

Le groupe de renormalisation

(à l'occasion du prix Nobel de Physique 1982, décerné à Keneth Wilson)

par R. JULLIEN,

Maître-assistant,

Université Paris-Sud, Orsay.

INTRODUCTION.

Lorsqu'un ami me demande quel est l'objet de mes recherches, il m'arrive de répondre (fort imprudemment) : « j'étudie certaines transitions de phases au moyen du groupe de renormalisation... ». En général, la suite de la conversation ne se fait guère attendre : mon ami coupe court et enchaîne sur le match de football de la veille ou sur mes projets pour le prochain week-end ! Il est vrai que cette expression à la fois lourde et mystérieuse « le groupe de renormalisation » n'évoque vraiment rien au profane. Lorsqu'elle a été divulguée au grand public par la radio et la télévision, un certain soir d'octobre 1982, un auditeur distrait aurait pu penser à quelques putchistes récidivistes d'un pays de l'est ! Ces quelques mots désignent en fait une nouvelle théorie de la physique introduite en 1971 par des chercheurs américains parmi lesquels Keneth WILSON qui a obtenu le prix Nobel de Physique 1982. Cette théorie qui a fait faire des progrès énormes à la compréhension de nombreux problèmes ardu de la physique, est maintenant couramment utilisée, avec succès, par des centaines de chercheurs de par le monde. Lorsqu'un sujet de recherche connaît un tel essor depuis dix ans et, qui plus est, lorsqu'il est fort justement couronné par un prix Nobel, il est un devoir d'essayer de le vulgariser. Je vais m'y efforcer ici. Mon travail est rendu plus aisé du fait que je m'adresse à un public de professeurs de second degré. Aussi, ne me gênerai-je pas pour aligner quelques équations. Je m'en excuse à l'avance !

Le groupe de renormalisation est une technique très générale utilisée maintenant dans de nombreux domaines, mais c'est sans aucun doute à propos de l'étude théorique des transitions de phase, en thermodynamique statistique, qu'il a eu le plus de succès. Les transitions de phase qui se prêtent le mieux à son investigation sont les transitions de « seconde espèce » selon la vieille classification d'EHRENFEST, c'est-à-dire les transitions de phase où l'énergie interne ne subit pas de saut à la transition. La description théorique d'un système à l'état critique, c'est-à-dire lorsque sa température est juste égale à la température de transition, pose des problèmes très délicats car plusieurs échelles de longueurs interviennent à la fois. Qui ne connaît la célèbre

expérience du physicien autrichien J. NATTERER (1854) mettant en évidence l'« opalescence » critique du mélange eau-vapeur au point critique, là où la transition de vaporisation devient justement de seconde espèce. Dans cette expérience, la lumière est diffusée par des fluctuations de densité allant de l'échelle moléculaire jusqu'à la taille du récipient. C'est cette coexistence de plusieurs longueurs caractéristiques qui rend l'interprétation des phénomènes critiques si délicate. La méthode du groupe de renormalisation est particulièrement bien adaptée à ce type de problèmes. Dans cet article, j'aimerais montrer comment procède le groupe de renormalisation en décrivant en détail un exemple typique où il s'applique particulièrement bien.

LA TRANSITION FERROMAGNETIQUE - PARAMAGNETIQUE.

L'exemple que je vais considérer ici concerne la transition ferromagnétique - paramagnétique observée lorsque l'on chauffe une substance ferromagnétique, tel le fer. On sait que dans ces substances, chaque atome du cristal est porteur d'un moment magnétique individuel. Je n'entrerai pas dans l'explication de l'origine de ce moment magnétique ; je rappelle seulement qu'il provient du fameux « spin », le moment cinétique intrinsèque de l'électron. A basses températures, les moments magnétiques ont tendance à s'aligner sous l'influence de leurs interactions mutuelles, ce qui conduit à une aimantation macroscopique, ou « aimantation spontanée » qui existe même en l'absence de champ magnétique externe. Lorsqu'on chauffe la substance ferromagnétique, l'aimantation spontanée s'annule complètement à une température de transition bien précise, appelée température de Curie, T_c , qui dépend de la substance considérée. Cette transition est une conséquence de l'agitation thermique qui tend à désorienter de plus en plus les moments magnétiques lorsque la température augmente.

Au point de transition, toutes les grandeurs physiques présentent une singularité mathématique dans leur variation avec la température. On précise ce comportement près de T_c , dans la région dite « critique », en introduisant les exposants critiques. L'exposant critique β précise comment l'aimantation spontanée m s'annule à la transition :

$$m \sim (T_c - T)^\beta \quad \text{avec} \quad T < T_c.$$

Le comportement de la susceptibilité magnétique, χ , fait intervenir un autre exposant critique, γ . Je rappelle que la susceptibilité magnétique se définit comme le rapport entre l'aimantation induite et le champ magnétique lorsque l'on applique un petit champ magnétique externe. Cette quantité diverge au point de transition comme :

$$\chi \sim |T_c - T|^{-\gamma}$$

avec $\gamma > 0$. Cette fois-ci, la formule est valable au-dessus et en dessous de T_c . On définit de la même façon d'autres exposants pour chacune des autres grandeurs physiques. J'insisterai sur l'un d'eux, l'exposant ν , relié à une grandeur caractéristique importante, la longueur de corrélation ξ . Cette longueur caractérise la portée spatiale des corrélations entre les moments magnétiques individuels ; c'est-à-dire encore la distance maximale moyenne à laquelle l'orientation d'un moment magnétique donné influence l'orientation des autres moments magnétiques autour de lui. Lorsque l'on approche de T_c par valeurs supérieures ou inférieures, ξ diverge comme :

$$\xi \sim |T_c - T|^{-\nu}.$$

La divergence de ξ traduit le fait que, à la température de transition, les corrélations entre les moments magnétiques s'étendent depuis l'échelle atomique jusqu'aux dimensions de l'échantillon. On retrouve ici l'analogie du phénomène d'opalescence critique dont j'ai déjà parlé à propos de la transition de vaporisation.

LE MODELE D'ISING.

C'est le travail des chercheurs expérimentaux de déterminer, avec précision, la température de transition ainsi que les différents exposants critiques. C'est le devoir des chercheurs théoriciens de construire des modèles microscopiques plausibles capables d'expliquer les valeurs des exposants trouvées expérimentalement. Je vais parler ici du modèle le plus simple qui soit : le fameux modèle d'ISING qui a été introduit pour la première fois dans les années 1920 par les physiciens allemands W. LENZ et E. ISING. Ce modèle considère une assemblée de N moments magnétiques associés à des spins $1/2$, placés aux nœuds d'un réseau régulier construit dans un espace à d -dimensions. N est toujours un nombre très grand. Par la suite, j'utiliserai souvent le terme « spin » au lieu de « moment magnétique individuel » ; on sait qu'ils sont proportionnels. Dans ce modèle, les spins, que nous pouvons assimiler à des petits vecteurs, sont susceptibles de ne prendre qu'une seule direction privilégiée que j'appellerai « verticale » par pure convention. Un spin ne peut alors pointer que vers le haut ou vers le bas. Il est commode de représenter l'état d'un spin au site i du réseau par une variable s_i ne pouvant prendre que deux valeurs $+1$ et -1 suivant que le spin pointe vers le haut ou vers le bas.

D'autre part, dans le modèle d'ISING, l'énergie d'interaction entre spins se réduit aux seules contributions correspondant aux spins les plus proches voisins dans le réseau et elle se met sous la forme très simple :

$$-J s_i s_j \quad \text{avec} \quad s_i = \pm 1, \quad s_j = \pm 1$$

où J est une constante d'interaction positive qui a les dimensions d'une énergie et où i et j sont deux sites proches voisins dans le réseau. Le signe moins assure le caractère ferromagnétique du modèle : l'énergie de la paire de spins proches voisins est plus faible s'ils sont de même sens. J représente la moitié de l'énergie nécessaire pour retourner un des deux spins de la paire lorsqu'ils sont initialement tous deux alignés.

Si l'on veut introduire un champ magnétique externe dans ce modèle (pour calculer la susceptibilité magnétique par exemple), on le considère toujours vertical lui aussi, si bien que l'énergie d'un spin individuel dans le champ externe s'écrit simplement :

$$-h s_i.$$

Pour des raisons de commodité de notations, j'ai volontairement oublié le « magnéton de Bohr » si bien que la grandeur h que j'appelle ici « champ magnétique » a la dimension d'une énergie et est, en fait, proportionnelle à l'induction magnétique B (je rappelle que l'énergie d'un moment magnétique M dans une induction B vaut $-BM$, or pour un spin $1/2$ au site i , $M = \pm \mu_B = \mu_B s_i$, où μ_B est le magnéton de Bohr ; donc $h = \mu_B B$).

