Le pendule de Foucault

I. ASPECTS THEORIQUES

par G. LAVERTU,
L.C.M.N. de Luxeuil-les-Bains.

Le but de cette étude est de faire une mise au point sur ce problème, qui n'est en général pas traité tout à fait correctement dans les ouvrages de mécanique.

I. Les équations du problème.

Il s'agit de l'étude du pendule simple placé dans un repère terrestre non assimilé à un repère galiléen. La masse du pendule est donc soumise à son poids $\vec{P}$, la tension du fil $\vec{T}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{f_c} = -2\, m\, \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$.

$\vec{V}$ est la vitesse du pendule par rapport à un repère terrestre,

$\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation de la terre par rapport aux repères galiléens. Il est porté par l'axe des pôles, orienté du sud vers le nord, et son module est $\dfrac{2\pi}{86164}$ Rd/s.

L'équation du mouvement est :

$$\vec{T} + \vec{P} - 2\, m \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = m \vec{\Gamma}. \qquad (1)$$

Prenons un repère orthonormé terrestre $Oxyz$, $\overrightarrow{Oz}$ étant la verticale ascendante, $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ quelconques dans le plan horizontal, O étant la position d'équilibre de la masse m (fig. 1).

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes.

D'après l'hypothèse du pendule simple, l'angle entre $\overrightarrow{Oz}$ et $\vec{T}$ reste petit et M reste pratiquement dans le plan Oxy :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

$$\vec{T} = -\mathrm{T}\,\frac{x}{l}\,\vec{i} - \mathrm{T}\,\frac{y}{l}\,\vec{j} + \mathrm{T}\,\vec{k}$$

$$\vec{P} = -m\,g\,z\,\vec{k}.$$

Décomposons maintenant $\vec{\Omega}$ en sa composante normale :

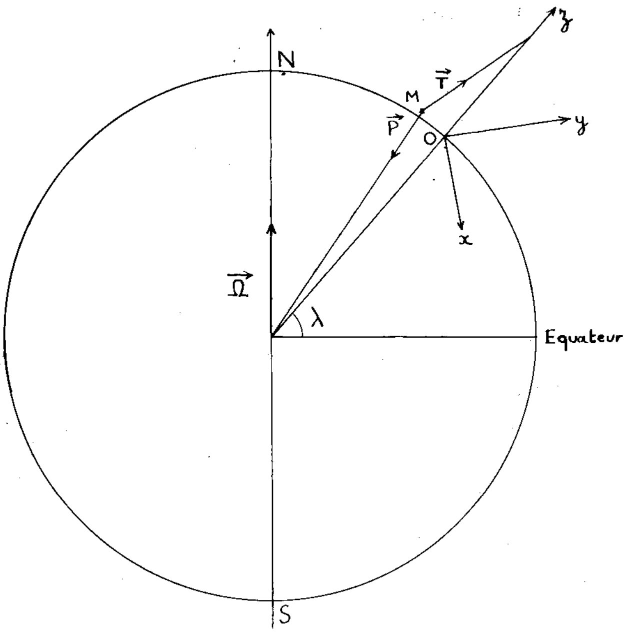

Fig. 1

$$\vec{\Omega}_N = \Omega_N \vec{k} = \Omega \sin \lambda \; \vec{k}$$

et sa composante tangentielle $\vec{\Omega}_T \in Oxy$.

$$-2\,m\,\vec{\Omega}_N \wedge \vec{V} = -2\,m\,\Omega_N \vec{k} \wedge (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) ...$$

$$... = -2\,m\,\Omega_N\,\dot{x}\,\vec{j} + 2\,m\,\Omega_N\,\dot{y}\,\vec{i},$$

$-2\,m\,\vec{\Omega}_T \wedge \vec{V} = \vec{f}_{CN}$, composante normale de $\vec{f}_c$.

$$\|\vec{f}_{CN}\| \leqslant 2\,m\,\Omega\,\|\vec{V}\|.$$

On sait que dans le pendule simple galiléen, la solution peut s'écrire par exemple :

$$x = x_0 \cos \omega t \Rightarrow V = -x_0\,\omega \sin \omega t \qquad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

