelles que soient les actions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour tous les scalaires a et b .

En fait, on définit un *domaine de linéarité* à l'intérieur duquel la propriété est vraie ; par exemple : un ressort n'est linéaire que pour les petites déformations.

Système réel.

$$\forall t, e(t) \in \mathbf{R} \Rightarrow s(t) \in \mathbf{R}.$$

Système causal.

Un système est causal si ses réponses à l'instant t ne dépendent que des excitations d'entrée aux instants antérieurs ou égaux à t : l'excitation précède la réponse.

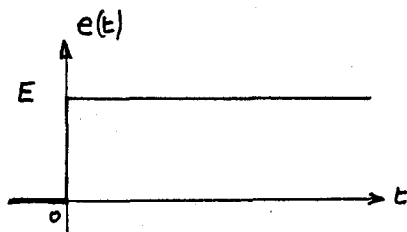
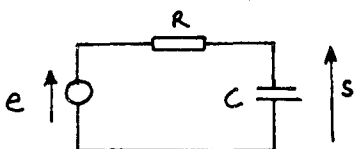
Système stationnaire ou invariant par translation dans le temps.

Si, à l'excitation d'entrée $x(t)$ correspond la réponse $y(t)$, alors à l'entrée $x(t - \tau)$, le système répondra par $y(t - \tau)$ quel que soit τ .

Par la suite, on ne considère que des systèmes *linéaires, réels, causaux, stationnaires*.

Sont *exclus* de cette classification les systèmes dans lesquels de l'énergie est *emmagasinée avant l'action*.

Exemple.

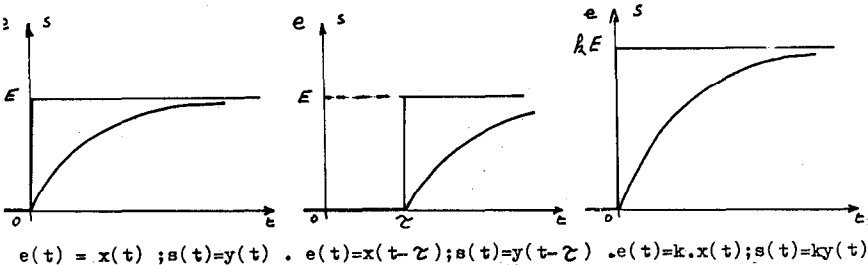


Posons :

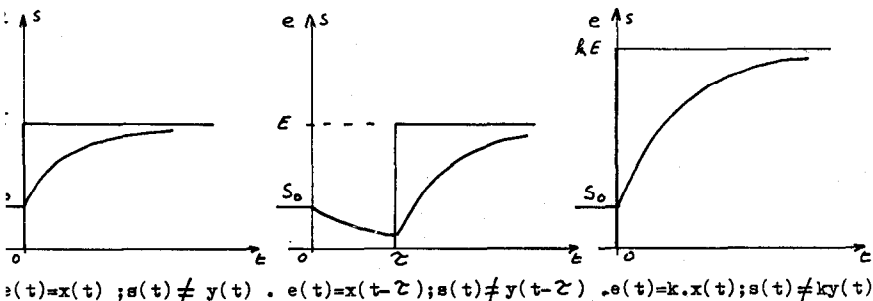
pour $t \geq 0$: $x(t) = E$; $y(t) = E(1 - \exp(-t/RC))$

pour $t < 0$: $x = 0$, $y = 0$.

1^{er} cas : charge emmagasinée nulle, $s(0) = 0$.



2^e cas : charge emmagasinée non nulle, $s(0) \neq 0$.



Conclusion.

Pour les systèmes électriques répondant aux définitions précédentes, à l'instant $t = 0$, début de l'excitation e ($e = 0$ pour t inférieur à 0) :

- les condensateurs ne sont pas chargés,
- les inductances sont parcourues par un courant nul.