Considérons maintenant tout l'échantillon constitué des N spins individuels. J'appellerai « configuration » et je noterai $s = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ la donnée d'un ensemble de valeurs possibles pour les variables s_i . Il y a en tout 2^N configurations distinctes. A chaque configuration s correspond une énergie d'interaction totale $E(s)$ qui se calcule par la formule :

$$E(s) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j.$$

La somme couvre toutes les paires de sites les plus proches voisins, c'est-à-dire toutes les « liaisons » du réseau. S'il y a un champ magnétique externe, il convient de rajouter le terme

$$-h \sum_{i=1}^N s_i.$$

C'est la thermodynamique statistique qui précise comment l'agitation thermique intervient dans le problème : à la température thermodynamique T , une configuration s d'énergie $E(s)$ se rencontre avec une probabilité proportionnelle au facteur de BOLTZMANN $\exp [-E(s)/k_B T]$ où k_B est la constante de BOLTZMANN. Quand la température est nulle, seule l'une des deux configurations $\{++++\}$, $\{----\}$ d'énergie la plus faible est réalisée, l'aimantation spontanée est alors maximale en valeur absolue (c'est l'aimantation « à saturation »). Lorsque la température augmente, les autres configurations commencent à intervenir et l'aimantation spontanée diminue en valeur absolue.

Quand la température tend vers l'infini, toutes les configurations deviennent équiprobables, ce qui correspond à une aimantation moyenne nulle dans l'échantillon. Ce petit raisonnement ne prévoit pas l'existence de la transition qui doit, en principe, se déduire du calcul complet de mécanique statistique.

Il sera commode, par la suite, d'associer à chaque configuration s , la grandeur sans dimension :

$$\varepsilon(s) = -E(s)/(k_B T)$$

qui n'est autre que l'opposé de l'énergie de la configuration en unités $k_B T$.

La probabilité de la configuration est alors simplement proportionnelle à $\exp \varepsilon(s)$ et $\varepsilon(s)$ se calcule par :

$$\varepsilon(s) = K \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j$$

où :

$$K = J/(k_B T)$$

est une grandeur sans dimension ou « couplage réduit » qui compare l'énergie du couplage entre spins J à l'énergie « thermique » $k_B T$. La valeur effectivement mesurable d'une grandeur physique A est en fait une valeur moyenne que nous noterons $\langle A \rangle$:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \sum_s A(s) \exp \varepsilon(s)$$

la fonction Z , la « fonction de partition », intervient pour normer les probabilités :

$$Z = \sum_s \exp \varepsilon(s).$$

Les sommes couvrent ici les 2^N configurations possibles et $A(s)$ désigne la valeur de A calculée dans la configuration s .

Ainsi, on conviendra de définir l'aimantation m comme la moyenne $\langle s_i \rangle$ de la variable s_i pour un site quelconque du réseau. Le résultat est indépendant de i et on a aussi bien :

$$m = \langle s_i \rangle = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{N} \right\rangle = \left\langle \frac{N^+ - N^-}{N} \right\rangle$$

où N^+ et N^- désignent les nombres de spins $+1$ et -1 respectivement dans une configuration donnée. Avec cette convention, l'aimantation à saturation vaut $m = \pm 1$.

SOLUTIONS EXACTES ET APPROXIMATION DU CHAMP MOYEN.

Le problème de thermodynamique statistique est donc clairement posé. Il suffit maintenant de choisir un réseau donné, de calculer Z , de calculer m et le tour est joué ! Malheureusement, en dépit de la simplicité du modèle, le calcul est en général extrêmement compliqué. Certes, à une dimension, c'est-à-dire pour une chaîne d'atomes, le problème peut être résolu relativement simplement, c'est ce qu'a fait ISING lui-même ; mais le résultat est décevant : il n'y a pas de transition ! On trouve en réalité $T_c = 0$. Ceci est un résultat général : les fluctuations thermiques seules n'induisent pas de transition de phase dans un système unidimensionnel. Pour les dimensionalités plus élevées, on n'a pu échapper à l'emploi de techniques approximatives pour essayer de résoudre le problème. Parmi celles-ci, l'approximation dite du « champ moyen » a connu une telle importance qu'il est nécessaire de s'y attarder un peu. Elle a été introduite par le physicien français P. WEISS dans la théorie du magnétisme dès 1907, avant même l'introduction du modèle d'ISING. Elle a ensuite été très élégamment généralisée par le physicien russe L. LANDAU en 1937. Décrivons brièvement cette méthode lorsqu'elle est appliquée au modèle d'ISING.

En observant la forme que prend l'énergie d'interaction entre les spins, on peut remarquer que tout se passe comme si un spin s_i était soumis à un champ magnétique local $J \sum_j s_j$ dû à tous

ses premiers voisins. L'approximation consiste à négliger les fluctuations de ce champ local et à le remplacer par un champ moyen obtenu en remplaçant toutes les variables s_j sur les sites voisins par leur valeur moyenne commune m . On est alors ramené au problème très simple de N spins indépendants dans un champ magnétique égal à :

$$h_m = v J m$$

où v est la « coordinence », c'est-à-dire le nombre des sites les plus proches voisins d'un site donné dans le réseau considéré. On évalue alors m en remarquant que la valeur moyenne d'un spin s dans un champ h_m s'écrit :

$$m = \frac{\sum_{s=\pm 1} s \exp(h_m s/k_B T)}{\sum_{s=\pm 1} \exp(h_m s/k_B T)}.$$

On obtient ainsi une équation autoconsistante pour m :

$$m = \text{th}(v J m/k_B T).$$

La notation th désigne la tangente hyperbolique :

$$\left(\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right).$$

On peut très simplement résoudre cette équation graphiquement en coupant la courbe $\tanh x$ par la droite $y = k_B T x / (v J)$. Si la température est supérieure à la température caractéristique :

$$T_c = v J / k_B$$

(qui correspond à la valeur de K , $K_c = 1/v$), la pente de la droite est supérieure à la pente à l'origine de la tangente hyperbolique et l'équation n'admet que la seule solution triviale $m = 0$. Par contre, si $T < T_c$, on trouve, en plus de $m = 0$, une solution non nulle $m \neq 0$ d'énergie plus faible. C'est donc la solution la plus stable qui donne une aimantation spontanée. En développant la tangente hyperbolique près de l'origine, on trouve aisément que pour T voisin de T_c , m se comporte comme :

$$m \sim (T_c - T)^{1/2}.$$

On trouve donc un exposant β égal à $1/2$. De même, en introduisant un champ externe (qui s'ajoute au champ moyen), on peut calculer la susceptibilité magnétique. On trouve que :

$$\chi \sim |T_c - T|^{-1}$$

soit $\gamma = 1$. L'exposant ν de la longueur de corrélation est plus délicat à calculer. Je n'en donnerais pas la dérivation. Moyennant des hypothèses complémentaires, on trouve que $\nu = 1/2$.

L'approximation du champ moyen prédit donc l'existence d'une transition et elle permet d'en calculer les exposants. Quelle ne fut pas la surprise lorsque le physicien norvégien-américain L. ONSAGER réussit, en 1944, à résoudre exactement le modèle d'ISING sur un réseau carré : il obtint alors des exposants, $\beta = 1/8$, $\gamma = 7/4$, $\nu = 1$ complètement différents de ceux prévus par la théorie de LANDAU !

Depuis, des solutions exactes ont été trouvées pour d'autres réseaux bidimensionnels, en particulier pour le réseau triangulaire dont nous allons parler plus loin, et elles conduisent aux mêmes exposants que ceux d'ONSAGER. Dans tous les autres cas, en particulier pour des réseaux réalistes tridimensionnels, on ne connaît pas, à ce jour, de solution exacte. La solution d'ONSAGER est tellement particulière qu'elle est difficilement généralisable aux dimensions supérieures. Elle constitue par contre un bon moyen de comparaison pour toutes les méthodes approchées.

