

Yoyo, calculatrice programmable et conservation de l'énergie

par Etienne DESCHAUX,
Professeur honoraire L.T.E. Voiron,
Saint-Blaise-du-Buis, 38140 Rives.

1. DESCRIPTION DU YOYO (voir fig. 1).

Le yoyo est une espèce de toupie (à axe horizontal) qui fit fureur pendant les années 30.

Pour ceux qui n'ont pas connu ce jouet, en voici une brève description : il est constitué de deux disques, généralement en bois, calés sur le même axe horizontal et laissant entre eux une gorge étroite où s'enroule une ficelle.

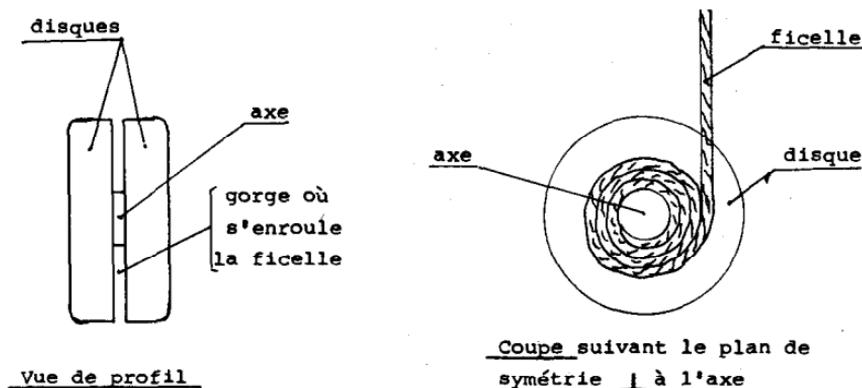


Fig. 1

On tient la ficelle à la main et on lâche le yoyo qui, évidemment, tombe en tournant autour de son axe. Quand il arrive au bas de sa course, l'énergie cinétique de rotation provoque l'enroulement de la ficelle en sens inverse et le yoyo remonte.

Moyennant une légère impulsion au moment convenable, on réussit à entretenir l'oscillation qui ressemble à celle d'une masse pendue à un ressort.

2. RESUME DE L'ARTICLE.

Si l'on essaie de « mettre en équation » le mouvement du yoyo, on se heurte à une difficulté due à ce que le rayon d'enroule-

ment de la ficelle décroît au fur et à mesure que l'appareil descend. On est conduit à une équation différentielle que l'on ne sait pas intégrer.

C'est, me semble-t-il, une occasion intéressante de montrer à des élèves, dont beaucoup sont de futurs techniciens, que la partie n'est pas perdue pour autant et que l'on peut très facilement, à l'aide d'une calculatrice programmable, réaliser une intégration pas à pas qui conduit à une solution (d'autant plus satisfaisante que le pas sera choisi plus petit).

L'article décrit enfin une méthode expérimentale qui permet de mesurer, à intervalles de temps réguliers, l'altitude y et la position angulaire ϑ du yoyo. On en déduit la vitesse de translation v et la vitesse angulaire ω . On calcule, à plusieurs instants, les trois formes d'énergie mises en jeu :

énergie potentielle : $W_1 = M. g. y,$

énergie cinétique de translation : $W_2 = 1/2 M. v^2,$

énergie cinétique de rotation : $W_3 = 1/2 J. \omega^2,$

et on constate que la somme $W_1 + W_2 + W_3$ reste constante à quelques % près.

3. EQUATION DU MOUVEMENT.

3.1. Relation entre l'altitude y et le rayon d'enroulement r de la ficelle (fig. 2).

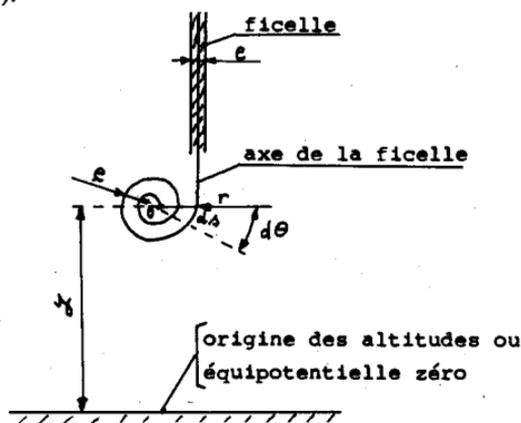


Fig. 2

La ficelle de diamètre e est supposée enroulée suivant une spirale d'Archimède (nous verrons plus loin comment cette condition est réalisée dans le dispositif expérimental).

Pour une rotation du yoyo de 2π radians, r varie donc de e ,

d'où : $r = r_0 + e \frac{\vartheta}{2\pi}$ (r_0 : rayon d'enroulement pour $\vartheta = 0$).

En choisissant comme origine des arguments celle où $r = 0$,

il vient : $r = e \frac{\theta}{2\pi}$ ou, en posant $\lambda = \frac{e}{2\pi}$:

$$\boxed{r = \lambda \theta} \quad (1)$$

Pour une rotation élémentaire $d\theta$ du yoyo, l'altitude varie de $dy = ds =$ longueur de l'arc correspondant de spirale.

On connaît la relation $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

Le terme dr^2 est toujours négligeable (voir justification en annexe) devant $r^2 d\theta^2$ et l'on peut écrire : $dy = ds = r d\theta$.