En mécanique, ces conditions reviennent à supposer :

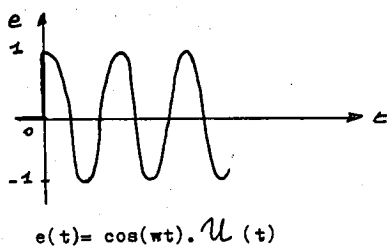
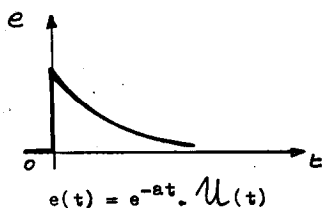
- énergie potentielle nulle (ressorts, arbres de torsion non déformés),
- énergie cinétique nulle (vitesse initiale nulle).

II. NOYAU D'UN SYSTEME LINEAIRE.

Soit $e(t)$ l'excitation du système, elle prend naissance à $t = 0$;
 $e(t) = 0$ pour $t < 0$.

En introduisant la fonction *échelon unité* $\mathcal{U}(t)$ telle que :
 $\mathcal{U}(t) = 0$ pour $t < 0$, $\mathcal{U}(t) = 1$ pour $t \geq 0$, on écrit l'excitation :
 $f(t) \cdot \mathcal{U}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Exemples.



II.1. Distribution de Dirac.

Introduisons la distribution de Dirac $\delta_0(t)$ et ses propriétés utilisées dans les démonstrations suivantes :

a) DÉFINITION :

La distribution de Dirac $\delta_0(t)$ est la forme linéaire qui, à toute fonction $f(t)$, associe $f(0)$.

notation :

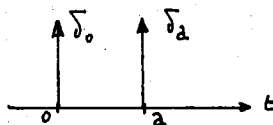
$$\langle \delta_0, f \rangle = f(0)$$

et formellement : $\langle \delta_0, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta_0(\tau) d\tau$.

b) DISTRIBUTION RETARDÉE :

$$\delta_a(t) = \delta_0(t - a)$$

avec : $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$.



symboles graphiques

c) PRODUIT DE CONVOLUTION (noté $*$):

C'est une extension du produit de convolution des fonctions :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$$

qui se transforme en $\int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$ pour des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ nulles pour t inférieur à 0.

On montre que :

$$\delta_0 * e = e * \delta_0 = e$$

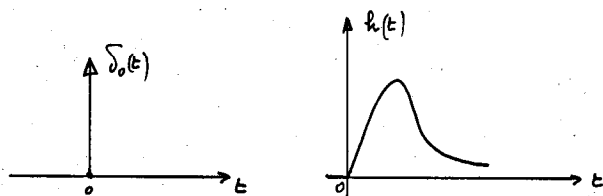
Remarque.

On retrouve ce résultat formellement :

$$(\delta_0 * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t - \tau) \delta_0(\tau) d\tau = [e(t - \tau)]_{\tau=0} = e(t).$$

II.2. Réponse du système à une excitation $e(t)$.

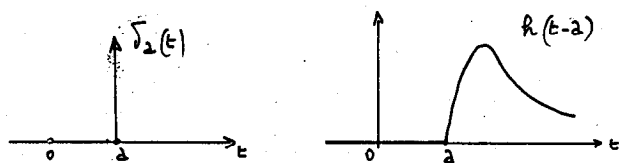
Supposons d'abord le système excité par $\delta_0(t)$, la réponse $h(t)$ est appelée *réponse impulsionnelle*.



On peut écrire d'après (II.1. c) : $h(t) = (h * \delta_0)(t)$.

Le système étant invariant par translation dans le temps, la réponse à une distribution retardée $\delta_a(t)$ est :

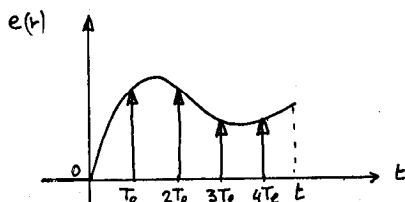
$$h(t - a) = (h * \delta_a)(t).$$



La propriété de linéarité nous montre aussi que :

$$[(\alpha \delta_a) * h](t) = \alpha [(\delta_a * h)(t)] = \alpha \cdot h(t - a).$$