Il est à noter que les exposants donnés par le champ moyen sont complètement indépendants de la dimension de l'espace d . On peut dire qu'ils sont caractéristiques de la méthode d'approximation et non pas du modèle considéré. L'erreur principale vient de ce que, en négligeant les fluctuations des spins voisins d'un spin donné, on « coupe » trop vite les corrélations

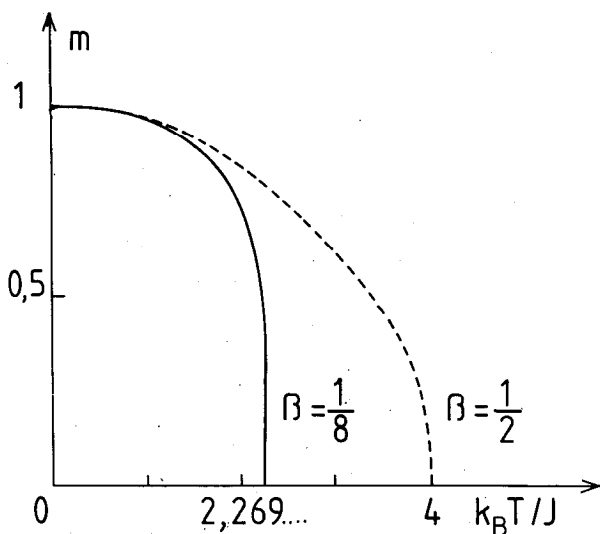


Fig. 1. — Allure de la variation du module de l'aimantation spontanée avec la température pour le modèle d'Ising bidimensionnel sur un réseau carré. L'approximation du champ moyen, indiquée en pointillé, donne une température critique et un exposant β trop élevés par rapport aux valeurs exactes de la théorie d'Onsager.

entre spins et on ne laisse pas diverger correctement la longueur de corrélation ξ . Il se trouve que l'approximation du champ moyen n'est justifiée qu'à très basse et très haute température. C'est précisément dans la région critique qu'elle est incorrecte.

Par la suite, d'autres méthodes approximatives plus précises ont été introduites. Citons la méthode du « développement de haute température » introduite par le physicien anglais C. DOMB. Elle consiste à développer les exponentielles en puissances successives de $1/T$. Pour une grandeur donnée, on identifie alors les termes successifs obtenus avec le comportement critique escompté. On peut alors estimer T_c et l'exposant de la grandeur étudiée. Le calcul des termes d'ordres élevés devient malheureusement très vite fastidieux. Non seulement cette méthode a été testée sur les résultats d'ONSAGER mais elle a permis aussi d'estimer les exposants du modèle d'ISING pour des réseaux tridimensionnels. Les résultats les plus précis connus vers 1970 au moment de la naissance du groupe de renormalisation étaient $\beta = 0,312$, $\gamma = 1,310$, $\nu = 0,638$ indépendants du réseau tridimensionnel considéré. Ces résultats sont intermédiaires entre les résultats d'ONSAGER et ceux du champ moyen. Il semble raisonnable de

penser que l'approximation du champ moyen devient de plus en plus valable quand la dimension augmente puisque les proches voisins d'un site donné deviennent de plus en plus nombreux et tendent à former une sorte d'écran. En fait, on a montré que l'approximation du champ moyen décrit correctement le comportement critique au-dessus d'une dimension caractéristique appelée dimension critique supérieure d_c . Pour le modèle d'ISING considéré ici $d_c = 4$.

INTRODUCTION SUR LE GROUPE DE RENORMALISATION.

On a vu que la difficulté principale pour décrire un système à l'état critique vient de ce que plusieurs échelles de longueurs interviennent dans le problème. La première idée fondamentale du groupe de renormalisation est de faire une investigation systématique des différentes longueurs en faisant des transformations d'échelle successives. Les transformations d'échelle qui sont, par ailleurs, une opération relativement courante en physique (équations aux dimensions, règles d'homogénéité...) avaient déjà été souvent utilisées dans la théorie des transitions de phases. Sans calculer directement les exposants, il avait été possible de dégager certaines relations entre eux. Même si le problème de thermodynamique statistique n'était pas résolu exactement, on pouvait ainsi dégager des idées physiques très utiles pour analyser le comportement critique de certaines grandeurs. Vers 1970, des chercheurs comme M. FISHER (Cornell University) ou P.-W. ANDERSON (Laboratoire de la Bell Telephone) avaient développé ces « lois d'échelles » de façon telle qu'on peut vraiment dire qu'ils étaient sur le point de découvrir le groupe de renormalisation.

Cependant, dans le groupe de renormalisation, la notion de transformation d'échelle s'accompagne d'une autre notion fondamentale, celle de « renormalisation ». A chaque transformation d'échelle, on s'efforce de redéfinir le système comme étant un système de même type que celui dont on est parti avec de nouveaux paramètres : les paramètres sont ainsi « renormalisés ». Ce processus de renormalisation des paramètres d'un système avait été déjà introduit dès 1940 en électrodynamique quantique, dans le but d'éliminer certaines divergences gênantes qui intervenaient lorsqu'on cherchait à définir théoriquement la charge de l'électron. De nombreux chercheurs avaient cherché à améliorer cette technique. En particulier M. GELL-MANN et F. LOW proposèrent, en 1950, une formulation assez générale de la renormalisation. Il n'est alors pas surprenant que ce soit Kenneth WILSON, un élève de GELL-MANN, puis collègue de M. FISHER à Cornell, qui ait le premier introduit la version définitive et moderne du groupe de renormalisation.

LA METHODE DES BLOCS DE SPINS.

Il existe de nombreuses façons de réaliser pratiquement l'opération de transformation d'échelle. Celle que je vais décrire ici est la méthode dite des « blocs de spins » basée sur une idée que L. KADANOFF (Université de Chicago) avait déjà introduite en 1965 (*). Cette méthode a le gros avantage d'être très illustrative et de bien montrer les principes de base du groupe de renorma-

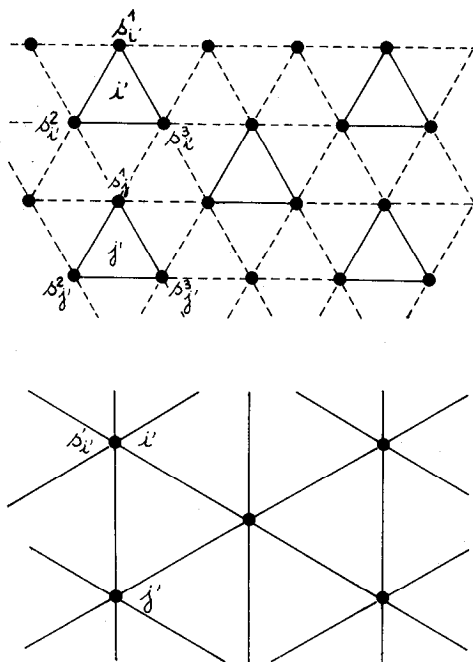


Fig. 2. — Blocs de spins formés sur le réseau plan triangulaire (en haut) et le réseau formé par les centres des blocs (en bas). L'opération de renormalisation consiste à réécrire les anciens termes de couplage entre les blocs, par exemple, le terme $K s_{i'}^1 (s_{i'}^2 + s_{i'}^3)$ entre les blocs i' et j' , pour obtenir des nouveaux termes du type $K' s_{i'}' s_{j'}'$, faisant intervenir les nouvelles variables de spins (attachées aux blocs). En divisant alors toutes les longueurs par $\sqrt{3}$ on revient à un réseau identique à celui de départ si ce n'est que la constante K est remplacée par K' .

(*) Une idée semblable avait été développée indépendamment par les physiciens russes A. PATASHINSKII et V. POKROVSKII, à peu près à la même époque.

lisation. Considérons très généralement un réseau de spins d'ISING à d dimensions. La transformation se fait en quatre temps : dans un premier temps, on regroupe les spins du réseau initial en « blocs de spins » adjacents de telle façon que les centres des blocs, repérés par de nouveaux indices i' , forment un nouveau réseau homothétique du réseau initial. Dans un deuxième temps, on se donne une règle pour définir une nouvelle variable de spins $s'_{i'}$ attachée à chaque bloc i' . Dans un troisième temps, on calcule les nouvelles constantes de couplages entre les nouveaux spins $s'_{i'}$. Cette opération, la plus délicate, n'est possible qu'en éliminant un certain nombre de degré de liberté « internes » qui décrivent les corrélations sur des échelles plus petites que la taille du bloc lui-même. Enfin, dans un quatrième temps, on retourne au réseau initial en divisant toutes les longueurs par le facteur de renormalisation $b = (n_s)^{1/d}$, où n_s est le nombre de spins dans un bloc. En définitive, on peut dire, de façon imagée, que les quatre opérations terminées, tout se passe comme si on regardait le système à travers des jumelles utilisées à l'envers : on distingue mieux ce qui se passe à grande distance dans l'échantillon mais des petits détails que l'on distinguait auparavant, à l'œil nu, peuvent alors nous échapper.