La relation (1) donne : $dr = \lambda d\theta$ ou $d\theta = \frac{dr}{\lambda}$ d'où :

$$dy = \frac{r dr}{\lambda} \text{ et en intégrant : } y = \frac{r^2}{2\lambda} + y_0.$$

En choisissant comme origine des altitudes celle où $r = 0$, il vient :

$$y = \frac{r^2}{2\lambda} \quad \text{ou} \quad \boxed{r^2 = 2\lambda y} \quad (2)$$

3.2. Diagramme des espaces $y = f(t)$.

On écrit que l'énergie mécanique totale est constante.

Energie potentielle : $W_1 = M g y$

Energie cinétique de translation : $W_2 = 1/2 M v^2$

Energie cinétique de rotation : $W_3 = 1/2 J \omega^2 = 1/2 J \frac{v^2}{r^2} \quad (v = r\omega)$

Energie totale : $M g y + 1/2 M v^2 + 1/2 J \frac{v^2}{r^2} =$
Constante = $M g y_0$

En tenant compte de $v = \frac{dy}{dt} = y'$, on obtient l'équation

différentielle $M g y + y'^2 \left(\frac{M}{2} + \frac{J}{2 r^2} \right) = M g y_0$ ou

$$\boxed{y'^2 \left(M + \frac{J}{r^2} \right) = 2 M g (y_0 - y)} \quad (3)$$

— Si r était constant, l'équation s'écrirait :

$$y'^2 = 2\gamma(y_0 - y) \quad \text{avec} \quad \gamma = g \frac{M}{M + J/r^2}$$

dont la solution est évidente :

$$y_0 - y = 1/2 \gamma t^2.$$

Le résultat est bien connu : le mouvement est uniformément accéléré d'accélération $\gamma = g \frac{M}{M + J/r^2}$, le diagramme des espaces est un arc de parabole.

— Si r n'est pas constant mais lié à y par la relation $r^2 = 2\lambda y$ (2), l'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{y'^2 \left(M + \frac{J}{2\lambda y} \right) = 2Mg(y_0 - y)} \quad (4)$$

dont la solution est loin d'être évidente.

4. INTEGRATION PAS A PAS.

4.1. Principe.

— On se fixe un pas ou intervalle de temps élémentaire Δt aussi petit que l'on veut.

— Soit M_i le i^{me} point du diagramme des espaces d'ordonnée y_i et d'abscisse $x_i = i \cdot \Delta t$.

— On calcule le rayon d'enroulement de la ficelle à cet instant par la formule (2) $r_i^2 = 2\lambda y_i$.

— On calcule la vitesse de translation $v_i = y'_i$ par l'équation différentielle (4).

— On en déduit la vitesse angulaire $\omega_i = \frac{v_i}{r_i}$.

— On admet que, pendant le pas suivant, r_i reste très sensiblement constant, le mouvement est uniformément accéléré d'ac-

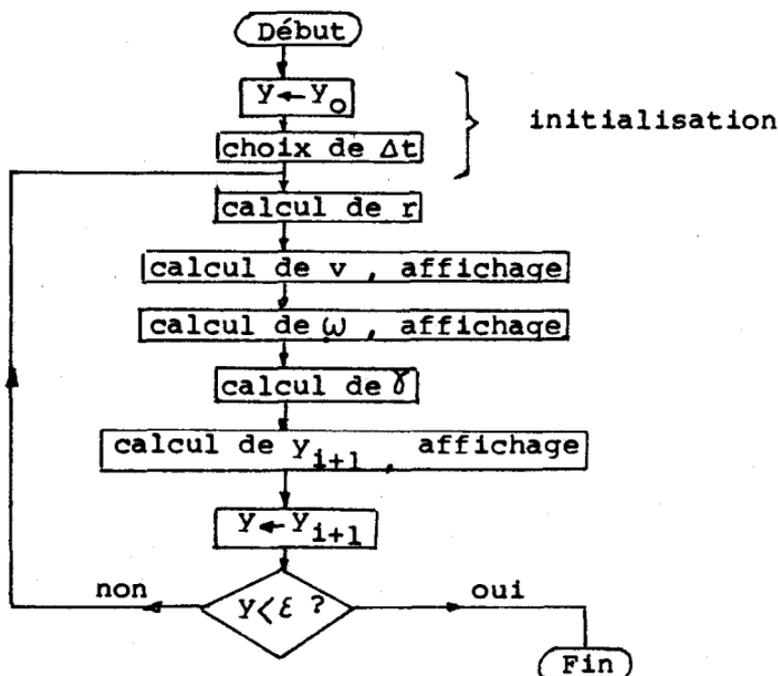
célération $\gamma_i = g \frac{M}{M + J/r_i^2}$ et on en déduit l'ordonnée du point suivant M_{i+1} :

$$\boxed{y_{i+1} = y_i - v_i \Delta t - 1/2 \gamma_i \Delta t^2}$$

(relation de récurrence donnant l'ordonnée d'un point connaissant celle du précédent).

— On recommence le calcul en affectant à y la valeur trouvée y_{i+1} , ce qui donne v_{i+1} , ω_{i+1} et y_{i+2} et ainsi de suite jusqu'à ce que r (ou y) soit trop petit pour que les approximations faites dans le calcul restent valables.

