

Le pendule de Foucault

II. HISTORIQUE - COMMENTAIRES - DISCUSSION

par Marcel BATHIER,
Université de Clermont II.

Résumé.

L'expérience du pendule de Foucault est l'une des plus célèbres du dix-neuvième siècle ; présentée au Panthéon en 1851, elle eut un retentissement considérable tant parmi le public que dans le monde scientifique. Foucault attribua le phénomène observé à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Les études théoriques, postérieures à la réalisation expérimentale, montrent qu'il s'agit d'un problème complexe. En analysant les difficultés mises en évidence, nous précisons quelles sont les précautions à prendre pour construire un pendule de démonstration fonctionnant correctement.

1. Historique.

Le plan d'oscillation d'un pendule simple abandonné sans vitesse initiale tourne lentement autour de la verticale du point d'attache du fil. Foucault a observé le phénomène pour la première fois en 1850, au moyen d'un pendule qu'il avait installé dans la cave de sa maison, rue d'Assas, à Paris. Il a décrit lui-même l'expérience dans un article — on disait alors un feuilleton scientifique — paru en 1851 dans le Journal des Débats :

« L'appareil qui a le premier fonctionné utilement n'avait pas plus de 2 mètres de haut ; il consistait en une sphère de laiton pesant 5 kilogrammes, suspendue par un fil d'acier à un support de fonte solidement scellé au sommet de la voûte d'une cave. On mettait le pendule en marche dans une direction quelconque en saisissant la boule dans une anse de fil combustible, en la maintenant écartée de sa position d'équilibre jusqu'à ce que le système rentrât dans le repos ; puis on mettait le feu au fil, qui, par ce moyen, rompu sans secousse, laissait le pendule osciller dans un plan bien déterminé. Une demi-heure plus tard, ce plan avait tellement changé de direction qu'on s'en apercevait au premier coup d'œil. Répétée une multitude de fois dans des directions variées, l'expérience a toujours donné le même résultat. Le

plan a constamment dévié ; et même il a toujours tourné autour de la verticale dans un sens tel, que dans ses retours successifs au-devant de l'observateur, la boule se portait de plus en plus vers la gauche (...). Il était évident qu'on opérait sur une trop faible hauteur. En effet, le même appareil transporté à l'Observatoire, installé avec l'autorisation de M. Arago dans la salle de la méridienne et suspendu à 11 mètres de fil, prit aussitôt une marche beaucoup plus régulière, beaucoup plus apparente. Partout où l'on pourra disposer librement, sans restriction, d'une hauteur de 10 à 12 mètres, on sera à même d'étudier sérieusement et à fond l'influence de la rotation de la terre sur la marche du pendule.

Mais sous les voûtes élevées de certains édifices, le phénomène devait prendre une splendeur magnifique. Nous avons trouvé dans le Panthéon un emplacement merveilleusement approprié à l'installation d'un pendule gigantesque ; nous avons trouvé pareillement dans l'administration les dispositions les plus favorables à l'exécution du progrès que suggérerait la vue de cette immense coupole. Sur une simple description du projet d'expérience, sur l'énoncé des résultats probables qu'elle fournirait à la science et qu'elle mettrait sous les yeux de tout le monde, le Président de la République résolut que la chose serait faite, et avec la rapidité de l'éclair sa haute protection réagissant jusqu'au dernier degré de l'échelle administrative, on vit, en moins de quinze jours, se dresser les appareils (...).

Le pendule du Panthéon était constitué par une boule de 28 kilogrammes formée d'une enveloppe de cuivre remplie de plomb. La boule portait un prolongement pointu, dirigé vers le bas, qui permettait de suivre son mouvement. Elle était suspendue à un fil de 67 mètres de longueur et 1,4 millimètre de diamètre qui subissait un allongement permanent de 5 à 6 centimètres sous l'action de la charge. Au repos, la pointe était au centre d'un grand cercle de bois de 6 mètres de diamètre divisé en 360 degrés. On lâchait le pendule en lui donnant une amplitude linéaire de 3 mètres. Des tas de sable humide fraîchement moulés étaient placés près du rebord du cercle de bois de manière que la pointe, en les ébréchant, permette de repérer la trace du plan d'oscillation. La période était de 16,4 secondes, la rotation de près de 12 degrés par heure.