D'où : $\|\vec{f}_{CN}\| \leqslant 2\,m\,\Omega\,x_0 \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

De plus, le pendule étant simple, $x_0 \leqslant l\,\alpha$, α étant l'angle maximum autorisé $\Rightarrow \|\vec{f}_{CN}\| \leqslant 2\,m\,\Omega\,\alpha\sqrt{g\,l}$.

$$\frac{\|\vec{f}_{CN}\|}{mg} \leqslant 2\Omega\alpha\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Prenons $l = 67$ m, longueur du pendule de Foucault, et soit $\alpha = 0{,}03$ Rd. D'où :

$$\frac{\|\vec{f}_{CN}\|}{mg} \leqslant 1{,}1 \cdot 10^{-5}.$$

Ceci montre qu'on peut négliger $\vec{f}_{CN}$ devant mg, cette approximation étant d'ailleurs plus légitime que celle qui consiste à admettre l'angle α petit, donc à négliger $\frac{\alpha^2}{2}$ devant 1. Ceci étant, l'équation (1) donne par projection sur les axes :

(2.1.) $T = mg.$

(2.2.) $-mg\,\frac{x}{l} + 2\,m\,\Omega_N\,\dot{y} = m\,\ddot{x}.$

(2.3.) $-mg\,\frac{y}{l} - 2\,m\,\Omega_N\,\dot{x} = m\,\ddot{y}.$

Rappelons que ce système d'équations est toujours valable, quelle que soit l'orientation des axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ dans le plan horizontal.

II. Une méthode de résolution.

Soit la masse m lâchée au temps $t = 0$ au point M_0 sans vitesse initiale. Les axes étant à notre convenance, choisissons l'axe $\overrightarrow{Ox_1}$ passant par M_0.

Sans la force de Coriolis, le mobile aboutirait après une demi-période en M'_0 mais $\vec{f}_c$ dévie la trajectoire jusqu'en M_1 (sens de déviation dans l'hémisphère nord sur la fig. 2). M_1 se trouve sur le cercle de centre O et de rayon OM_0, en raison de la conservation de l'énergie, car $\vec{f}_c$ ne travaille pas.

Evidemment, la déviation est très faible, $\dot{y}$ reste petit, essayons de négliger le terme en $\dot{y}$ dans l'équation (2.2.) ; mais attention, on ne peut négliger un terme que devant un autre, or les deux autres passent par zéro au cours de la demi-période et une vérification *a posteriori* sera nécessaire.

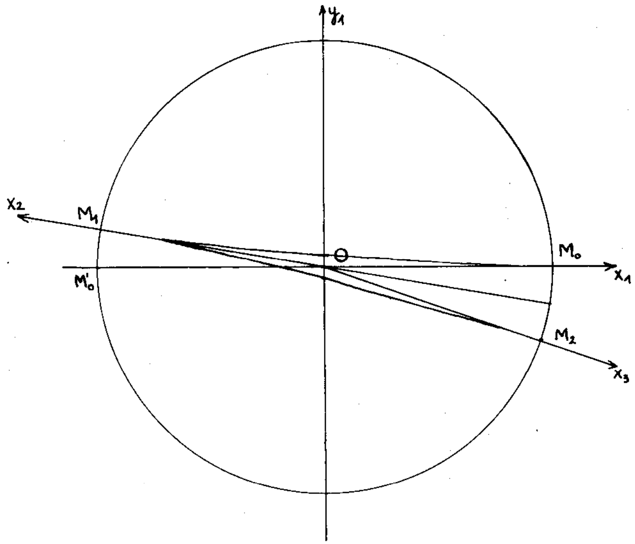

Fig. 2

L'équation (2.2.) s'écrit alors :

$$-mg\frac{x}{l} = m\ddot{x}.$$

D'où la solution $x = x_0 \cos \omega t$ avec $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, solution tenant compte des conditions initiales.