4.2. Organigramme.



Le test $y < \varepsilon$ n'est pas réalisé par la machine mais par l'opérateur lui-même qui décide d'arrêter le déroulement du calcul quand il le juge opportun.

4.3. Programme.

Le programme suivant est écrit pour calculatrice Hewlett-Pacard H.P. 33 E avec des valeurs numériques sensiblement égales à celles du dispositif expérimental, à savoir :

$$M = 1 \text{ kg} \quad J = 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad y_0 = 725 \text{ mm}$$

$$\lambda = 0,5 \text{ mm} \quad (e \approx 3 \text{ mm}) \quad \Delta t = 0,02 \text{ s} \quad g = 10 \text{ m/s}^2.$$

$$\text{La formule (2) s'écrit : } r^2 = y \text{ (mm}^2\text{) d'où } \omega = \frac{v}{\sqrt{y}} \text{ (rd/s).}$$

La formule (4) s'écrit :

$$v = y' = \sqrt{2 \cdot 10^4 (y_0 - y) \frac{y}{y + 400}} \quad (\text{mm/s}).$$

La formule $\gamma = g \frac{M}{M + J/r^2}$ s'écrit :

$$1/2 \gamma = 5 \cdot 10^3 \frac{y}{y + 400} \quad (\text{mm/s}^2)$$

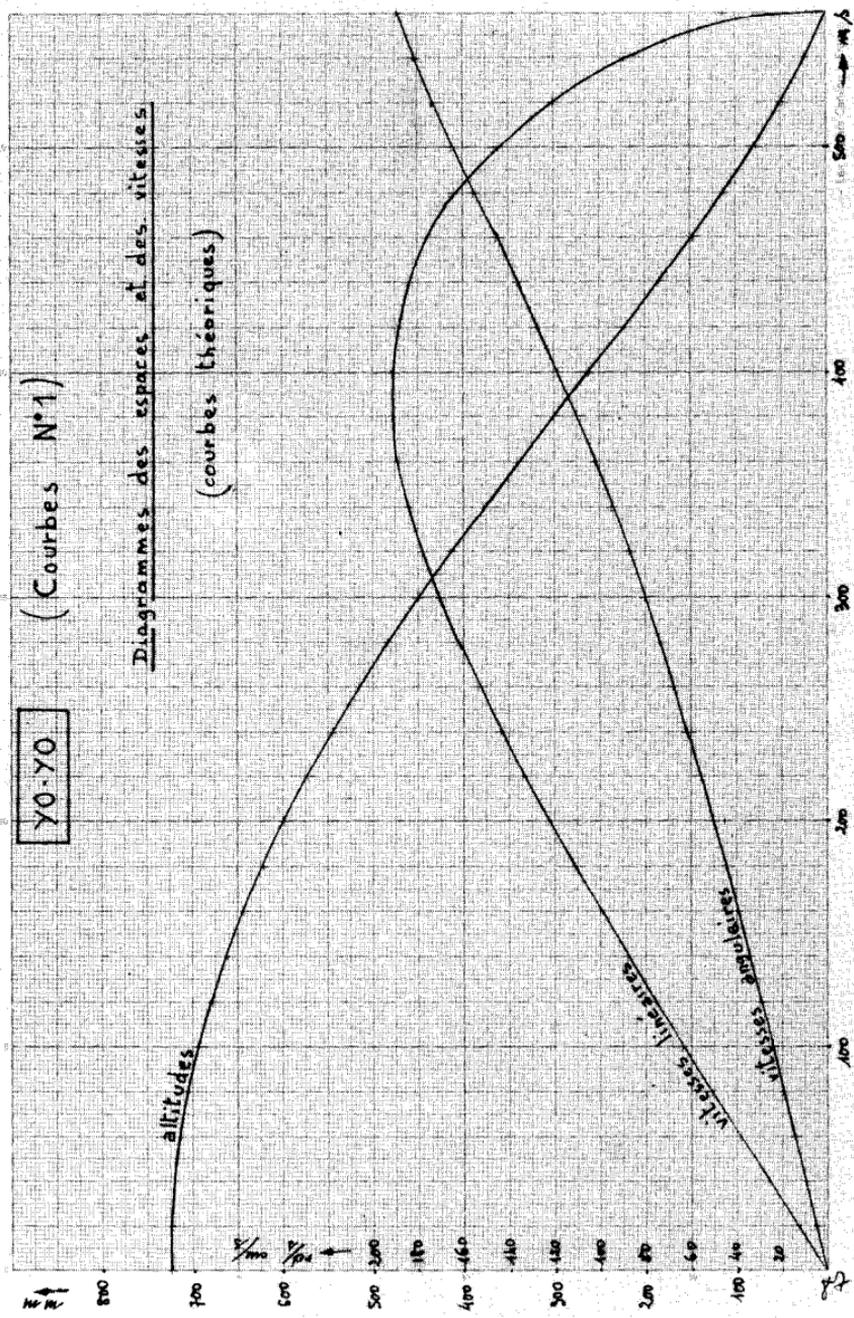
d'où le listing du programme :