Dans sa communication à l'Académie des sciences du 3 février 1851, Foucault énonça dans les termes suivants la loi qui relie la durée de la révolution du plan d'oscillation à la latitude du lieu :

« A mesure que l'on s'approche de l'équateur, le plan de l'horizon prend sur l'axe de la terre une position de plus en plus oblique, et la verticale, au lieu de tourner sur elle-même comme

au pôle, décrit un cône de plus en plus ouvert ; il en résulte un ralentissement dans le mouvement apparent du plan d'oscillation, mouvement qui s'annule à l'équateur pour changer de sens dans l'autre hémisphère. Pour déterminer la loi suivant laquelle varie ce mouvement sous les diverses latitudes, il faut recourir soit à l'analyse, soit à des considérations mécaniques et géométriques (...). Le déplacement angulaire du plan d'oscillation est égal au mouvement angulaire de la terre dans le même temps multiplié par le sinus de la latitude. »

On répéta l'expérience de Foucault dans les cathédrales de Reims, d'Amiens et de Cologne, ainsi qu'à Florence. Le pendule du Panthéon n'était pas entretenu ; son amortissement était assez faible pour qu'on puisse observer les oscillations durant de nombreuses heures. A l'Exposition universelle de 1855 fonctionna un pendule muni d'un ingénieux dispositif d'entretien à deux électro-aimants imaginé par Foucault lui-même.

Il existe actuellement des pendules de Foucault à New York, dans le bâtiment des Nations-Unies (longueur : 25 mètres), à Washington, à la Smithsonian Institution ($l = 22$ m ; $m = 110$ kg), à Leningrad, à Paris, au Musée national des techniques du Conservatoire National des Arts et Métiers ; on peut voir des pendules de quelques mètres de longueur, pourvus de dispositifs d'entretien électromagnétiques, dans plusieurs universités et salles d'exposition américaines.

2. Principaux résultats théoriques.

En vue des discussions qui suivront, nous rappelons brièvement les bases et, sans démonstrations, les résultats essentiels de l'étude classique qu'on trouve dans les ouvrages d'enseignement.

Un pendule simple de longueur l est en équilibre à la surface de la Terre lorsque le point matériel M , de masse m , se trouve en O de latitude λ . On choisit un repère terrestre (r) orthonormé direct d'axes Oz vertical vers le haut, Ox et Oy horizontaux quelconques.

L'équation vectorielle du mouvement de M dans (r) s'écrit :

$$\vec{t} + \vec{p} + \vec{f}_c = m\vec{\Gamma}, \quad (1)$$

avec $\vec{t}$: tension du fil ;

$\vec{p} = m\vec{g}$: poids de M ;

$\vec{f}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$: force d'inertie de Coriolis ;

- $\vec{\Omega}$: vecteur rotation de la Terre dans un repère galiléen ;
 $\vec{V}$: vitesse de M dans (r) ;
 $\vec{\Gamma}$: accélération de M dans (r).

Lorsque le pendule effectue des oscillations de faible amplitude, le point M se déplace pratiquement dans le plan horizontal Oxy et ses coordonnées dans (r) satisfont aux deux équations différentielles suivantes déduites de (1) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\Omega_N \frac{dy}{dt} + \frac{g}{l}x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\Omega_N \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l}y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dans lesquelles $\Omega_N = \Omega \sin \lambda$ est la composante scalaire de $\vec{\Omega}$ sur Oz ; on a : $\Omega_N > 0$ en tout point de l'hémisphère boréal, $\Omega_N < 0$ en tout point de l'hémisphère austral, $\Omega_N = 0$ en tout point de l'équateur.

Le système différentiel (2) est équivalent à l'équation vectorielle :

$$\vec{\Gamma} + 2\vec{\Omega}_N \wedge \vec{V} + \frac{g}{l} \vec{OM} = \vec{0}. \quad (3)$$

Soit (r') un repère orthonormé direct Ox'y'z qui tourne autour de Oz avec la vitesse angulaire $-\Omega_N$ dans (r) (cf. fig. 1) ; (r') sera appelé plus brièvement repère tournant.

