

Électrocinétique et Informatique

par Alain et Marcel BURIE,

L'électrocinétique des réseaux linéaires, dont on retrouve en particulier l'étude dans les nouveaux programmes de Mathématiques supérieures, se prête particulièrement bien, avec sa résolution de systèmes d'équations linéaires, à la préparation de programmes susceptibles d'être élaborés sur des miniordinateurs par des programmeurs débutants. Nous nous proposons de montrer ici comment peut être mis en chantier l'un d'entre eux.

I. GEOMETRIE ET SIGNATURE D'UN RESEAU ELECTRIQUE.

I.1. Soit un réseau de conducteurs (nous prendrons pour fixer les idées celui représenté sur la fig. 1). Ce réseau est constitué

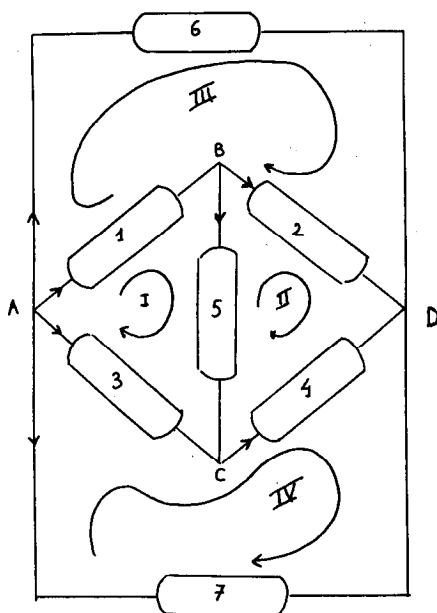


Fig. 1

de d dipôles (ici, $d = 7$) sur lequel on choisit un sens positif arbitraire, de n nœuds indépendants (ici, $n = 3$; le mot indépendant sera précisé ultérieurement, il y a en fait $n + 1$ nœuds) de m mailles indépendantes, avec $n + m = d$, (ici, $m = 4$), sur lequel on choisit un sens de parcours arbitraire.

I.2. Le codage « La maille K contient le dipôle j » peut être représenté par la matrice M (au sens de tableau de nombres), permettant de passer d'un ensemble de dimension d ($d = 7$) à un ensemble de dimension m ($m = 4$) :

M :

	1	2	3	4	5	6	7
I	1	0	-1	0	1	0	0
II	0	1	0	-1	-1	0	0
III	-1	-1	0	0	0	1	0
IV	0	0	1	1	0	0	-1

Sa construction est évidente (le signe — a été pris lorsque le sens positif sur le dipôle est différent du sens de parcours choisi pour la maille). La ligne de M représentant toute autre maille pourrait être obtenue comme combinaison linéaire des précédentes : la nouvelle maille ne serait pas « indépendante ».

Le codage « Le dipôle j est contenu dans la maille K » peut être représenté par la matrice M' , transposée de la précédente (obtenue en permutant lignes et colonnes) :

M' :

	I	II	III	IV
1	1	0	-1	0
2	0	1	-1	0
3	-1	0	0	1
4	0	-1	0	1
5	1	-1	0	0
6	0	0	1	0
7	0	0	0	-1

I.3. Le codage « Le nœud a est contenu dans le dipôle j » peut être représenté par la matrice N permettant de passer d'un ensemble de dimension d ($d = 7$) à un ensemble de dimension n ($n = 3$); par convention, nous prenons le signe + lorsque le nœud est nœud d'entrée du dipôle, — lorsqu'il est nœud de sortie.

N :

	1	2	3	4	5	6	7
A	1	0	1	0	0	1	1
B	-1	1	0	0	1	0	0
C	0	0	-1	+1	-1	0	0

La ligne qui correspondrait au nœud D peut être obtenue par combinaison linéaire des trois premières : D n'est pas indépendant.

Le codage « Le dipôle j contient le nœud α » est représenté par la matrice N' , transposée de N .

I.4. Le codage « Le nœud α est contenu dans la maille K » peut être considéré comme « le nœud α est contenu dans le dipôle j qui est contenu dans la maille K » : il est donc représenté par la matrice $N.M'$. Lorsqu'on effectue le produit $N.M'$,

on trouve :

$$N.M' = 0,$$

ce qui est normal, puisque tout nœud appartient 0 fois ou 2 fois à une maille (une fois comme entrée, une fois comme sortie).