Considérons maintenant un échantillonnage de $e(t)$, de période T_e :



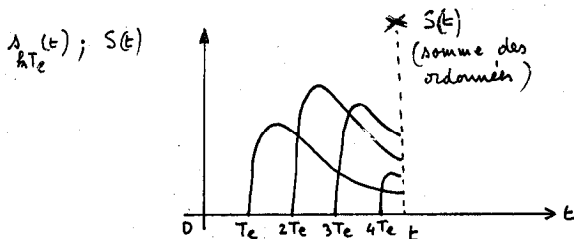
L'échantillon à l'instant kT_e est : $e(kT_e) \delta_{kT_e}$.

La réponse du système à cet échantillon est $s_{kT_e}(t)$:

$$s_{kT_e}(t) = [e(kT_e) \delta_{kT_e} * h](t) = e(kT_e) \cdot [(\delta_{kT_e} * h)(t)] = e(kT_e) \cdot h(t - kT_e).$$

Par la propriété de linéarité, la réponse à l'instant t du train d'échantillons est la somme $S(t)$:

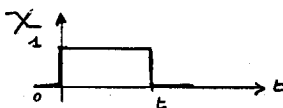
$$S(t) = \sum_{k=0}^l s_{kT_e}(t); \quad l \text{ partie entière de } t/T_e.$$



$$S(t) = \sum_{k=0}^l [e(kT_e) \delta_{kT_e} * h](t) = \left[\left[\sum_{k=0}^l e(kT_e) \delta_{kT_e} \right] * h \right](t).$$

Quand T_e tend vers 0, la somme $\sum_{k=0}^l e(kT_e) \delta_{kT_e}$ tend vers $e(t) \cdot \chi_{(0,t]}$ c'est-à-dire e restreint à l'intervalle $(0, t)$.

$\chi_{(0,t]}$ est la fenêtre unité :



$S(t)$ tend vers $s(t) = [e(t) \cdot \chi_{[0,t]}] * h](t)$ soit encore, par définition :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e \cdot \chi_{[0, t]}](\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau,$$

or :

$$h(t - \tau) = 0 \text{ pour } t < \tau$$

$$[e \cdot \chi_{[0, t]}](\tau) = 0 \text{ pour } \tau < 0$$

donc :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

ou :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

d'où le résultat fondamental :

$$\boxed{s = e * h}$$

La grandeur de sortie d'un système linéaire, réel, causal, invariant par translation dans le temps est égale au produit de convolution de la grandeur d'entrée par la réponse impulsionnelle du système.

$h(t)$ est encore appelé le *noyau de la transformation* qui fait correspondre $s(t)$ à $e(t)$.

III. FONCTION DE TRANSFERT OPERATIONNELLE.

III.1. Définition.

Appliquons la transformation de Laplace à $s(t)$:

$$\mathcal{L} s(t) = S_{(p)} = \mathcal{L}(e * h) = \mathcal{L} e(r) \cdot \mathcal{L} h(t) = E_{(p)} \cdot H_{(p)}$$

où :

$$H_{(p)} = \int_{0_+}^{\infty} h(t) e^{-pt} dt$$

$$\boxed{S_{(p)} = H_{(p)} \cdot E_{(p)}}.$$

$H_{(p)}$ est la fonction de transfert opérationnelle du système.

III.2. Détermination de la fonction de transfert.

Il est rare de calculer directement $H_{(p)}$ à partir de la réponse impulsionnelle, c'est plutôt l'inverse que l'on sait bien faire.

Une première méthode, la plus classique, de recherche de $H_{(p)}$ consiste à établir toutes les équations décrivant le comportement physique de toutes les parties du système et à appliquer à chacune d'elles la transformation de Laplace. On procède ensuite à l'élimination des grandeurs physiques intermédiaires pour obtenir finalement $H_{(p)} = S_{(p)}/E_{(p)}$.