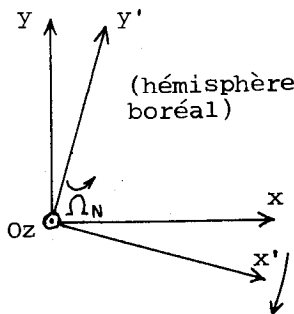


Fig. 1

L'accélération $\vec{\Gamma}'$ de M dans (r') satisfait à l'équation vectorielle :

$$\vec{\Gamma} + \left(\frac{g}{l} + \Omega_N^2 \right) \vec{OM} = \vec{0} \quad (4)$$

équivalente aux équations différentielles :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \Omega_N^2 \right) x' &= 0 \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \Omega_N^2 \right) y' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{Posons : } \omega^2 = \frac{g}{l} + \Omega_N^2.$$

Pour le pendule du Panthéon : $l = 67 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;

$$\frac{g}{l} = 0,146 \text{ s}^{-2} ; \Omega_N^2 = \left(\frac{2\pi}{86\,164} \sin 48^\circ 51' \right)^2 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2} ;$$

$$\Omega_N^2 \ll \frac{g}{l} ; \text{ d'où : } \omega^2 \approx \frac{g}{l}.$$

Choisissons les conditions initiales :

$$x = x_0 ; \quad y = 0 ; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0 ;$$

Ox' confondu avec Ox à la date $t = 0$.

La trajectoire de M est alors, dans le repère tournant (r'), l'ellipse (C') d'équations :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_0 \cos \omega t \\ y' &= x_0 \frac{\Omega_N}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(cf. fig. 2).

$$\text{Pour le pendule du Panthéon : } \frac{\Omega_N}{\omega} = 1,4 \cdot 10^{-4} ; x_0 = 3 \text{ m} ;$$

$$x_0 \frac{\Omega_N}{\omega} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m. L'ellipse étant très aplatie, on peut dire}$$

que le pendule oscille pratiquement dans le plan vertical Ozx' qui tourne autour de Oz avec la vitesse angulaire constante $-\Omega_N$. La période est sensiblement celle des petites oscillations du pendule simple :

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(hémisphère
boréal)

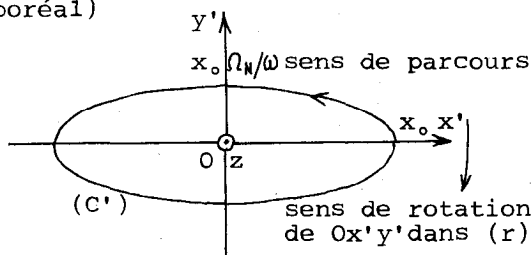


Fig. 2

La trajectoire de M, dans le repère terrestre (r), est l'hypocycloïde (C) d'équations :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_0}{2} \frac{\omega - \Omega_N}{\omega} \cos(\omega + \Omega_N) t \dots \\ &\dots + \frac{x_0}{2} \frac{\omega + \Omega_N}{\omega} \cos(\omega - \Omega_N) t \\ y &= -\frac{x_0}{2} \frac{\omega - \Omega_N}{\omega} \sin(\omega + \Omega_N) t \dots \\ &\dots + \frac{x_0}{2} \frac{\omega + \Omega_N}{\omega} \sin(\omega - \Omega_N) t \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(cf. fig. 3).

Pour le pendule du Panthéon, le déplacement observé après une période est :

$$M_0 M_2 = M_1 M_3 = \dots = x_0 \Omega_N T = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

3. Commentaires et discussion.

INTERPRÉTATION DE L'EXPÉRIENCE.

— Le pendule de Foucault démontre le caractère non galiléen des repères terrestres.