II. VECTEUR INTENSITE ET VECTEUR TENSION.

II.1. Soit le dipôle (1), d'entrée A et de sortie B (le sens positif choisi est celui de A vers B). Pour ce dipôle, nous définissons l'intensité i_1 , algébrique, et la tension $u_1 = V_A - V_B$, algébrique. u_1 représente la chute de potentiel algébrique lorsque l'on va de A vers B. La puissance électrique P_1 dépensée dans le dipôle est $P_1 = u_1 i_1$; elle est positive si le dipôle fonctionne comme récepteur, négative si le dipôle fonctionne comme générateur (convention récepteur).

La relation liant i_1 et u_1 est la relation caractéristique du dipôle constitutif.

II.2. Si l'on considère l'ensemble du réseau, nous avons donc d inconnues intensités $i_1, \dots, i_d$ et d inconnues tensions $u_1, \dots, u_d$ liées entre elles par les relations caractéristiques des dipôles considérés.

$i_1, \dots, i_d$ peuvent être considérées comme les coordonnées d'un vecteur colonne « intensité », que nous notons $|i\rangle$.

$u_1, \dots, u_d$ peuvent être considérées comme les coordonnées d'un vecteur colonne « tension », que nous notons $|u\rangle$.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} = |i\rangle \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = |u\rangle$$

III. LOI DE KIRCHHOFF RELATIVE AUX NŒUDS.

En régime permanent (auquel nous nous limitons ici), la conservation de l'électricité s'exprime par la loi de Kirchhoff : la somme des intensités partant d'un nœud est égale à la somme des intensités y arrivant. D'où les équations (l'équation en D ne serait pas indépendante) :

$$\text{en A} \quad i_1 + i_3 + i_6 + i_7 = 0$$

$$\text{en B} \quad -i_1 + i_2 + i_5 = 0$$

$$\text{en C} \quad -i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{N|i\rangle = |0\rangle}$$

IV. LOI DE KIRCHHOFF RELATIVE AUX MAILLES.

Le champ $\vec{E}$ dérivant d'une fonction potentiel, la somme des chutes de potentiel le long d'une maille est nulle. Appliquée aux mailles I, II, III, IV, la loi de Kirchhoff donne $m = 4$ équations (les autres ne seraient pas indépendantes),

$$\text{pour I} \quad u_1 - u_3 + u_5 = 0$$

$$\text{pour II} \quad u_2 - u_4 - u_5 = 0$$

$$\text{pour III} \quad -u_1 - u_2 + u_6 = 0$$

$$\text{pour IV} \quad u_3 + u_4 - u_7 = 0$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{vmatrix} = 0 \text{ soit } \boxed{M|u\rangle = |0\rangle}$$

V. RESEAUX LINEAIRES.

V.1. Nous nous limitons au cas où tous les dipôles du réseau sont linéaires. Avec nos conventions et en représentant les dipôles actifs comme des générateurs de tension, nous pouvons écrire pour le dipôle (1) par exemple : $u_1 = r_1 i_1 - e_1$

r_1 étant la résistance et e_1 la f.é.m. algébrique du dipôle (e_1 est positif si le sens positif choisi rencontre d'abord la borne —).

Nous avons donc les d équations ($d = 7$) :

$$u_1 = r_1 i_1 - e_1$$

$$u_2 = r_2 i_2 - e_2$$

$$u_7 = r_7 i_7 - e_7$$

V.2. En introduisant la matrice diagonale « résistance » r et le vecteur colonne « f.é.m. » $|e\rangle$,

$$r = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_7 \end{vmatrix} \quad |e\rangle = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{vmatrix}$$

ces équations s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\boxed{|u\rangle = r|i\rangle - |e\rangle}$$

VI. METHODE DE RESOLUTION MATRICIELLE (METHODE DES MAILLES).

VI.1. Nous disposons donc de 2×7 inconnues et de $7 + 3 + 4$ équations :

$$|u\rangle = r|i\rangle - |e\rangle$$

$$N|i\rangle = |0\rangle$$

$$M|u\rangle = |0\rangle$$

Eliminons par exemple les $|u\rangle$. Il vient :

$$N|i\rangle = |0\rangle \quad (3 \text{ équations})$$

$$M r|i\rangle = M|e\rangle \quad (4 \text{ équations}).$$

Si nous imposons au vecteur $|i\rangle$ d'être du type $|i\rangle = M^t|I\rangle$, le vecteur $|I\rangle$ ayant 4 composantes $I_I, I_{II}, I_{III}, I_{IV}$ relatives aux 4 mailles, nous sommes certains que, quel que soit $|I\rangle$, les lois des nœuds $N|i\rangle = 0$ sont vérifiées puisque :

$$N|i\rangle = |0\rangle \iff N M^t|I\rangle = |0\rangle$$

et que nous avons montré que $N M^t = 0$.