La méthode est en fait simple à utiliser, en remarquant que la transformée de Laplace de la dérivée d'une grandeur physique $x(t)$ est :

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) = p \mathcal{L}(x) - x(0_+) = p X_{(p)} - x(0_+),$$

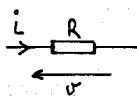
soit, en fait, $p X_{(p)}$, puisque l'élément, décrit par la loi physique faisant intervenir la dérivée, n'a pas d'énergie emmagasinée à l'instant 0.

En pratique, dans le système d'équations différentielles, on remplace :

$$\begin{aligned} x(t) &\text{ par } X_{(p)} \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\text{ par } p^n X_{(p)}. \end{aligned}$$

Cas des circuits électriques.

La transformation de Laplace est depuis longtemps appliquée avec succès à l'étude des circuits électriques pour lesquels on définit les *impédances électriques opérationnelles* :

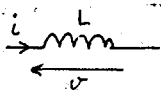


$$v = Ri \Rightarrow \mathcal{L}v = R \cdot \mathcal{L}i.$$

En utilisant les lettres majuscules pour les transformées,

$$V = RI$$

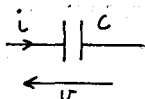
R est l'impédance opérationnelle de la résistance.



$$v = L \frac{di}{dt}; \quad V = L(pI - i(0_+)), \quad \text{or } i(0_+) = 0$$

$$V = L pI$$

L_p est l'impédance opérationnelle de l'inductance.



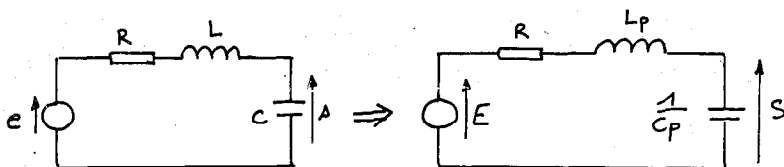
$$i = C \frac{dv}{dt}; \quad I = C(pV - v(0_+)), \quad \text{or } v(0_+) = 0$$

$$V = I/Cp$$

$1/Cp$ est l'impédance opérationnelle du condensateur.

Il suffit donc de remplacer le $(j\omega)$ des impédances complexes par (p) pour obtenir l'expression des impédances opérationnelles.

Exemple.



Le schéma réel est transposé par la transformation de Laplace.

La fonction de transfert $H = S/E$ se calcule par la division de tension :

$$\frac{S}{E} = \frac{1/Cp}{1/Cp + R + Lv} = \frac{1}{1 + RCp + LCp^2}.$$

Dans les circuits électriques linéaires, on déterminera donc la fonction de transfert en utilisant au mieux les théorèmes des réseaux linéaires en fonction de la structure du circuit. Les théorèmes de Thévenin, Norton, Millman, Kennelly, les divisions de tension et de courant offrent le plus souvent des méthodes de résolution plus rapides et plus élégantes que les lois de Kirchhoff.

En ce qui concerne les systèmes autres qu'électriques, la méthode générale de description par les équations différentielles est la plus usitée; mais il est parfois avantageux de procéder à une *analogie* avec les circuits électriques; c'est ce que nous proposons de montrer avec les systèmes mécaniques linéaires, réels, causaux et invariants.

Ceux-ci sont décrits par des *composants mécaniques* : masses, ressorts, frottements fluides pour les translations ; volants, arbres de torsion, frottements fluides aux paliers, embrayages pour les rotations. Nous supposons ces composants parfaits comme dans le cas des réseaux électriques.

IV. METHODE ANALOGIQUE DE DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT DES SYSTEMES MECANQUES.

IV.1. L'analogie des composants : l'impédance mécanique.

1.1. ANALOGIE ÉLECTROMÉCANIQUE POUR LES TRANSLATIONS.

Selon les structures, on a le choix parmi deux correspondances entre les grandeurs physiques électriques et mécaniques :

Analogie de type (A) :

courant $i \leftrightarrow$ vitesse u

tension $v \leftrightarrow$ force f

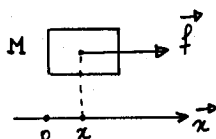
Analogie de type (B) :

courant $i \leftrightarrow$ force f

tension $v \leftrightarrow$ vitesse u

ANALOGIE DE TYPE (A) :

masse :



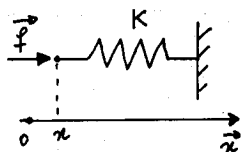
$$f = M \frac{du}{dt}; \quad F = MpU$$

impédance mécanique opérationnelle : $Z = F/U = Mp$.