— La rotation du plan d'oscillation est due à la force d'inertie de Coriolis qui est très inférieure au poids du point matériel ; en effet :

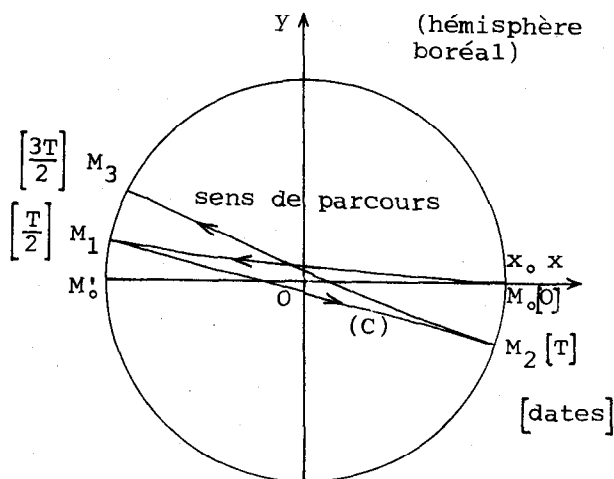


Fig. 3

$$\frac{\|\vec{f}_c\|}{\|\vec{mg}\|} = \frac{\| -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V} \|}{\|\vec{mg}\|} \leq \frac{2\Omega V_{\max}}{g},$$

avec :

$$x \approx x_0 \cos \omega t,$$

$$\frac{dx}{dt} \approx -x_0 \omega \sin \omega t,$$

$$V_{\max} \approx x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} = 1,15 \text{ m.s}^{-1},$$

d'où :

$$\frac{\|\vec{f}_c\|}{\|\vec{mg}\|} \leq \frac{2\Omega x_0}{\sqrt{lg}} = \varepsilon.$$

Pour le pendule du Panthéon : $l = 67 \text{ m}$; $x_0 = 3 \text{ m}$; d'où, puisque $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$:

$$\varepsilon < 2 \cdot 10^{-5}.$$

Une action aussi faible peut néanmoins être mise en évidence car la durée de l'expérience est suffisante pour que les effets de $\vec{f}_c$ accumulés au cours des oscillations successives deviennent

apparents : nous avons montré que le pendule ne se déplace, sur le cercle de 3 mètres de rayon, que de 2,7 millimètres à chaque oscillation ; mais il en résulte, en une heure, une rotation du plan d'oscillation qui atteint presque 12° .

— La rotation du plan d'oscillation autour de la verticale est bien une conséquence de la rotation de la Terre autour de son axe ; Foucault fut le premier à montrer cet effet spectaculaire. Soulignons toutefois le risque d'une interprétation abusive de la part d'observateurs non avertis : il ne faudrait pas laisser croire que l'expérience fait voir directement la rotation de la Terre ; des calculs sont nécessaires pour expliquer les phénomènes, notamment pour établir la loi du sinus.

QUALITÉS DU PENDULE.

Si la durée importante de l'expérience permet, comme nous venons de le montrer, d'observer un phénomène aussi petit, elle provoque aussi, en contrepartie, l'accumulation des effets de diverses imperfections qui perturbent le mouvement. C'est pourquoi la mise au point d'un pendule de Foucault qui vérifie à deux pour cent près les résultats théoriques est très délicate. Il est, par contre, assez facile de construire un pendule de démonstration permettant d'observer en très peu de temps la rotation du plan d'oscillation et de déterminer seulement l'ordre de grandeur des résultats quantitatifs.

Il faut que la boule présente, avec la meilleure précision possible, la symétrie de révolution autour de l'axe du fil, tant au point de vue géométrique que dans la répartition de la masse.

Le pendule doit pouvoir osciller de la même manière dans toutes les directions, ce qui pose deux problèmes importants : celui de la suspension et celui de l'isotropie des propriétés mécaniques du fil.

Foucault n'a laissé aucune indication précise au sujet de la suspension. Dans le pendule de Cologne, l'extrémité supérieure du fil était reliée à un cardan. Ce dispositif est souvent utilisé dans les réalisations actuelles.