Ceci étant, l'équation (2.3.) devient :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 2\,\Omega_N\, x_0\, \omega \sin \omega t. \qquad (3)$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y_g = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Cherchons une solution particulière de la forme $y_p = kt \cos \omega t$:

$$\dot{y}_p = k \cos \omega t - kt\,\omega \sin \omega t$$
$$\ddot{y}_p = -2\,k\,\omega \sin \omega t - kt\,\omega^2 \cos \omega t$$
$$\ddot{y}_p + \omega^2 y_p = -2\,k\,\omega \sin \omega t \Rightarrow k = -\Omega_N\, x_0$$
$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \Omega_N\, x_0\, t \cos \omega t.$$

A et B doivent satisfaire les conditions initiales : $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$. D'où :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = \Omega_N \frac{x_0}{\omega}.$$

Finalement : $$y = \Omega_N x_0 \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \cos \omega t \right).$$

Vérification de l'hypothèse consistant à négliger le terme en $\dot{y}$ dans (2.2.) :

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{l} + 2\,\Omega_N{}^2 x_0\, \omega t \sin \omega t.$$

A l'instant $t = \frac{T}{4}$, $\frac{gx}{l}$ passe par zéro alors que $2\,\Omega_N\,\dot{y}$ n'est pas nul.

Calculons la vitesse acquise par l'effet du terme $2\,\Omega_N\,\dot{y}$ dans l'accélération $\ddot{x}$:

$$v_{\dot{y}} = \int_0^{T/4} 2\,\Omega_N{}^2 x_0\, \omega t \sin \omega t \, dt = 2\,\Omega_N{}^2 x_0 \omega \; ...$$

$$... \left[-\frac{t}{\omega} \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega^2} \right]_0^{T/4}$$

$$v_{\dot{y}} = 2\,\Omega_N{}^2 \frac{x_0}{\omega}.$$

A cet instant, la vitesse réelle est : $\dot{x} = -x_0 \omega$:

$$\left| \frac{v_{\dot{y}}}{\dot{x}} \right| = \frac{2\,\Omega_N{}^2}{\omega^2} = 7{,}2 \cdot 10^{-8} \quad \text{pour} \quad l = 67 \text{ m}.$$

La contribution du terme en $\dot{y}$ est donc bien négligeable.

Discussion. Cherchons la tangente en M_1 à la trajectoire :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\Omega_N x_0\, \omega t \sin \omega t}{-x_0 \omega \sin \omega t} = -\Omega_N t$$

$$\left.\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_{T/2} = -\Omega_N \frac{T}{2}.$$

Or, $$\left.\frac{y}{x}\right)_{T/2} = \frac{\Omega_N x_0 T/2}{-x_0} = -\Omega_N \frac{T}{2}.$$

Ceci montre que la tangente en M_1 n'est autre que OM_1. Pour étudier la seconde demi-période, on changera d'axes horizontaux, avec $\overrightarrow{Ox_2}$ passant par M_1, les équations étant les mêmes et les conditions initiales aussi. Il en sera de même des conclusions.

En une période, le point d'élongation maximum a tourné d'un angle :

$$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_2}) = 2(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) = -\Omega_N T.$$

Il aura effectué un tour pendant le temps :

$$\frac{2\pi}{|\Omega_N|\,T} \cdot T = \frac{2\pi}{|\Omega_N|} = \frac{2\pi}{\Omega\,|\sin\lambda|}.$$

Mais il ne serait pas rigoureux de conclure que le plan vertical de la trajectoire tourne autour de $\overrightarrow{Oz}$ avec la vitesse angulaire $-\Omega_N$, puisque cette trajectoire ne passe même pas par O, avec les conditions initiales adoptées précédemment.

Si l'on veut bien admettre maintenant qu'à l'instant initial, la vitesse est celle du point coïncidant du plan tournant, on écrira $\dot{y}_{(0)} = -\Omega_N x_0$, d'où on déduira :

$$y = \Omega_N x_0\, t \cos \omega t$$

et :

$$\frac{y}{X} = -\Omega_N t,$$

ce qui montre cette fois que la trajectoire reste dans ce plan tournant. Mais il faut adopter pour cela une condition initiale artificielle, irréaliste, et non nécessaire à la manifestation de la vérité.

III. Une méthode habituelle.

On prend la variable complexe $u = x + iy$.