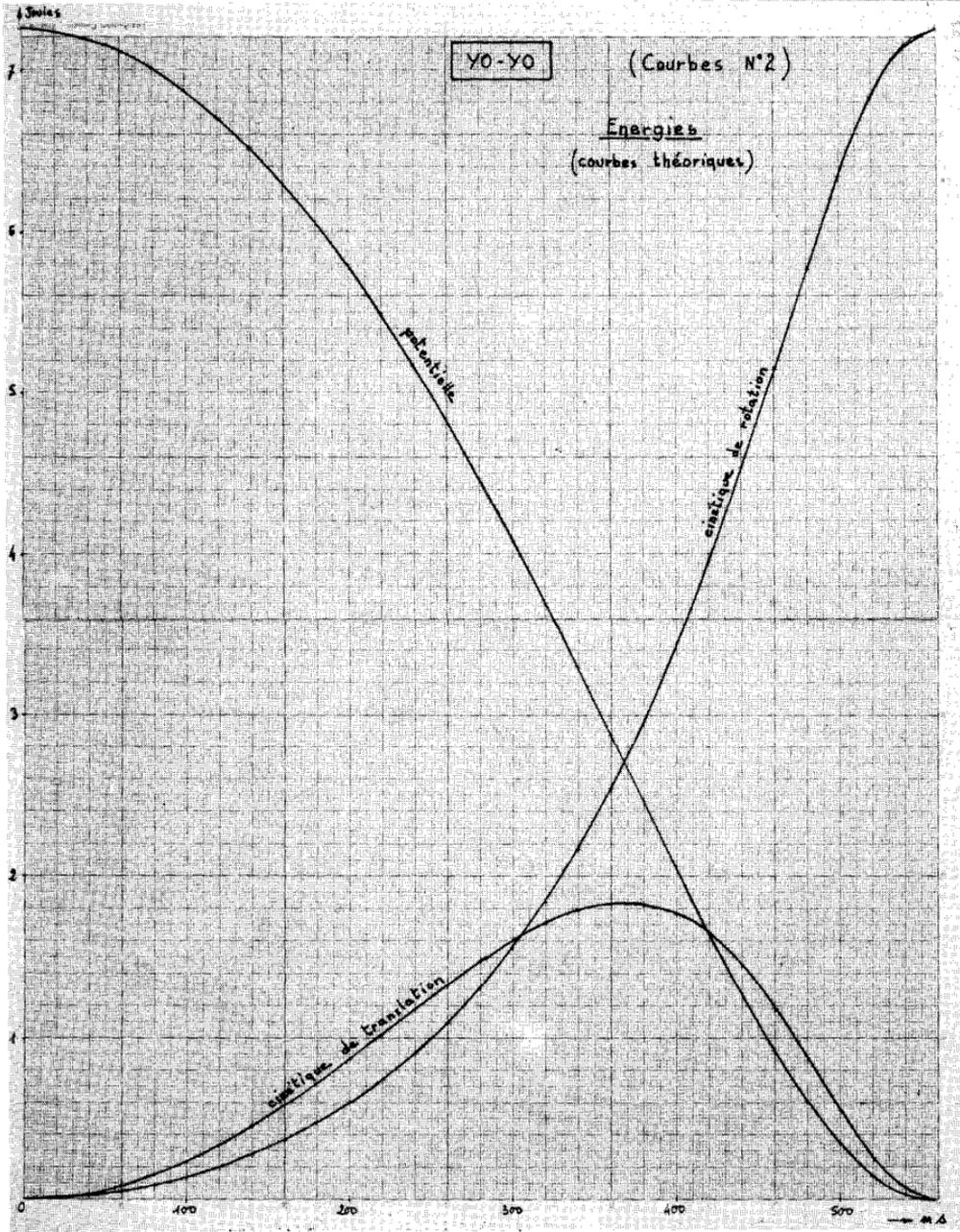
1 RCL 7	2 RCL 1	3 —	4 R/S	5 ENTER	6 STO 2
7. 8. 9 400	10 +	11 ÷	12 STO 3	13 RCL 1	14 ×
15. 16. 17 $2 \cdot 10^4$	18 ×	19 $f\sqrt{x}$	20 R/S	21 STO 4	22 RCL 2
23 $f\sqrt{x}$	24 ÷	25 R/S	26 RCL 4	27 RCL 6	28 ×
29. 30. 31 $5 \cdot 10^3$	32 RCL 3	33 ×	34 RCL 6	35 gx^2	36 ×
37 +	38 STO + 1	39 GTO 01			

Initialisation : O STO 1 y_0 STO 7 Δt STO 6.

4.4. Résultats.

Les résultats sont consignés dans les courbes n° 1.





Remarque.

On peut être surpris de constater que la vitesse passe par un maximum puis s'annule pour $y = 0$. Ce phénomène s'explique en fait très simplement. En effet, au fur et à mesure que le yoyo

descend, le rayon d'enroulement r diminue : la relation $\omega = \frac{v}{r}$ montre qu'il tourne autour de son axe de plus en plus vite.

L'énergie passe de plus en plus à l'état d'énergie cinétique de rotation au détriment de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de translation.

Quand r tend vers zéro (ce qui n'est pas mécaniquement réalisable), v tend également vers zéro et $\omega = \frac{v}{r}$ ne tend pas vers

l'infini mais vers la valeur pour laquelle toute l'énergie est passée à l'état cinétique de rotation, c'est-à-dire $1/2 J \omega^2 = M g y_0$, d'où :

$$\omega = \frac{2 M g y_0}{J} = 190 \text{ rd/s.}$$

On peut, à partir de ces résultats, calculer les énergies et en consigner les variations dans les courbes n° 2.