D'après Lissajous, on avait fait subir au fil du pendule du Panthéon des retouches locales pour qu'il offre la même résistance à la flexion dans tous les sens. Pour le pendule de Reims, le fil de 40 mètres avait été préalablement soumis pendant une semaine à des oscillations dans toutes les directions qui devaient assurer l'isotropie recherchée.

VITESSE INITIALE.

Une vitesse initiale $\vec{V}_0$ de direction quelconque peut, même si elle est petite, perturber considérablement les phénomènes.

La fig. 4, pour $\vec{V}_0$ parallèle à Oy , montre qu'on a alors affaire non à un pendule simple, mais à un pendule conique (ou pendule sphérique) dont le mouvement masque la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault.

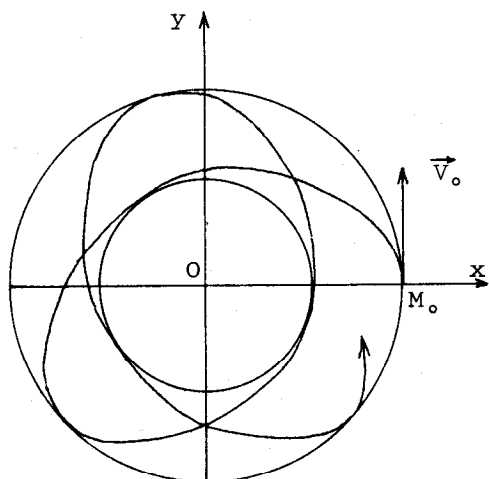


Fig. 4

Pour libérer le pendule sans vitesse initiale, un électro-aimant dont on coupe le courant d'excitation est plus commode que le dispositif utilisé par Foucault.

AMORTISSEMENT.

Pour réduire l'amortissement dû à la résistance de l'air, Foucault avait choisi un fil de longueur l grande et une boule dense ; dans ces conditions, la vitesse maximale $x_0 \sqrt{g/l}$ est petite pour une amplitude linéaire x_0 donnée et le maître-couple est faible pour une masse m donnée. Une autre cause d'amortissement est le frottement interne qui accompagne la déformation du fil.

Il est possible d'entretenir le pendule en disposant au-dessous de la position d'équilibre de la boule un électro-aimant dont le noyau est vertical. Lorsque le pendule atteint son élongation maximale, à chaque demi-oscillation, le fil touche un anneau métallique ayant pour axe la verticale du point d'attache, ce qui ferme le circuit de l'électro-aimant. Ce dernier exerce alors sur la boule une force d'attraction qui entretient les oscillations. Un pendule entretenu de 1' à 2 mètres de longueur vérifie bien les lois du mouvement si le dispositif d'entretien est correctement réglé, ce qui peut demander plusieurs jours de tâtonnements.

ELLIPTICITÉ DU MOUVEMENT.

Le mouvement du pendule lâché sans vitesse initiale n'est pas aussi simple que la théorie élémentaire le prévoit : pendant la première heure environ, le pendule oscille bien pratiquement dans un plan qui tourne lentement autour de la verticale du point d'attache, donc la trajectoire de M dans le repère terrestre est pratiquement rectiligne pour chaque oscillation, mais cette trajectoire devient ensuite nettement elliptique. La dégradation du mouvement, signalée notamment par Bravais, va en s'amplifiant au cours du temps. L'étude du phénomène a été faite par Kamerlingh Onnes, plus connu par la liquéfaction de l'hélium (1908) et la découverte de la supraconductivité (1911). Dans sa thèse (1879), dont le sujet lui avait été proposé par Gustav Kirchhoff, Kamerlingh Onnes a appliqué au pendule une méthode nouvelle qui a constitué une contribution importante à la Physique car elle est à la base de la théorie des perturbations. Il a considéré le pendule de Foucault comme un pendule simple soumis à deux perturbations : l'action de la rotation de la Terre et la dissymétrie du fil. La première provoque un effet de polarisation circulaire et la seconde une polarisation rectiligne car le fil possède une direction de vibration privilégiée. La résultante est une polarisation elliptique. Kamerling Onnes a caractérisé quantitativement les dissymétries à partir de la trajectoire expérimentale et il en a déduit une méthode permettant de les corriger. Il a appliqué sa méthode à un pendule qu'il a construit lui-même ; ce fut le premier pendule permettant de faire des mesures précises. Il s'agissait d'un pendule de petites dimensions placé dans une cage en verre qui le protégeait des courants d'air. Kamerlingh Onnes avait supprimé le fil, dont les dissymétries sont difficiles à corriger, en prenant un solide muni de surcharges mobiles, ce qui rendait les réglages plus commodes. La suspension à deux couteaux était inspirée du système de Cardan. Un dispositif optique permettait de faire des mesures goniométriques de grande précision.