(En fait, nous avons considéré les courants dans chaque dipôle comme la superposition de courants circulant dans les mailles : les lois des nœuds sont donc satisfaites physiquement de manière évidente).

Il suffit donc de chercher le vecteur $|I\rangle$ obéissant au système (4 équations à 4 inconnues) $M r M^t|I\rangle = M|e\rangle$.

Appelons R la matrice carrée (4,4)

$$R = M r M^t$$

et $|E\rangle$ le vecteur colonne (4,1)

$$|E\rangle = M|e\rangle$$

dans l'exemple choisi :

$$R = \begin{vmatrix} r_1+r_3+r_5 & -r_5 & -r_1 & -r_3 \\ -r_5 & r_2+r_4+r_5 & -r_2 & -r_4 \\ -r_1 & -r_2 & r_1+r_2+r_6 & 0 \\ -r_3 & -r_4 & 0 & r_3+r_4+r_7 \end{vmatrix}$$

On est amené à résoudre le système (4 équations à 4 inconnues) :

$$R|I\rangle = |E\rangle$$

Cette résolution revient à écrire, en introduisant la matrice inverse R^{-1} de R : $|I\rangle = R^{-1}|E\rangle$.

Le vecteur $|i\rangle$ cherché est donné par $|i\rangle = M^t|I\rangle$:

$$|i\rangle = M^t(M r M^t)^{-1} M|e\rangle.$$

VI.2. *Remarque* : La méthode de résolution est la méthode des courants de maille, décrite dans de nombreux ouvrages (voir les livres d'électricité des classes de Mathématiques supérieures et spéciales ; voir aussi des livres tels que : « Angot, Compléments de Mathématiques... »).

VI.3. *Remarque* : La matrice $R = M r M^t$ est, par sa construction à partir de la matrice diagonale r , une matrice symétrique

$$(R^t = (M r M^t)^t = (M^t)^t r^t M^t = M r M^t = R).$$

Ses valeurs propres sont donc réelles. On peut d'ailleurs montrer, en faisant appel aux puissances dépensées, qu'elles sont toutes positives :

En appelant $\langle u |$ le vecteur ligne transposé du vecteur colonne $|u\rangle$, on a : $P = \langle u | i \rangle = \sum_{j=1}^7 u_j i_j = 0$ (la somme des puissances « dépensées » dans les différents dipôles est nulle), relation qui découle de la loi des nœuds :

$$N |i\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow |i\rangle = M^t |I\rangle$$

et de la loi des mailles $M |u\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \langle u | M^t = \langle 0 |$, ces deux lois permettant donc d'écrire :

$$P = \langle u | i \rangle = \langle u | M^t | I \rangle = 0.$$

Dans le cas de dipôles linéaires, P peut s'écrire :

(comme $|u\rangle = r|i\rangle - |e\rangle \Rightarrow \langle u| = \langle i|r - \langle e|$)

$$P = \langle i|r|i\rangle - \langle e|i\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^7 r_j i_j^2 = \langle e|i\rangle = \langle e|M^t|I\rangle = \langle E|I\rangle$$

(la puissance « fournie » par les f.é.m. est toujours positive et égale à la puissance dépensée par effet Joule).

Si, donc, $|I_{\lambda_R}\rangle$ est un vecteur propre de R de valeur propre λ_R ,

$$|E_{\lambda_R}\rangle = \lambda_R |I_{\lambda_R}\rangle, \quad \lambda_R \langle I_{\lambda_R} | I_{\lambda_R} \rangle \gg 0 \Rightarrow \lambda_R > 0$$

propriété qui nous sera utile dans la suite.

VI.4. *Remarque* : Nous aurions pu effectuer une résolution duale « en tension ». En représentant les dipôles actifs en générateurs de courant, nous avons :

$$i_1 = i_{01} + g_1 u_1$$

qui conduit à la représentation matricielle :

$$|i\rangle = |i_0\rangle + g|u\rangle$$

$|i_0\rangle$ étant le vecteur colonne « courant de court-circuit », de composantes $i_{01}, i_{02}, \dots, i_{07}$ et g la matrice diagonale « conductance » de termes diagonaux $g_1, g_2, \dots, g_7$.

$|i\rangle$ et $|u\rangle$ obéissent à $N|i\rangle = |0\rangle$ et $M|u\rangle = |0\rangle$.