L'EXEMPLE DU RESEAU TRIANGULAIRE, REGLE DE MAJORITE.

Je vais maintenant considérer un exemple bidimensionnel qui a effectivement été développé par les physiciens hollandais Th. NIEMEIJER et J. VAN LEEUWEN en 1973. Il s'agit du réseau plan triangulaire représenté sur la fig. 2. Un bloc de spins i' est constitué de trois anciens spins que l'on dénote maintenant s_{i-1} , s_{i-2} , s_{i-3} selon les conventions de la figure. Le facteur de renormalisation vaut ici $b = \sqrt{3}$ (car $n_s = 3$, $d = 2$).

Une façon très simple de définir le spin du bloc $s'_{i'}$ est donnée par la « règle de majorité ». Le spin du bloc est $+1$ s'il y a une majorité de spins $+1$ dans le bloc, -1 sinon. A chaque valeur $+1$ ou -1 du nouveau spin $s'_{i'}$ correspond en fait quatre configurations possibles des anciens spins du bloc. Ces quatre configurations peuvent être repérées par une variable $\sigma_{i'}$, ou « degré de liberté interne », prenant conventionnellement les valeurs $\sigma_{i'} = 1, 2, 3, 4$ selon la convention donnée par le tableau 1. Les anciennes configurations peuvent alors être indifféremment repérées par l'ensemble des variables s_i ou par l'ensemble des couples de variables $(s'_{i'}, \sigma_{i'})$. Ainsi la quantité $\varepsilon(s) = -E(s)/(k_B T)$ définie précédemment peut s'exprimer en fonction des $(s'_{i'}, \sigma_{i'})$, ce que nous noterons $\varepsilon(s', \sigma)$.

En principe, on obtient les nouvelles constantes de couplage entre les nouveaux spins $s'_{i'}$ en écrivant que les probabilités des

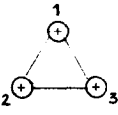
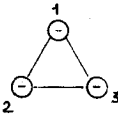
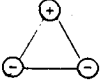
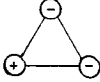
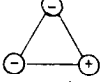
	$s_{i,1}^1 = +1$	$s_{i,1}^1 = -1$	en fonction de $s_{i,1}^1$	$p(\sigma_{i,1})$
$\sigma_{i,1} = 1$			$s_{i,1}^1 = s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^2 = s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^3 = s_{i,1}^1$	$\exp(+3K)$
$\sigma_{i,1} = 2$			$s_{i,1}^1 = -s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^2 = s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^3 = s_{i,1}^1$	$\exp(-K)$
$\sigma_{i,1} = 3$			$s_{i,1}^1 = s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^2 = -s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^3 = s_{i,1}^1$	$\exp(-K)$
$\sigma_{i,1} = 4$			$s_{i,1}^1 = s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^2 = s_{i,1}^1$ $s_{i,1}^3 = -s_{i,1}^1$	$\exp(-K)$

Tableau 1

Le degré de liberté interne $\sigma_{i,1} = 1, 2, 3, 4$ repère les quatre configurations qui correspondent aux mêmes valeurs de la variable $s_{i,1}^1$, nouvelle variable de spin attachée au bloc i' (deux premières colonnes). Les anciennes variables de spin $s_{i,1}^1, s_{i,1}^2, s_{i,1}^3$ sont données en fonction de $s_{i,1}^1$, pour chaque configuration (troisième colonne). En négligeant les couplages interbloqs, la probabilité de chaque configuration $p(\sigma_{i,1})$ est proportionnelle à $\exp \{ K (s_{i,1}^1 s_{i,1}^2 + s_{i,1}^2 s_{i,1}^3 + s_{i,1}^3 s_{i,1}^1) \}$ (quatrième colonne). On peut alors calculer la valeur moyenne de $s_{i,1}^1$ par $\bar{s}_{i,1}^1 = \sum_{\sigma_{i,1}} s_{i,1}^1 p(\sigma_{i,1}) / \sum_{\sigma_{i,1}} p(\sigma_{i,1})$ (ce calcul est utilisé dans l'appendice).

configurations des variables de blocs, $\exp \epsilon'(s')$, s'obtiennent en sommant les anciennes probabilités, $\exp \epsilon(s', \sigma)$ sur les degrés de libertés internes, que l'on efface ainsi :

$$\exp \epsilon'(s') = \sum_{\sigma} \exp \epsilon(s', \sigma).$$

Je rappelle que dans l'expression de $\epsilon(s)$, la constante de couplage J intervient toujours par son rapport avec $k_B T$, le couplage

réduit que nous avons noté $K = J/(k_B T)$. C'est cette variable sans dimension, seul paramètre physique du problème que l'on cherche ainsi à « renormaliser » en se servant de l'équation précédente. En essayant d'exprimer $\varepsilon'(s')$ sous une forme similaire à celle de $\varepsilon(s)$ mais avec un nouveau couplage réduit K' , on obtient ainsi une « équation de renormalisation » qui donne K' en fonction de K .

Cette renormalisation des constantes de couplages n'est pas une opération évidente. Elle ne peut généralement se faire qu'au prix de certaines approximations. Dans le cas du réseau triangulaire, nous montrons dans l'appendice, comment, au prix d'une approximation assez grossière, on peut exprimer K' en fonction de K sous la forme :

$$K' = 2K \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2$$

EQUATION DE RENORMALISATION, POINTS FIXES.

On obtient donc, après transformation d'échelle, un nouveau couplage réduit K' en fonction de l'ancien K sous forme d'une équation de renormalisation :

$$K' = R(K).$$

Le but principal de l'opération était de faire l'investigation systématique de toutes les échelles de longueurs du système ; la méthode du groupe de renormalisation consiste à itérer de multiples fois cette transformation en partant d'une valeur initiale $K^{(0)}$ correspondant effectivement au paramètre $J/k_B T$ du modèle que l'on cherche à étudier. On obtient ainsi une séquence de valeurs $K^{(n)}$, telles que :

$$K^{(n+1)} = R(K^{(n)}).$$

Il est intéressant d'observer comment les $K^{(n)}$ évoluent au cours des itérations. On peut aisément s'en rendre compte sur la fig. 3 où nous avons tracé la courbe $K' = R(K)$ correspondant exactement à la forme explicite du paragraphe précédent. Cette courbe coupe la première bissectrice en une valeur que nous noterons K_c , différente de zéro. Si la valeur initiale $K^{(0)}$ est choisie inférieure à K_c , on observe que $K^{(n)}$ tend irrémédiablement vers la valeur $K = 0$ qui constitue ce que l'on appelle un « point fixe stable » de la transformation. Donc pour $K^{(0)} < K_c$ le système est équivalent, après de nombreuses renormalisations, à un système à couplages nuls (ou à température infinie), c'est-à-dire un système paramagnétique parfait où tous les spins seraient indépendants. Par contre, si la valeur initiale $K^{(0)}$ est choisie supérieure à K_c , $K^{(n)}$ tend vers un second point fixe stable $K = \infty$. Cette fois-ci, le

système devient équivalent à un système à couplages infinis (ou à température nulle), c'est-à-dire un système ferromagnétique parfait où tous les spins seraient alignés.

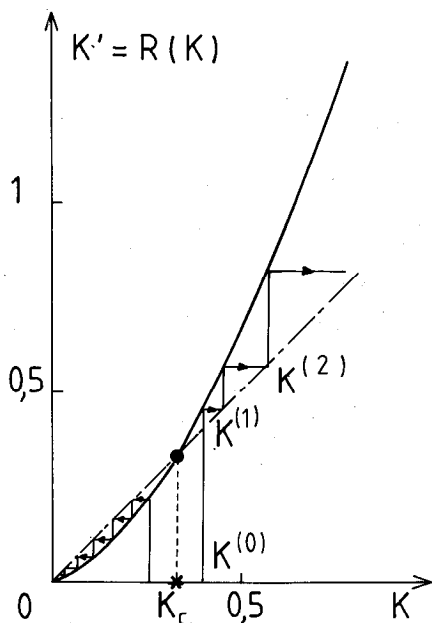


Fig. 3. — Courbe donnant K' en fonction de K .