5. DISPOSITIF EXPERIMENTAL.**5.1. Description** (voir fig. 3).

Le yoyo proprement dit est un cylindre en acier de diamètre 60 mm et de longueur 50 mm. Deux joues de même diamètre, séparées des faces du cylindre par une « rondelle » en forme de spirale sont fixées par trois vis à tête fraisée et ménagent ainsi deux gorges où s'enroulent les ficelles (il y en a deux pour obtenir un meilleur guidage du yoyo pendant toute la chute). Ces ficelles doivent être très souples bien qu'ayant un diamètre non négligeable devant le rayon d'enroulement. Dans le cas contraire, ce rayon resterait sensiblement constant pendant toute la durée de la chute, les vitesses (linéaire et angulaire) seraient liées par la relation $v = r \cdot \omega$ et il serait stupide de les mesurer toutes les deux. Les énergies cinétiques (de translation et de rotation) seraient également dans un rapport constant et l'expérience perdrait beaucoup de son intérêt. J'ai utilisé, après plusieurs essais, de la drisse nylon de diamètre 3 mm sans âme (réf. 64) des corderies du Thillot qui, comme le montrent les résultats, donne entière satisfaction.

Le yoyo tombe entre deux tôles verticales de 40 cm de hauteur réunies aux bornes d'un générateur d'impulsion T.H.T.

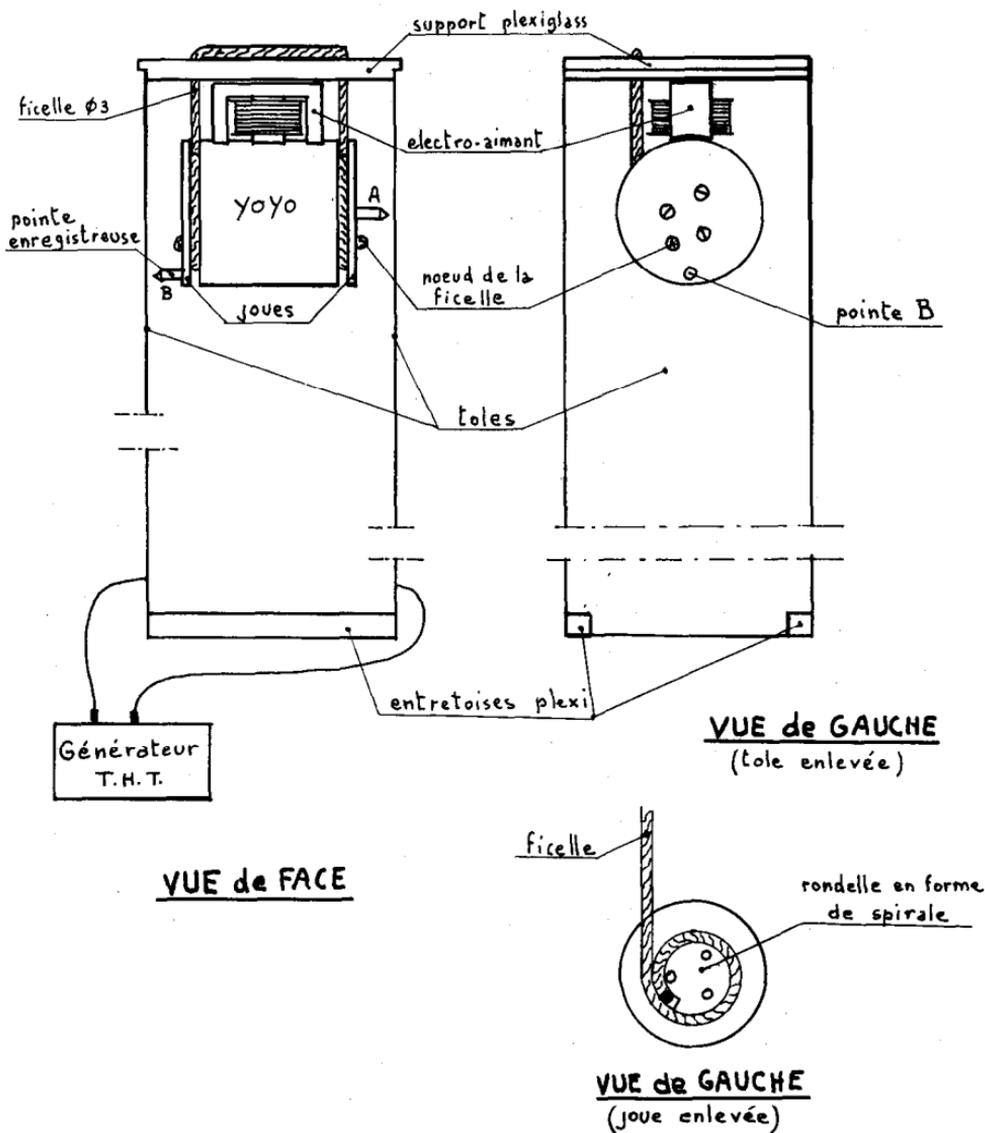


Fig. 3

Deux pointes A et B sont fixées de part et d'autre du yoyo : les étincelles qui giclent périodiquement sous ces pointes inscrivent des points sur du papier thermosensible collé à l'intérieur des deux plaques. La pointe A, fixée dans l'axe du yoyo enregistre l'altitude y du centre d'inertie ; la pointe B, parallèle