La masse est l'équivalent mécanique de l'inductance.

$$L \leftrightarrow M$$

ressort :



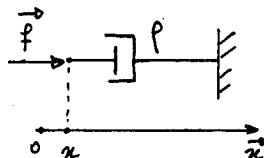
$$f = Kx; \quad F = KX \quad \text{or} \quad U = pX$$

$$F = \frac{K}{p} \cdot U : \underline{Z = K/p}.$$

Le ressort est l'équivalent mécanique du condensateur.

$$C \leftrightarrow 1/K$$

dashpot (frottement fluide) :



$$f = \varrho u; \quad F = \varrho U; \quad Z = \varrho.$$

Le dashpot est l'équivalent mécanique de la résistance.

$$R \leftrightarrow \varrho$$

ANALOGIE DE TYPE (B) :

masse : $Z = U/F = 1/Mp$

ressort : $Z = U/F = p/K$

dashpot : $Z = U/F = 1/\varrho$

$$\begin{array}{l} C \leftrightarrow M \\ L \leftrightarrow 1/K \\ R \leftrightarrow 1/\varrho \end{array}$$

ou

$$G \leftrightarrow \varrho$$

conductance (G).

1.2. ANALOGIE ÉLECTROMÉCANIQUE POUR LES ROTATIONS.

Analogie de type (A) :

courant $i \leftrightarrow$ vitesse angulaire ω ;

tension $v \leftrightarrow$ couple;

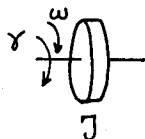
Analogie de type (B) :

courant $i \leftrightarrow$ couple;

tension $v \leftrightarrow$ vitesse angulaire ω .

Analogie de type (A) :

volant :

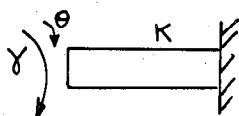


$$\gamma = J \frac{d\omega}{dt}; \quad \Gamma = Jp\Omega$$

impédance mécanique : $\frac{\Gamma}{\Omega} = Jp.$

$$L \leftrightarrow J$$

arbre de torsion :

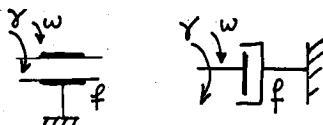


$$\gamma = K\theta; \quad \Gamma = \frac{K}{p} \cdot \Omega$$

impédance mécanique : $\frac{\Gamma}{\Omega} = K/p$.

$C \leftrightarrow 1/K$

palier, embrayage :



$$\gamma = f \cdot \omega; \quad \Gamma = f \cdot \Omega$$

impédance mécanique : $\frac{\Gamma}{\Omega} = f$.

$R \leftrightarrow f$

Analogie de type (B) :

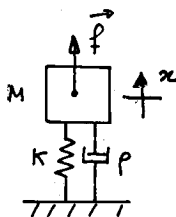
1

$C \leftrightarrow J$	$L \leftrightarrow 1/K$	$R \leftrightarrow 1/f$
-----------------------	-------------------------	-------------------------

IV.2. Recherche d'un circuit électrique équivalent à un système mécanique.

Travaillons, par exemple, à partir de l'analogie de type A) pour les translations.

On constate que la relation fondamentale de la dynamique $\Sigma \vec{f} = 0$ est en mécanique ce qu'est la loi des mailles de Kirchhoff en électricité : $\Sigma V = 0$.

Exemple.

Au repos, $x = 0$; de sorte que la force de pesanteur est compensée à chaque instant par la déformation initiale du ressort. La loi fondamentale s'exprime par :

$$-M\ddot{x} - \rho\dot{x} - Kx + f = 0.$$

Appliquons la transformation de Laplace :

$$F = Mp \cdot U + \rho \cdot U + \frac{K}{p} \cdot U$$

Analogie.