Si la valeur initiale est choisie juste égale à K_c , $K^{(n)}$ reste égal à lui-même au cours des itérations, le comportement du système semble alors indépendant de l'échelle de longueur à laquelle on le regarde. K_c est un autre point fixe de la transformation de renormalisation. Il est dit « instable » car si on part d'une valeur voisine, on s'éloignera de lui au cours des itérations. Alors que les points fixes stables caractérisent les deux phases, le point fixe instable $K^* = K_c$ caractérise ici le point de transition (fig. 4).

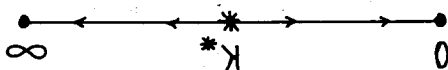


Fig. 4. — Structure des points fixes et trajectoires dans le cas où il n'y a qu'un paramètre K . La transition de phase est caractérisée par un point fixe instable $K^* = K_c$ entouré de deux points fixes stables, ici $K = 0$ et $K = \infty$, caractérisant les deux phases.

Dans l'exemple du réseau triangulaire, on trouve numériquement :

$$K_c = 0,3356... \text{ soit } T_c = 2,980 \text{ J/k}_B.$$

Dans le cas du réseau triangulaire, il existe une valeur exacte pour T_c , obtenu par un calcul similaire à celui de ONSAGER, et qui vaut $T_c = (4/\text{Log } 3) \text{ J/k}_B = 3,641 \text{ J/k}_B$. Bien que différente de sa valeur exacte, l'estimation de T_c que nous avons obtenue par la méthode du groupe de renormalisation est nettement meilleure que celle donnée par l'approximation du champ moyen $T_c = \nu \text{ J/k}_B = 6 \text{ J/k}_B$ (la coordinnence est $\nu = 6$ pour le réseau triangulaire). Il est tout à fait normal que l'on ne retrouve pas la valeur exacte si on considère l'approximation faite dans l'appendice pour dériver $K' = R(K)$.

VOISINAGE DU POINT FIXE INSTABLE, EXPOSANTS CRITIQUES.

Bien que $K^{(n)}$ tende toujours vers un point fixe stable (sauf si $K^{(0)} = K_c$, strictement) son comportement dépend beaucoup de $K^{(0)}$. Si $K^{(0)}$ est choisi très voisin de $K^* = K_c$, c'est-à-dire si le système étudié est dans un « état critique » (T voisin de T_c), $K^{(n)}$ reste très longtemps dans le voisinage du point fixe instable avant de s'en éloigner. Ce comportement est illustré par la fig. 5. On peut montrer que les exposants critiques sont directement reliés au comportement local de la transformation $K' = R(K)$ près du point fixe instable, c'est-à-dire, plus précisément, à la

pende $\left(\frac{\partial K'}{\partial K} \right)_{K=K^*}$ de la courbe $K' = R(K)$ en $K = K^*$.

Montrons, par exemple, comment on peut calculer l'exposant ν de la longueur de corrélation dans notre exemple. En utilisant la variable K au lieu de la variable T , l'exposant ν peut être défini par :

$$\xi \sim (K - K_c)^{-\nu} \sim (\delta K)^{-\nu}.$$

Après une transformation d'échelle, les longueurs du système sont divisées par $b = \sqrt{3}$; en particulier pour la longueur de corrélation :

$$\xi' = \xi/b.$$

Simultanément K se transforme en K' , tel que $K' = R(K)$. En supposant que K et K' sont proches de K^* , on peut encore écrire, en « linéarisant » près du point fixe :

$$\delta K' = K' - K_c \simeq \left(\frac{\partial K'}{\partial K} \right)_{K=K^*} \delta K.$$

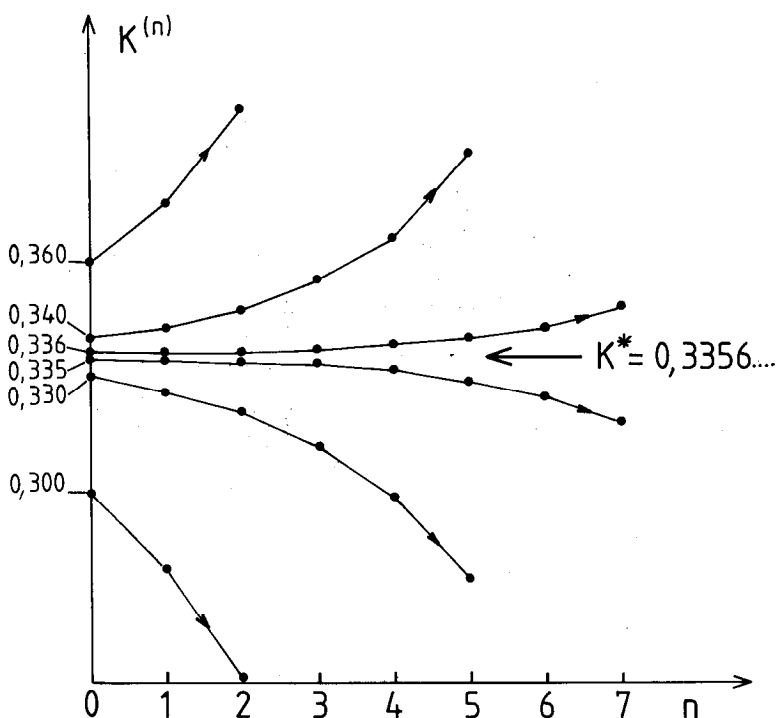


Fig. 5. — Evolution du couplage $K^{(n)}$ au cours des itérations. Si $K^{(0)}$ est choisi très proche du point fixe K^* , les valeurs de $K^{(n)}$ restent très longtemps voisines de K^* avant de s'en éloigner.

Or, dans le nouveau système, après renormalisation, on a encore :

$$\xi' \sim (\delta K')^{-\nu}.$$

On déduit alors :

$$\frac{1}{b} = \left[\left(\frac{\delta K'}{\delta K} \right)_{K=K^*} \right]^{-\nu}$$

soit encore :

$$\nu = \text{Log } b / \text{Log} \left[\left(\frac{\delta K'}{\delta K} \right)_{K=K^*} \right]$$

Dans l'exemple étudié, on a numériquement :

$$\left(\frac{\delta K'}{\delta K} \right)_{K=K^*} = 1,634...$$

ce qui donne : $\nu = 1,12...$ Cette valeur est nettement plus proche de la valeur exacte ($\nu = 1$) que de la valeur donnée par l'approximation du champ moyen ($\nu = 1/2$). Les autres exposants pourraient se calculer par des raisonnements du même type.

Sur cet exemple typique du modèle d'ISING sur un réseau plan triangulaire, nous avons pu voir les avantages de la méthode du groupe de renormalisation. En particulier, moyennant une approximation apparemment grossière (voir l'appendice), on a pu obtenir des résultats numériques nettement meilleurs que ceux donnés par l'approximation du champ moyen. D'autre part, il apparaît que les exposants ne sont pas indépendants de l'approximation faite et on conçoit aisément que l'on puisse améliorer les résultats : il suffit, par exemple, d'aller plus loin dans le développement en cumulants décrit dans l'appendice. Mais on peut aussi envisager d'autres façons de procéder : considérer des blocs plus gros, ou encore imaginer d'autres façons d'éliminer les degrés de liberté internes. De fait, il se trouve que ces extensions améliorent nettement la valeur des exposants obtenus. On peut ainsi obtenir des valeurs compétitives avec celles déduites des méthodes de développement en série de haute température. Mais, au-dessus de tout, je pense que l'intérêt principal de cette méthode est son caractère très « physique », en ce sens qu'elle permet de bien visualiser les caractéristiques essentielles d'une transition de phase de seconde espèce. En particulier dans la région critique, lorsque T est proche de T_c , on « sent » que la longueur de corrélation devient très grande par le fait même qu'il est nécessaire d'effectuer un plus grand nombre d'itérations pour s'éloigner du point fixe instable.

GENERALISATION : ESPACE DES PARAMETRES, SURFACES CRITIQUES, UNIVERSALITE.

Jusqu'à présent je n'avais choisi, volontairement, qu'un exemple très simple où l'état du système physique étudié n'était décrit que par un seul paramètre, K . Dans la plupart des modèles, l'état du système est déterminé par plusieurs variables $K_1, K_2, \dots$. On définit ainsi un « espace des paramètres » où l'état d'un système est déterminé par un point K extrémité du vecteur des composantes $K_1, K_2, \dots$. Ces paramètres peuvent exister dans le modèle de départ, mais ils peuvent tout aussi bien être générés par la méthode de renormalisation elle-même. Ainsi, dans l'exemple que nous avons traité dans l'appendice, on aurait pu voir qu'en développant au second ordre, on aurait immédiatement généré des nouveaux termes d'interactions entre seconds voisins et même entre troisièmes voisins. En général, la renormalisation est une transformation qui, à un point K , fait correspondre un autre point K' de l'espace des paramètres. Le produit de deux

transformations est bien défini ; c'est pourquoi on a introduit l'expression « groupe de renormalisation » par référence à la notion de « groupe » en mathématique.