Les équations (2.2.) et (2.3.) donnent alors :

$$\ddot{u} + 2i\Omega_N \dot{u} + \frac{g}{l} u = 0. \qquad (4)$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$-i\Omega_N \pm \sqrt{-\Omega_N^2 - \frac{g}{l}} \simeq -i\Omega_N \pm i\omega.$$

On peut mettre la solution générale de (4) sous la forme :

$$u = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp(-i\Omega_N t). \qquad (5)$$

L'erreur à ne pas commettre alors est de considérer, même sans le dire explicitement, que A et B doivent être obligatoirement réels : par exemple Cabannes (Dunod) et Roy (Dunod).

On aboutirait à la solution :

$$\begin{cases} x = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\cos\Omega_N t, \\ y = -(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\Omega_N t. \end{cases}$$

et il est impossible avec une telle solution de vérifier les conditions initiales logiques. Par contre, on peut vérifier les conditions initiales avec $\dot{y}_{(0)} = -\Omega_N X_0$, ce qui nécessite $A = X_0$ et $B = 0$:

$$\begin{cases} x = x_0\cos\omega t\cos\Omega_N t, \\ y = -x_0\cos\omega t\sin\Omega_N t. \end{cases}$$

Admettons, ce qui est plus légitime, $\dot{y}_{(0)} = 0$, A et B étant complexes. On établit alors sans difficulté que $A = x_0$ et $B = i\,x_0\dfrac{\Omega_N}{\omega}$. D'où :

$$\begin{cases} x = x_0\cos\omega t\cos\Omega_N t + x_0\dfrac{\Omega_N}{\omega}\sin\omega t\sin\Omega_N t, \\ y = x_0\dfrac{\Omega_N}{\omega}\sin\omega t\cos\Omega_N t - x_0\cos\omega t\sin\Omega_N t. \end{cases}$$

Pour ce qui concerne la première demi-période, on peut poser $\cos\Omega_N t = 1$ et $\sin\Omega_N t = \Omega_N t$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = x_0\cos\omega t + x_0\dfrac{\Omega_N^2}{\omega}t\sin\omega t \simeq x_0\cos\omega t, \\ y = \Omega_N x_0\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega} - t\cos\omega t\right). \end{cases}$$

C'est bien la solution trouvée dans le précédent paragraphe. Pour se ramener à cette solution d'une façon générale, soit un instant t_0 d'élongation maximum tel que $\cos\omega t_0 = 1$ ($\omega t_0 = 2k\pi$). Prenons simultanément de nouveaux axes $\overrightarrow{Ox'}$ et $\overrightarrow{Oy'}$ tels que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) = -\Omega_N t_0$, et la nouvelle variable temporelle $t' = t - t_0$.

x et y s'écrivent avec cette nouvelle variable :

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t' \,(\cos \Omega_N t_0 - \Omega_N t' \sin \Omega_N t_0) + x_0 \frac{\Omega_N}{\omega} \sin \omega t' \\ &\qquad (\sin \Omega_N t_0 + \Omega_N t' \cos \Omega_N t_0) \\ y &= x_0 \frac{\Omega_N}{\Omega} \sin \omega t' \,(\cos \Omega_N t_0 - \Omega_N t' \sin \Omega_N t_0) - x_0 \cos \omega t' \\ &\qquad (\sin \Omega_N t_0 + \Omega_N t' \cos \Omega_N t_0). \end{aligned}\right.$$

Le changement de variables s'exprime par :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x \cos \Omega_N t_0 - y \sin \Omega_N t_0, \\ y' &= y \cos \Omega_N t_0 + x \sin \Omega_N t_0. \end{aligned}\right.$$

et conduit à :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x_0 \cos \omega t' + x_0 \frac{\Omega_N^2}{\omega} t' \sin' \omega t' \simeq x_0 \cos \omega t' \\ y' &= \Omega_N x_0 \left(\frac{\sin \omega t'}{\omega} - t' \cos \omega t' \right). \end{aligned}\right.$$

c. q. f. d.

La démonstration est analogue pour les instants t_0 tels que $\cos \omega t_0 = -1$.