Schulz-DuBois a repris la théorie de Kamerlingh Onnes, il y a quelques années, en utilisant des techniques de calcul plus modernes. Indiquons brièvement quelles sont les grandes lignes de sa méthode.

Les dissymétries du pendule entraînent l'existence de deux directions horizontales rectangulaires privilégiées Ox et Oy qu'on prend pour axes du repère terrestre. On remplace les équations (2) de la théorie classique faisant intervenir la longueur l du fil par :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\Omega_N \frac{dy}{dt} + \frac{g}{l_x} x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\Omega_N \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l_y} y &= 0 \end{aligned} \right| \quad (8)$$

dans lesquelles les longueurs efficaces l_x et l_y correspondent aux oscillations dans les directions des deux axes.

On pose :

$$g/l_x = (\omega + \delta)^2,$$

$$g/l_y = (\omega - \delta)^2,$$

$$x = a \cos [(\omega + \Delta)t + \varphi],$$

$$y = b \sin [(\omega + \Delta)t + \varphi],$$

avec : Ω_N , δ et $\Delta \ll \omega$.

Les équations (8) donnent :

$$-a(\omega + \Delta)^2 - 2b\Omega_N(\omega + \Delta) + a(\omega + \delta)^2 = 0,$$

$$-b(\omega + \Delta)^2 - 2a\Omega_N(\omega + \Delta) + b(\omega - \delta)^2 = 0,$$

d'où, si on néglige les termes du deuxième ordre :

$$\left. \begin{aligned} (\Delta - \delta)a + \Omega_N b &= 0 \\ \Omega_N a + (\Delta + \delta)b &= 0 \end{aligned} \right| \quad (9)$$

Le système linéaire d'équations algébriques (9) d'inconnues a et b admet une solution non triviale pour :

$$(\Delta - \delta)(\Delta + \delta) - \Omega_N^2 = 0,$$

$$\Delta^2 = \delta^2 + \Omega_N^2.$$

Les fonctions propres correspondant à $\Delta = \pm \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2}$ définissent deux mouvements elliptiques.

Schulz-DuBois a fait une discussion complète de la solution qui lui a permis de retrouver les résultats établis par Kammerlingh Onnes et aussi, pour $\delta = 0$, le cas du pendule sans dissymétries.

Des calculs analogues permettent d'étudier des perturbations qui interviennent dans les cavités résonnantes pour micro-ondes électromagnétiques, dans les lasers et aussi en Physique quantique.

BIBLIOGRAPHIE

- FOUCAULT L. — *Recueil des travaux scientifiques*, Gauthier-Villars (1878), V, 378, 519, 570.
- FOUCAULT L. — *Recueil des travaux scientifiques*, Planches, Gauthier-Villars (1878), 1.
- BOUASSE H. — *Pendule, spiral, diapason*, tome II, Delagrave (1920), 225.
- BOUASSE H. — *Gyroscopes et projectiles*, Delagrave (1923), 192.
- BRUHAT G. — *Mécanique*, Masson (1955), 153.
- SCHULZ-DUBOIS E.-O. — *Amer. J. Phys.*, 38 (2) (1970), 173.
- HILTON W.-A. — *Amer. J. Phys.*, 46 (4) (1978), 436.
- KRUGLAK H., OPPLIGER L., PITTET R. and STEELE S. — *Amer. J. Phys.*, 46 (4) (1978), 438.
- CANNON W.-F. — *The Foucault Pendulum*, Smithsonian Institution, Washington, communication personnelle (1982).
-