Dans l'espace des paramètres, les différentes phases occupent différentes régions de l'espace séparées les unes des autres par des « surfaces critiques ». Le terme « surface » est employé ici dans une acception générale, il s'agit en fait de ligne dans un espace à deux dimensions, de surface dans un espace à trois dimensions, etc. On obtient une transition de phase lorsque les paramètres du système varient de telle façon que le point K se déplace sur une « ligne physique » qui traverse la surface critique en un point K_c , le point critique. Si on considère un système décrit par un point $K^{(0)}$ de la ligne physique non situé sur la surface critique, les points $K^{(n)}$ obtenus après renormalisations

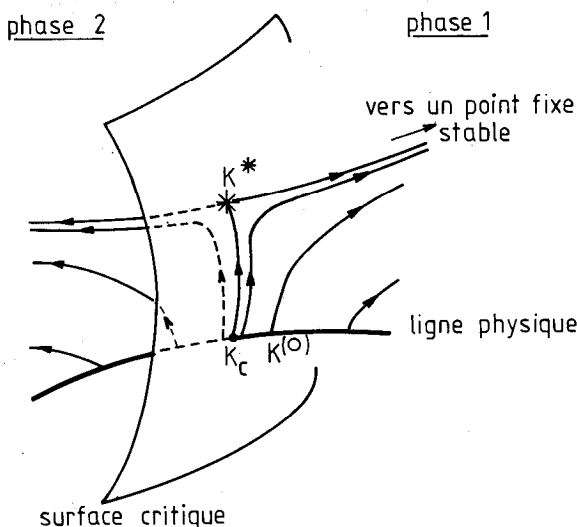


Fig. 6. — L'état d'un système est très généralement représenté par un point K dans « l'espace des paramètres » (K est l'extrémité d'un vecteur dont les composantes sont les divers paramètres $K_1, K_2, \dots$ décrivant le système). Ici, dans un espace de paramètres à trois dimensions, deux phases (1) et (2) sont séparées par une « surface critique ». Une transition de phase se produit lorsque les paramètres varient de telle façon que le point K décrive une « ligne physique » qui traverse la surface critique au point de transition K_c . Si l'état du système est décrit par un point $K^{(0)}$, très voisin de K_c , sur la ligne physique, la trajectoire des points $K^{(n)}$, obtenue après renormalisations successives, passe dans le voisinage du point fixe K^* avant de se diriger vers un point fixe stable.

successives suivent des trajectoires dans l'espace des paramètres qui se terminent en des points fixes stables qui caractérisent les phases. Par contre, si $K^{(o)}$ se trouve sur la surface critique, les points $K^{(n)}$ suivent une trajectoire, entièrement contenue dans la surface critique, qui se termine en un point fixe plus important K^* . Ce point fixe est stable dans la direction de la trajectoire que nous venons de décrire mais il est en général instable pour un déplacement perpendiculaire à la surface critique. La figure montre l'allure des trajectoires lorsque $K^{(o)}$ est voisin de K_c sur la ligne physique. La trajectoire passe dans le voisinage de K^* avant de s'éloigner vers le point fixe stable. La linéarisation de la transformation de renormalisation près de K^* pour un déplacement perpendiculaire à la surface permettrait de calculer les exposants critiques.

Lorsqu'on a pu dériver une équation de renormalisation pour un problème donné, il est donc essentiel d'étudier les différents points fixes, leurs stabilités respectives et de linéariser la transformation autour de ces points fixes. A part les points fixes triviaux qui sont stables dans toutes les directions de l'espace, les autres points fixes peuvent être stables dans certaines directions, instables dans d'autres. Les variables physiques (en général fonction de $K_1, K_2, \dots$) qui décrivent un déplacement le long d'une direction de stabilité, sont dites « irrelevantes ». Dans le cas contraire, elles sont dites « relevantes ». Ainsi, dans la figure ci-après, un déplacement le long de la surface critique correspond à la variation d'une variable irrelevante alors qu'un déplacement perpendiculaire à la surface correspond à la variation d'une variable relevante.

Les variables irrelevantes n'ont aucune influence sur la valeur des différents exposants. Ainsi, dans l'exemple de la figure, quelque soit la ligne physique traversant la surface critique, on observera une transition caractérisée par le même point fixe K^* , donc par les mêmes exposants. On dit que l'ensemble de ces transitions appartiennent à la même « classe d'universalité ».

On comprend alors toute la puissance du groupe de renormalisation qui a permis de classer des transitions de phases de natures apparemment complètement différentes en certaines catégories plus simples, uniquement caractérisées par la nature de leur point fixe. En éliminant les variables irrelevantes, on peut dégager les variables importantes (relevantes) qui jouent le même rôle essentiel dans les différents systèmes. Une classe d'universalité contient toutes sortes de systèmes physiques qui ont un comportement identique près de leurs points critiques.

LE MODELE VECTORIEL A n COMPOSANTES.

Le modèle de l'ISING, que j'avais introduit au début de cet article est, en réalité, un cas particulier d'un modèle plus général :

le modèle vectoriel à n composantes qui considère les spins comme des vecteurs classiques à n composantes, c'est-à-dire évoluant dans un espace à n dimensions. n peut être différente de la dimension d'espace d du réseau. Le cas $n = 1$ correspond au modèle d'ISING qui est bien adapté à l'étude des substances magnétiques dans lesquelles il existe une anisotropie locale (due à la nature de la structure cristalline, à l'intensité relative des couplages dans les différentes directions...) qui incite les moments individuels à l'aligner le long d'une direction privilégiée, appelée axe de facile aimantation. Le cas $n = 2$, correspond au modèle XY, ou modèle « planaire » car il correspond à une anisotropie particulière où il y a, cette fois, tout un plan de facile aimantation. Enfin, le cas $n = 3$ correspond au modèle isotrope d'HEISENBERG. Mais ce modèle, très général, n'est pas limité à la description des substances magnétiques. On a constaté qu'il pourrait s'appliquer à de nombreuses autres transitions de phase. Par exemple, un fluide, au voisinage du point critique, est très bien décrit par le modèle d'ISING à trois dimensions ($n = 1$, $d = 3$). Dans le cas d'un fluide, c'est la différence de volumes massiques entre le liquide et le gaz qui joue le même rôle que l'aimantation du modèle d'ISING. Tout comme l'aimantation, cette différence s'annule à la température critique. On a ainsi défini ce que l'on appelle le « paramètre d'ordre » du système. Plus généralement, le modèle vectoriel à n composantes s'applique à de nombreux systèmes où le paramètre d'ordre évolue dans un espace à n dimensions. Dans le cas d'un fluide, la différence des volumes massiques est une grandeur scalaire, c'est pourquoi $n = 1$.

FISHER et WILSON ont entrepris, dans les années 1970, une étude systématique du modèle vectoriel à n composantes par le groupe de renormalisation. Leur méthode d'approche, entièrement analytique, est complètement différente de celles des blocs qui, elle, contient le plus souvent un aspect numérique. Nous ne la décrivons pas ici, car son caractère formel se prête peu à la vulgarisation. Il faut cependant savoir que cette méthode d'approche est très féconde et complète très bien les méthodes de blocs. A propos du modèle vectoriel à n composantes, FISHER et WILSON ont émis l'« hypothèse d'universalité » qui postule que les exposants critiques ne dépendent que de d et de n et non pas des autres détails. En particulier, la nature du réseau n'intervient pas pourvu que sa dimension d'espace, d , reste la même. Les différentes classes d'universalité du modèle vectoriel à n composantes sont répertoriées dans le tableau 2.