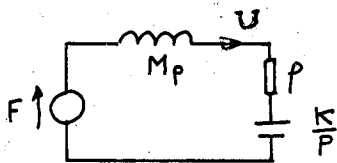
F : d.d.p. délivrée par une source de tension,

MpU : chute de tension aux bornes de l'inductance Mp ,

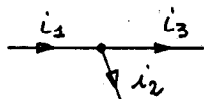
$(K/p)U$: chute de tension aux bornes du condensateur K/p ,

ρU : chute de tension aux bornes de la résistance ρ ,

d'où le circuit équivalent :

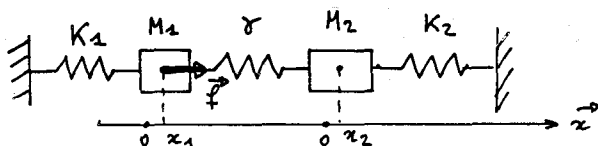


La loi des nœuds apparaît de façon plus subtile, elle peut traduire simplement que le courant dans une branche est la différence entre deux courants :



$$i_2 = i_1 - i_3.$$

On rencontre en mécanique des différences de vitesses lorsque les extrémités d'un dashpot ou d'un ressort sont toutes deux mobiles.

Exemple.

Equation fondamentale relative à M_1 :

$$M_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + \gamma (x_1 - x_2) = f$$

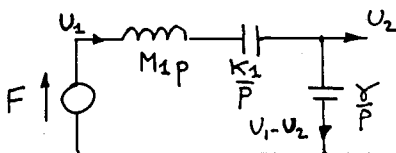
soit :

$$M_1 p U_1 + \frac{K_1}{p} U_1 + \frac{\gamma}{p} [U_1 - U_2] = F.$$

La f.é.m. F est égale à la somme des tensions développées aux bornes des impédances : $M_1 p$, K_1/p et γ/p (maille).

γ/p n'est pas parcourue par le même courant que $M_1 p$ et K_1/p ; il y a donc là une application de la loi des nœuds.

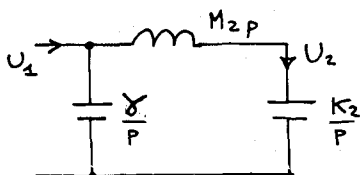
γ/p est commun à deux mailles :



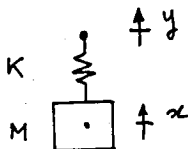
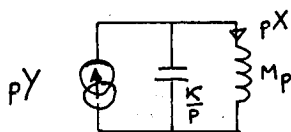
L'équation fondamentale relative à M_2 permet de terminer le schéma :

$$M_2 \ddot{x}_2 + \gamma (x_2 - x_1) + K_2 x_2 = 0$$

$$\frac{\gamma}{p} [U_1 - U_2] = M_2 p U_2 + \frac{K_2}{p} U_2.$$

**Remarque 1.**

Quand un mouvement est imposé en un point d'un système mécanique, on matérialise cette entrée par une *source idéale de courant*, car la vitesse est elle-même imposée.

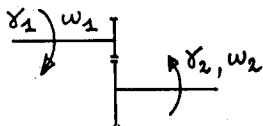
Exemple.Entrée : $y(t)$,Sortie : $x(t)$,Au repos : $x = 0, \quad y = 0 \quad (t < 0)$.**Schéma équivalent.**

La fonction de transfert se détermine par la division de courant :

$$pX = pY \frac{K/p}{K/p + Mp} \Rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{1}{1 + M/K p^2}.$$

Remarque 2.

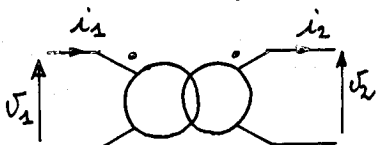
Le *réducteur* mécanique est analogue au *transformateur* pour les régimes variables et au *hâcheur* pour les régimes indépendants du temps.