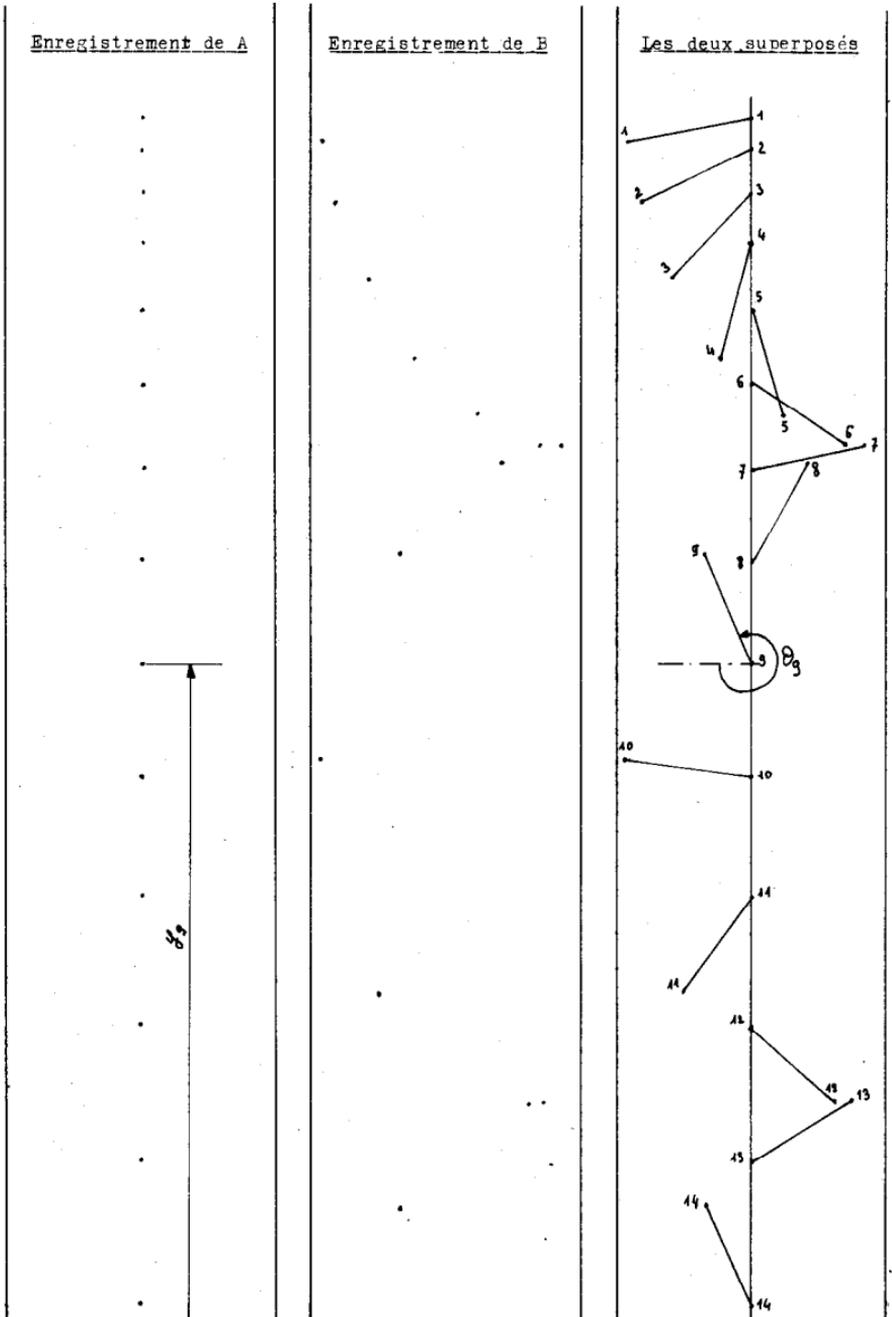


Fig. 4

à l'axe à une distance de 25 mm, permet de déterminer la position angulaire θ du yoyo.

5.2. Mode opératoire.

Le yoyo est maintenu au sommet de sa course par un électro-aimant. On applique la haute tension et on coupe le courant dans l'électro-aimant. Le yoyo tombe entre les deux tôles et achève sa course dans une boîte pleine de sciure.

On recueille les enregistrements de A et de B que l'on superpose comme l'indique la fig. 4. On dresse un tableau des altitudes et des positions angulaires θ pour quelques-uns ou pour tous les points et on calcule v et ω par les formules suivantes :

$$v_i = \frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2 \Delta t} \quad \omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2 \Delta t}$$

d'où l'on tire les valeurs des énergies :

$$W_1 = M. g. y \quad W_2 = 1/2 M. v^2 \quad W_3 = 1/2 J. \omega^2.$$

5.3. Résultats.

Le tableau de la fig. 5 donne un exemple de résultats obtenus avec l'appareil.

Un simple coup d'œil sur la dernière ligne montre que la somme $W_1 + W_2 + W_3$ est remarquablement constante. Les valeurs qui s'écartent le plus de la moyenne (4,317) sont celles des points nos 5 (4,37) et 13 (4,26). L'erreur maximale est 0,057 joule soit moins de 2 %.

Les courbes n° 3 traduisent ces résultats.