Une classe d'universalité particulièrement riche est la classe $n = 1$, $d = 3$ qui, non seulement contient les aimants uniaxes et les fluides, mais encore les mélanges de liquides (la transition dite de « démixtion ») et de solides (la transition « ordre-désordre »

Tableau 2

Classe d'universalité		Modèle théorique	Système physique
$d = 2$	$n = 1$	Modèle d'Ising à deux dimensions	Films adsorbés
	$n = 2$	Modèle XY à deux dimensions	Films d'Hélium 4 superfluide
	$n = 3$	Modèle d'Heisenberg à deux dimensions	
$d = 3$	$n = 0$	Marche au hasard sans croisement	Configuration de polymères
	$n = 1$	Modèle d'Ising à trois dimensions	Aimant uniaxe
			Fluide au voisinage du point critique
			Mélange de liquides près d'une démixtion
			Alliage près d'une transition ordre-désordre
	$n = 2$	Modèle X Y à trois dimensions	Aimant planaire
			Hélium 4 près de la transition superfluide
	$n = 3$	Modèle d'Heisenberg à trois dimensions	Aimant isotrope
$d > 2$	$n \rightarrow \infty$	Modèle sphérique	

Classes d'universalité du modèle vectoriel à n composantes.

dans les alliages). Dans ces deux derniers cas, le paramètre d'ordre est la différence de concentrations entre les deux constituants.

Il est amusant de noter que dans la théorie de FISHER et WILSON, les paramètres n et d apparaissent comme de simples variables dans des formules et qu'il n'est donc pas interdit *a priori* de les faire varier continûment au lieu de les cantonner aux valeurs entières positives. Mais ce qui est encore plus intéressant, c'est que les classes d'équivalences correspondant à de telles valeurs peuvent décrire des systèmes physiques réels. Ainsi, P.-G. de GENNES (professeur au Collège de France) a montré que

l'étude statistique de la configuration des chaînes polymériques se range dans une classe d'universalité où $n = 0$. Très récemment, P. PFEUTY (Physique des Solides, Orsay) a montré que la bonne vieille transition de polymérisation du soufre appartient aussi à cette classe $n = 0$. Dans ce cas, $n = 0$, l'étude statistique se ramène au problème de la marche au hasard à d dimensions sans retour au même point. Ce problème est bien illustré, à $d = 2$, par l'exemple d'un ivrogne dont les directions des pas successifs seraient complètement au hasard. Dans ce cas, il faut tout de même supposer qu'il n'est pas complètement ivre pour pouvoir reconnaître les endroits où il est déjà passé et s'interdire d'y passer à nouveau.

On a même imaginé des modèles où n peut être négatif ! Il faut noter que l'interprétation physique d'un vecteur possédant un nombre négatif de composantes n'est vraiment pas très claire du tout ! Un autre modèle intéressant est le « modèle sphérique » obtenu en passant à la limite où n tend vers l'infini. Ce modèle a été résolu exactement et il constitue un bon test pour les méthodes approchées.

Lorsque la dimension d devient supérieure à 4 on retrouve les exposants du champ moyen. La méthode de groupe de renormalisation s'applique particulièrement bien à $d = 4$ car elle conduit dans ce cas à des développements exacts qui permettent de retrouver, sous une autre forme, la théorie de LANDAU. FISHER et WILSON ont alors imaginé une méthode très originale, le « développement en ϵ ». Elle consiste à remplacer d par $4 - \epsilon$ où ϵ est supposé petit. On peut alors estimer les différents exposants critiques sous forme de développements limités en ϵ . Cette méthode, très intéressante, constitue un prolongement naturel de la théorie de LANDAU en ce sens qu'elle montre comment les exposants tendent vers les exposants du champ moyen quand d tend vers 4. Il est aussi intéressant de constater que les résultats obtenus en se limitant à quelques termes du développement ne sont pas ridicules, même lorsque l'on pose $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = 2$!

Pour en terminer avec le modèle vectoriel à n composantes, je voudrais signaler des calculs plus récents, faits dans le cas $n = 2$, $d = 2$. Cette classe d'universalité avait toujours posé des problèmes très particuliers car il avait été montré qu'aucun ordre à longue distance ne pouvait exister à basses températures. Des calculs, utilisant le groupe de renormalisation, faits par J. KOSTERLITZ (Université de Birmingham) et D. THOULESS (Université de Yale), ont mis en évidence une transition de phase d'un type entièrement nouveau correspondant à toute une « ligne de points fixes » pour T compris entre 0 et T_c . Dans ce cas, la susceptibilité reste infinie dans toute la phase située en dessous de la température critique, alors que le paramètre d'ordre habituel

reste nul. Les prédictions de ces chercheurs ont été complètement vérifiées par des expériences faites par la suite sur des films minces d'hélium 4 superfluide, système qui appartient aussi à la classe d'universalité $n = 2$, $d = 2$.

AUTRES DOMAINES D'APPLICATION.

Si l'étude des transitions de phase a été un des domaines d'application privilégiés du groupe de renormalisation, de nombreux autres problèmes importants, ayant un rapport plus ou moins éloigné avec la théorie des transitions de phase, ont été abordés, souvent avec succès, par cette nouvelle technique.

Entre autres, signalons les problèmes de « percolation », de « turbulence », de « localisation ». Un cas typique de percolation est l'exemple du ruissellement d'un liquide à travers un solide poreux : il s'agit de savoir à partir de quelle concentration de liquide le ruissellement commence à se produire. La turbulence est un phénomène qui apparaît lorsque la vitesse d'écoulement d'un fluide devient supérieure à un seuil critique. La localisation est une propriété électronique observée dans certains alliages métalliques désordonnés ; le matériau peut perdre ses propriétés de conduction électrique lorsque le désordre devient trop important. On peut encore, dans une certaine mesure, considérer que dans ces trois exemples il s'agit de transitions de phases où le rôle de la température serait respectivement tenu par la concentration, la vitesse d'écoulement, l'intensité du désordre.

Dans un tout autre domaine, WILSON lui-même a fortement développé l'application du groupe de renormalisation au problème du confinement des « quarks ». Cette étude de théorie quantique des champs fait appel à des modèles microscopiques, les modèles de jagues, beaucoup plus complexes que le modèle d'ISING. WILSON a simplifié le problème en considérant que les quarks occupaient les sites d'un réseau à quatre dimensions dans l'espace-temps. A l'occasion de cette étude, WILSON n'a pas hésité à pousser les ordinateurs aux limites de leurs possibilités !

Un autre exemple est l'« effet KONDO » qui est resté une énigme pendant près de quarante ans pour les théoriciens de physique du solide. Il s'agit de propriétés anormales observées, à basses températures, dans des métaux non-magnétiques, tel le cuivre, lorsqu'on y dissout des atomes magnétiques en très faible concentration. Tout se passe comme si le moment magnétique porté par chaque impureté était « écranté » par tous les moments magnétiques individuels des électrons de conduction de la matrice. Cet écran, constitué par l'ensemble des électrons de l'échantillon, s'étend sur toutes les échelles de longueurs. Là encore, le groupe de renormalisation s'applique particulièrement

bien. En développant une technique numérique très puissante, on peut dire que WILSON a résolu, pour la première fois, ce problème en 1974. Sa solution numérique a été très récemment confirmée par une théorie analytique exacte.

Ma contribution personnelle a été d'étudier une extension de modèle de KONDO, le modèle du « réseau KONDO » où il y a cette fois une impureté magnétique par site. Ce modèle a été introduit pour interpréter les propriétés anormales de certains composés de cérium. A ce propos, j'ai développé une méthode de blocs, similaire à celle de KADANOFF, capable de construire, de façon itérative et approchée, l'état fondamental d'un système quantique complexe. Avec des collaborateurs, j'ai ensuite appliqué cette technique à un certain nombre de modèles quantiques. Dans ces modèles, le caractère quantique des variables complique sérieusement le problème. Un spin, par exemple, n'est plus considéré comme un vecteur classique, comme dans le modèle vectoriel à n composantes. On doit tenir compte des relations de commutation entre les diverses composantes. La différence essentielle entre les systèmes quantiques et les systèmes classiques est que, déjà au zéro absolu, des fluctuations de nature essentiellement quantique (dues au principe d'incertitude) apparaissent. Ces systèmes peuvent présenter des transitions intéressantes dans le fondamental lorsque l'on fait varier certains paramètres. Ces transitions sont souvent comparables aux transitions de phase en température des systèmes classiques et quelquefois des équivalences exactes entre systèmes quantiques et systèmes classiques (de dimensionalité plus élevée) existent. De ce fait, l'étude de ces transitions présente un intérêt non seulement pour l'étude des systèmes quantiques eux-mêmes, mais aussi, indirectement, pour l'étude thermique des systèmes classiques équivalents.

CONCLUSION.