Réducteur parfait.

$$\gamma_1 \omega_1 = \gamma_2 \omega_2$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = m'$$

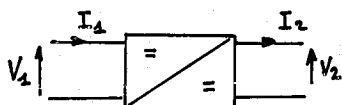
m' est le rapport de réduction.

Transformateur parfait.

$$v_1 i_1 = v_2 i_2$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{i_1}{i_2} = m$$

m est le rapport de transformation.

Hâcheur parfait.

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = \Theta$$

Θ est le rapport cyclique.

Remarque 3.

L'analogie (B) procède par transformation *duale* de l'analogie (A) :

impédances $\leftrightarrow$ admittances

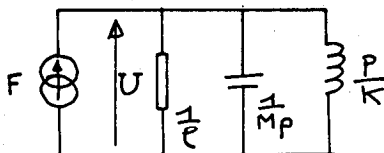
structure série $\leftrightarrow$ structure parallèle

source de tension $\leftrightarrow$ source de courant.

Reprenons l'exemple du système (masse - ressort - dashpot).

Intensité F = tension U (somme des admittances) :

$$F = U(q + Mp + K/p).$$

Schéma équivalent (B).

Avec un peu d'habitude, on établit les schémas électriques équivalents *sans écrire* les équations différentielles et on détermine la fonction de transfert en résolvant le circuit.

V. QUAND DOIT-ON UTILISER LA FONCTION DE TRANSFERT OPERATIONNELLE ?

Son domaine d'application est essentiellement celui des *régimes transitoires* ; c'est-à-dire quand le système évolue entre deux *états permanents*.

Sont considérées comme entrée et sortie permanentes les fonctions du temps de l'un des quatre types suivants :

- fonction constante (échelon d'amplitude),
- fonction linéaire (échelon de vitesse),
- fonction parabolique (échelon d'accélération),
- fonction sinusoïdale.

Quand, à partir de $t = 0$, un système est soumis à une entrée permanente pendant assez longtemps, sa sortie finit par devenir, elle aussi, permanente.

Exemples.

Un système de mise en position finit par donner une réponse constante à une entrée constante.

Un système intégrateur finit par donner une rampe à une excitation constante.

Un système linéaire finit par donner une réponse sinusoïdale à une excitation sinusoïdale; c'est le *régime harmonique*.

Quand un système est en régime permanent (état 1) et qu'à un instant t_1 , on lui impose une autre entrée permanente, il met en général un certain temps pour atteindre son nouveau régime permanent (état 2); pendant la durée du passage de l'état 1 à l'état 2, le système est en *régime transitoire*.

Exemple d'application à l'étude d'un régime transitoire.

Soit $e(t) = E \cdot \mathcal{U}(t)$ excitant un système décrit par :

$$H(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}, \text{ on demande de rechercher } s(t).$$

On écrit :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p),$$

soit :

$$S(p) = \left(\frac{1 + aTp}{1 + Tp} \right) \cdot \frac{E}{p}.$$

La technique de retour à l'original $s(t)$ consiste à décomposer $S(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = E \cdot \left[\frac{1}{p} + \frac{(a-1)T}{1 + Tp} \right]$$

puis à rechercher les originaux dans une table des transformées :

$$s(t) = E [1 + (a-1)e^{-t/T}] \cdot \mathcal{U}(t).$$

La transformation de Laplace est utile aussi à l'étude des *régimes permanents* autres qu'harmoniques.

Si la sortie $s(t)$ devient constante, on emploie le *théorème de la valeur finale* :

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H(p) \cdot E(p).$$

Lorsque $s(t)$ devient une rampe : $(at + b) \cdot \mathcal{M}(t)$ dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}(at + b)(p) = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p}$, il suffit de rechercher les deux premiers termes du développement limité en $\left(\frac{1}{p}\right)$.