Les courbes n° 4 reproduisent les courbes théoriques n° 2 dans les limites de l'expérience de façon à permettre la comparaison avec les courbes expérimentales (l'altitude zéro a également été choisie au bas de la course du yoyo).

On constate la similitude d'allure de ces deux familles de courbes ; on voit nettement apparaître le maximum de l'énergie cinétique de translation et il serait sans doute possible, en choisissant une hauteur de chute un peu supérieure et un rayon minimum d'enroulement un peu plus faible, de déterminer encore quelques points postérieurs à ce maximum.

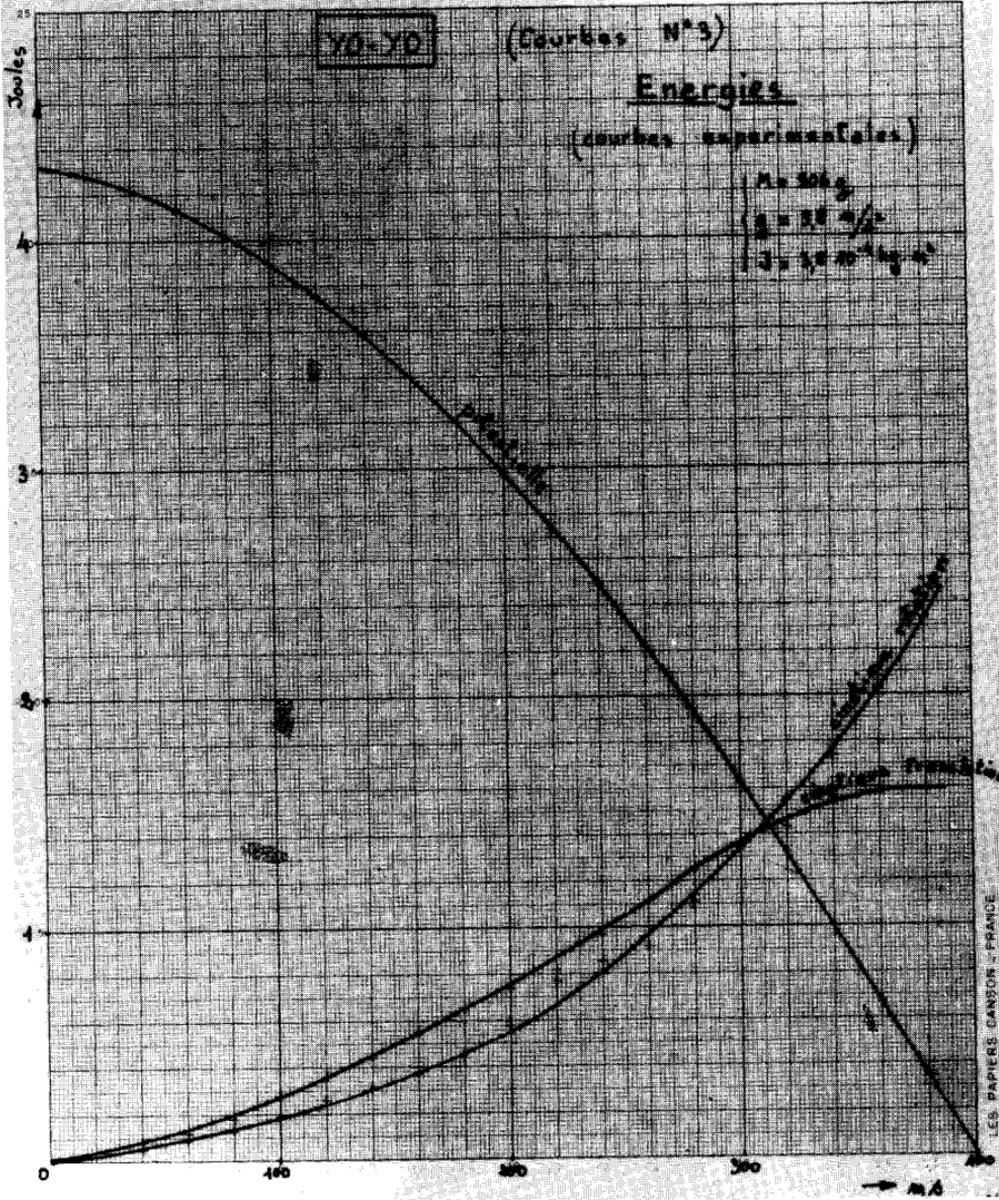
Cette expérience me semble réaliser une des rares vérifications directes précises du principe de la conservation de l'énergie mécanique totale.