Pour conclure, j'aimerais insister sur le fait que la genèse, la naissance et le développement du groupe de renormalisation ont été l'œuvre de plusieurs chercheurs scientifiques venant d'horizons différents. C'est peut-être un signe des temps que toute découverte en physique est maintenant rarement le résultat de travaux d'un chercheurs solitaire, fût-il un génie, mais plutôt le résultat d'un effort collectif. Pour cette raison, il est dommage, à mon avis, que le prix Nobel n'ait été attribué qu'à WILSON seul. J'estime que FISHER et KADANOFF auraient dû y être associés. Je pense cependant que s'il fallait, pour une raison que j'ignore, choisir un seul nom, celui de WILSON a été un très bon choix. C'est lui qui, ayant fait une véritable synthèse entre des éléments venus de la théorie de l'électrodynamique quantique

et de la théorie de la matière condensée, a su le premier, dans ses travaux fondamentaux de 1971, formuler la version « moderne » du groupe de renormalisation. Il a pu ainsi révéler toutes les potentialités de cette nouvelle méthode de la physique moderne.

APPENDICE

Très généralement, la nouvelle énergie réduite $\epsilon'(s)$ s'obtient en fonction de l'ancienne en éliminant les degrés de liberté internes σ :

$$\exp \epsilon'(s') = \sum_{\sigma} \exp \epsilon(s', \sigma)$$

Il s'agit, au moyen de cette équation, d'exprimer ϵ' en fonction des nouveaux spins s'_i , sous une forme analogue à celle que prend $\epsilon(s)$ en fonction des anciens spins s_i pour pouvoir obtenir ainsi les nouvelles constantes de couplage.

La méthode consiste à décomposer $\epsilon(s', \sigma)$ en deux parties, une partie « intrabloc » $\epsilon^0(s', \sigma)$ ne contenant que les termes de couplages internes aux blocs (traits pleins sur la fig. 2) et une partie « interbloc » $\epsilon^1(s', \sigma)$ contenant les termes de couplage entre les blocs adjacents (traits pointillés sur la fig. 2) :

$$\epsilon(s', \sigma) = \epsilon^0(s', \sigma) + \epsilon^1(s', \sigma)$$

$\epsilon^0(s', \sigma)$ est une somme sur tous les blocs de termes du type :

$$K (s_i^1 s_i^2 + s_i^2 s_i^3 + s_i^3 s_i^1)$$

alors que $\epsilon^1(s', \sigma)$ est une somme sur tous les couples de blocs adjacents i', j' (c'est-à-dire les liaisons du réseau renormalisé) de termes du type :

$$K (s_i^2 + s_i^3) s_j^1.$$

L'approximation consiste à supposer que la partie ϵ^1 est plus faible que la partie ϵ^0 . On traite alors ϵ^1 comme une « perturbation ». Définissons alors une moyenne partielle notée $\langle \dots \rangle_0$

qui consiste à ne moyenner que sur les termes d'énergie intra-blocs :

$$\langle A \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \sum_{\sigma} A(s', \sigma) \exp \epsilon^0(s', \sigma)$$

avec :
$$Z_0 = \sum_{\sigma} \exp \epsilon^0(s', \sigma).$$

L'équation donnant $\epsilon'(s')$ peut encore s'écrire :

$$\exp \epsilon'(s') = Z_0 \langle \exp \epsilon^1(s', \sigma) \rangle_0.$$

On développe alors la moyenne de l'exponentielle en série de puissances successives de ϵ^1 . Cette façon de faire conduit à un développement en « cumulants » (les cumulants sont des expressions faisant intervenir des moyennes sur les puissances successives de la perturbation) :

$$\langle \exp \epsilon^1 \rangle_0 = \exp \left\{ \langle \epsilon^1 \rangle_0 + \frac{1}{2} [\langle (\epsilon^1)^2 \rangle_0 - (\langle \epsilon^1 \rangle_0)^2] + \dots \right\}$$

Nous allons nous limiter ici à l'approximation du premier ordre qui consiste à assimiler la moyenne d'une exponentielle à l'exponentielle d'une moyenne :

$$\langle \exp \epsilon^1 \rangle_0 \simeq \exp \langle \epsilon^1 \rangle_0.$$

Compte tenu de cette approximation, on obtient :

$$\epsilon'(s') = \text{Log } Z_0 + \langle \epsilon^1 \rangle_0.$$

Le premier terme est une simple constante indépendante des s'_i , alors que le second terme est une moyenne sur les degrés de libertés internes aux blocs de termes du type :

$$K (s_i^2 + s_i^3) s_j^1.$$

Les moyennes sur les différents blocs étant indépendantes les unes des autres, on obtient :

$$\epsilon'(s') = \text{Log } Z_0 + 2K \sum_{\langle i' j' \rangle} \bar{s}_{i'}^1 \bar{s}_{j'}^1$$

où $\bar{s}_{i'}^1$ (égal à $\bar{s}_{i'}^2$ et $\bar{s}_{i'}^3$) est la moyenne d'une ancienne variable de spin sur les quatre configurations internes du bloc auquel elle appartient. Au moyen du tableau 1, on peut vérifier que :

$$\bar{s}_{i'}^1 = \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} s_{i'}^1.$$

On voit alors que, à une constante près, $\epsilon'(s')$ se met sous une forme analogue à $\epsilon(s)$:

$$\varepsilon'(s') = \text{Log } Z_0 + K' \sum_{\langle i' j' \rangle} s'_{i'} s'_{j'}$$

avec :

$$K' = 2K \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2$$

A propos de ce calcul, j'aimerais faire quelques remarques :

- La constante additive $\text{Log } Z_0$ redéfinit le zéro des énergies à chaque itération. Elle pourrait être conservée pour calculer l'énergie du système et par cela même la chaleur spécifique et son exposant.
- Il est tout à fait fortuit que $\varepsilon'(s')$ se mette exactement sous la même forme que $\varepsilon(s)$. Il aurait suffi de pousser plus loin le développement en cumulants pour trouver des termes de couplage plus compliqués entre second et troisième voisins.
- Cette façon de procéder n'est qu'une méthode parmi d'autres. J'ai choisi de la décrire ici à cause de son intérêt « historique ». Elle constitue un bon exemple des méthodes du groupe de renormalisation dans l'espace réel.

Bibliographie.

Je me suis, en partie, inspiré d'un excellent article de vulgarisation, signé de K.-G. WILSON lui-même, paru dans la revue « Scientific American ». On peut en trouver la version française sous le titre « Les phénomènes de physique et les échelles de longueurs » dans la revue « Pour la Science », numéro d'octobre 1979.

Pour une approche élémentaire de la notion d'exposant critique et de transition de phase, on peut se reporter au problème d'agrégation 1977 qui portait entièrement sur ce sujet.

Pour ceux qui veulent en savoir plus sur les phénomènes critiques, je conseille le livre de N. BOCCARA « La physique des transitions » édité aux Presses Universitaires de France, ainsi que le livre important, spécialisé sur le groupe de renormalisation par G. TOULOUSE et P. PFEUTY, « Introduction au groupe de renormalisation et à ses applications », édité aux Presses Universitaires de Grenoble.

Il est paru de nombreux articles de revue sur le groupe de renormalisation dans les journaux scientifiques internationaux, mais la plupart sont en langue anglaise. J'ai personnellement rédigé un article de revue en français intitulé « Transitions de phases à $T = 0$ dans les systèmes quantiques par le groupe

de renormalisation dans l'espace réel », paru au Journal Canadien de Physique, n° 59, page 605, en 1981.

Enfin, pour les curieux qui aimeraient avoir plus de détails sur l'exemple que j'ai choisi de traiter dans cet article, je donne la référence de l'article de Th. NIEMEIJER et J. VAN LEEUWEN : « Wilson theory for 2-dimentional Ising spin systems », paru dans la revue hollandaise « Physica » volume 71, page 17 en 1974.

Remerciements.

Lors de la rédaction de cet article, j'ai bénéficié des remarques de plusieurs collègues chercheurs en particulier Pierre PFEUTY, Robert BOTET et Max KOLB, que je remercie ici. Le manuscrit a été entièrement relu par M. l'Inspecteur Général Hubert GRÉ qui a bien voulu me faire part de plusieurs remarques pertinentes. Je lui en suis vraiment très reconnaissant. Je remercie aussi mon ami Georges SAUVAGE, professeur de classes préparatoires, qui m'a donné quelques conseils utiles. Enfin je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon père, Maurice JULLIEN, non scientifique, qui a bien voulu me donner les impressions d'un « béotien ».