Exemple.

$$\text{Soit } S(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{(1 + \alpha p)}{(1 + \beta p)} = \frac{1}{p^2} - (\beta - \alpha) \cdot \frac{1}{p} + A(p).$$

L'original de $\left[\frac{1}{p^2} - (\beta - \alpha) \cdot \frac{1}{p} \right]$ correspond à la rampe d'équation :

$$[t - (\beta - \alpha)] \cdot \mathcal{M}(t).$$

Même type de démonstration lorsque $s(t)$ devient parabolique.

VI. REGIME HARMONIQUE. FONCTION DE TRANSFERT COMPLEXE.

Le régime harmonique caractérise un état permanent du système, dans lequel il est excité par une entrée sinusoïdale :

$$e(t) = E_M \cos(\omega_0 t)$$

la réponse finit par devenir sinusoïdale :

$$s(t) = S_M \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Le problème à résoudre est celui du calcul de S_M et de φ .

Dans ce but, prenons la transformée de Fourier de $s = e * h$,

il vient : $\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(e) \cdot \mathcal{F}(h)$

soit : $Y(\omega) = X(\omega) \cdot \underline{H}(j\omega)$

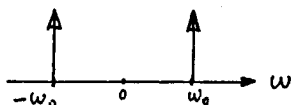
où :

$$\underline{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}(h).$$

On constate que $\underline{H}(j\omega)$ s'obtient en remplaçant p par $(j\omega)$ dans $H(p)$. $\underline{H}(j\omega)$ est la fonction de transfert complexe, c'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

$X(\omega)$ est le *spectre de fréquence* de l'excitation $e(t)$:

$$X(\omega) = \frac{E_M}{2} \cdot (\delta_{\omega_0} + \delta_{-\omega_0})$$



$Y(\omega)$ est le *spectre de fréquence* de la réponse :

$$Y(\omega) = \frac{E_M}{2} \cdot (\delta_{\omega_0} + \delta_{-\omega_0}) \cdot \underline{H}(j\omega)$$

or :

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| e^{j[\text{Arg}(\underline{H}(j\omega))]}$$

d'où, en revenant à $s(t)$ par l'intégrale de définition :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$s(t) = \frac{E_M}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{H}(j\omega)| \cdot e^{j[\omega t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))]} \cdot [\delta_{\omega_0} + \delta_{-\omega_0}]$$

$$s(t) = \frac{E_M}{2} \cdot \left[|\underline{H}(j\omega_0)| e^{j[\omega_0 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_0))]} \dots \right. \\ \left. \dots + |\underline{H}(j-\omega_0)| e^{j[-\omega_0 t + \text{Arg}(\underline{H}(-j\omega_0))]} \right]$$

or :

$$\underline{H}(-j\omega_0) = \underline{H}^*(j\omega_0)$$

$$s(t) = E_M |\underline{H}(j\omega_0)| \cdot \left[\frac{e^{j[\omega_0 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_0))]} + e^{-j[\omega_0 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_0))]}}{2} \right]$$

$$s(t) = E_M \cdot |\underline{H}(j\omega_0)| \cdot \cos[\omega_0 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_0))]$$

CONCLUSION.

$$S_M = E_M \cdot |\underline{H}(j\omega_0)|$$

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_0))$$

NOTATION.

$s(t)$ = partie réelle de $[S_M e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t}]$

$$\left. \begin{array}{l} (j\omega_0) = S_M e^{j\varphi} \\ (j\omega_0) = E_M \end{array} \right\} \text{Amplitudes complexes : } \boxed{\underline{S}(j\omega_0) = \underline{H}(j\omega_0) \cdot \underline{E}(j\omega_0)}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Franklin-F. KUO. — *Network analysis and synthesis*. (Wiley International Edition).
 2. René BOÏTE et Jacques NEIRYNCK. — *Théorie des réseaux de Kirchhoff*. (Editions Géorgi).
 3. Michel FELDMANN. — *Théorie des réseaux et systèmes linéaires*. (Eyrolles).
 4. M. MAX. — *Traitement du signal*. (Masson).
 5. PARODI. — *Introduction à l'étude de l'analyse symbolique*. (Gauthier-Villars).
 6. L. SCHWARTZ. — *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. (Hermann).
-