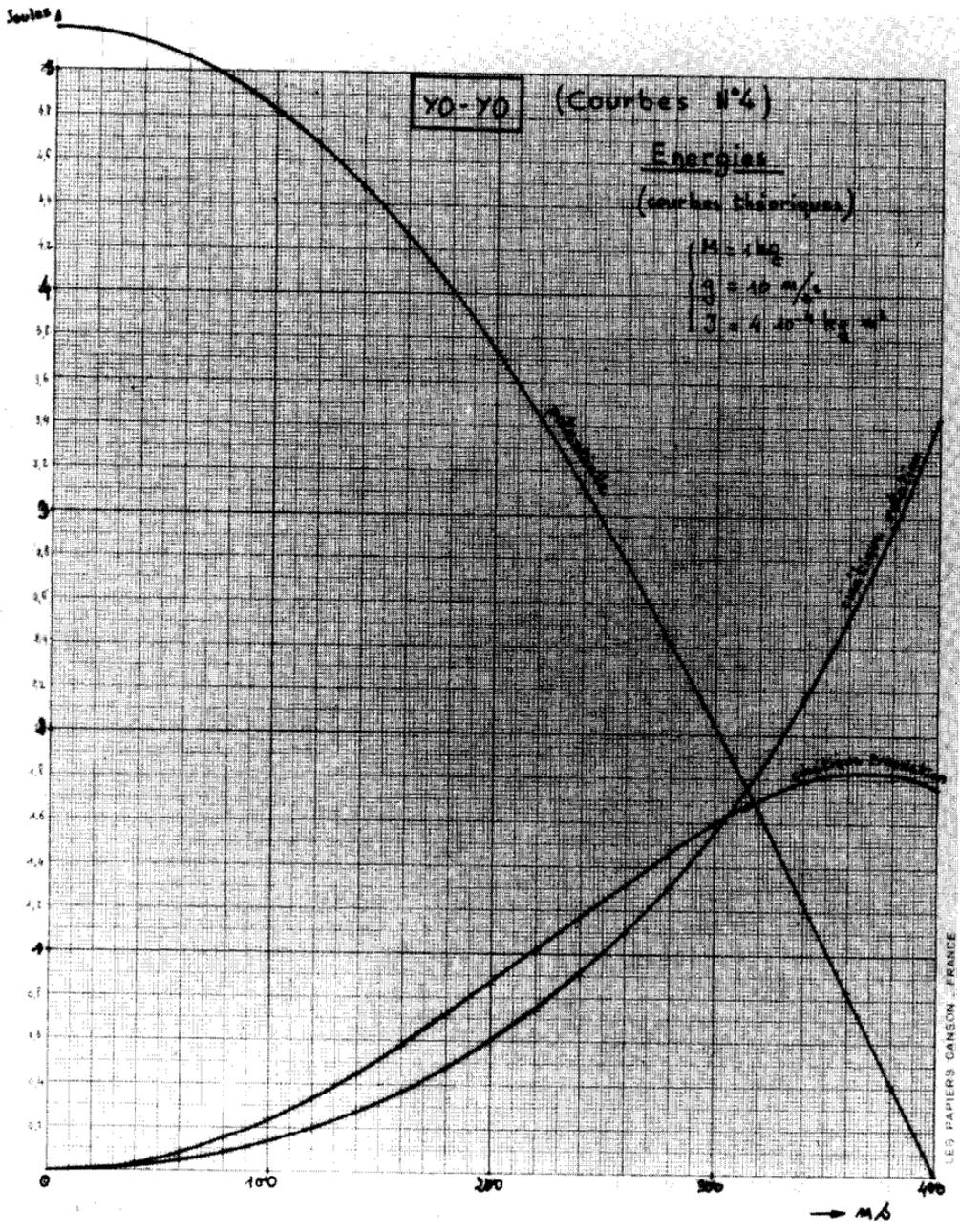
EXEMPLES DE RESULTATS EXPERIMENTAUX

N° du point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y (mm)	422	475	465	454	439,5	422,5	404	383	360	335	309	281	250,5	218	184	149	113	75	38	0
θ (d°)	11	26	48	75	108	148	192	241	293	352	419	498	573	657	748	849	955	1068	1192	1322
$y_{i-1} - y_{i+1}$		17	21	25,5	31,5	35,5	39,5	44	48	51	54	58,5	63	66,5	69	71	74	75	75	
$\theta_{i+1} - \theta_{i-1}$		37	49	60	73	84	93	101	111	126	146	154	159	175	192	207	219	237	254	
v (mm/s)		425	525	637,5	787,5	887,5	987,5	1100	1200	1275	1350	1462	1575	1663	1725	1775	1850	1875	1875	
ω (rd/s)		16,14	21,38	28,18	31,85	36,65	40,6	44,1	48,4	55	63,7	67,2	69,4	76,4	83,8	90,3	95,6	103,4	110,8	
W_1 (Joules)	4,28	4,22	4,13	4,03	3,90	3,75	3,59	3,40	3,20	2,97	2,74	2,49	2,22	1,94	1,63	1,32	1,00	0,67	0,34	0
W_2 "		0,08	0,12	0,18	0,28	0,36	0,44	0,55	0,65	0,74	0,82	0,97	1,12	1,25	1,35	1,43	1,55	1,59	1,59	
W_3 "		0,05	0,09	0,13	0,19	0,26	0,31	0,37	0,45	0,58	0,77	0,86	0,92	1,11	1,34	1,55	1,74	2,03	2,34	
$W_1 + W_2 + W_3$	4,35	4,34	4,34	4,34	4,37	4,37	4,34	4,32	4,30	4,29	4,33	4,32	4,26	4,30	4,32	4,30	4,29	4,29	4,27	

$$M = 906 \text{ g} \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad J = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \Delta t = 20 \text{ ms.}$$

Fig. 5





Les dimensions de l'appareil ont été choisies de façon que les trois formes d'énergie mises en jeu soient du même ordre de grandeur et que les variations d'aucune d'entre elles ne soient négligeables devant les autres.

Je suis à la disposition de tous les collègues qui désiraient des détails complémentaires pour la construction de cet appareil.