Par élimination de $|i\rangle$, on a : $Ng|u\rangle = -N|i_0\rangle$.

On cherche $|u\rangle$ de la forme $|u\rangle = N^t|U\rangle$ (ce qui implique que $M|u\rangle = |0\rangle$ car $MN^t = 0$).

$|U\rangle$ obéit à $NgN^t|U\rangle = -N|i_0\rangle$ ou ...

$$\dots |U\rangle = -(NgN^t)^{-1}N|i_0\rangle$$

donc :

$$|u\rangle = -N^t(NgN^t)^{-1}N|i_0\rangle.$$

VII. ORGANIGRAMME.

Pour la résolution à l'aide d'un miniordinateur de la formule $|i\rangle = M^t(M^tM^t)^{-1}M|e\rangle$, nous proposons l'organigramme ci-contre :

De nombreuses méthodes peuvent être utilisées pour résoudre le système $R|I\rangle = |E\rangle$ (voir par exemple « BAKHAVALOV : *Méthodes numériques* »). Nous en avons utilisé trois :

VII.1. PREMIÈRE MÉTHODE : INVERSION DE LA MATRICE.

On calcule la matrice inverse R^{-1} par la méthode de Cramer et on déduit $|I\rangle$ par $|I\rangle = R^{-1}|E\rangle$. Le calcul de R^{-1} nécessite le calcul du déterminant de R et des différents mineurs, ces calculs faisant eux-mêmes appel aux calculs des substitutions sur l'ensemble $\{1, m\}$.

VII.2. DEUXIÈME MÉTHODE : ÉLIMINATION DE GAUSS.

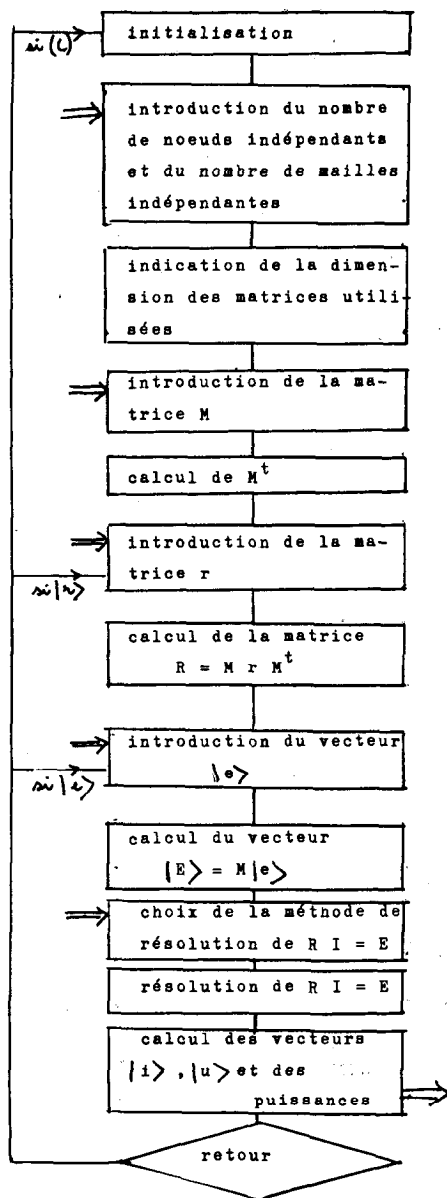
Elle revient à mettre R sous la forme d'un produit de 2 matrices triangulaires : $R = BD$, avec :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 1 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 1 & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients de B et D se calculent par les relations de récurrence :

$$b_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{ij}d_{jk} \quad \text{pour } k \leq i$$

$$d_{ik} = \frac{1}{b_{ii}} (a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}d_{jk}) \quad \text{pour } i < k$$



en effectuant les calculs successivement pour les ensembles

$$(i, k) = (1, 1) \dots (1, m), (2, 1) \dots (2, m) \dots (m, 1) \dots (m, m).$$

On résout ensuite $B|J\rangle = |E\rangle$ en calculant successivement $J_I, J_{II}, J_{III}, J_{IV}$ (calcul direct) puis $D|I\rangle = |J\rangle$ en calculant successivement $I_{IV}, I_{III}, I_{II}, I_I$ (calcul par remontée).

VII.3. TROISIÈME MÉTHODE : ITÉRATION.

Le système $R|I\rangle = |E\rangle$ peut s'écrire :

$$|I\rangle = |I\rangle - \alpha(R|I\rangle - |E\rangle)$$

ou $|I\rangle = F|I\rangle + \alpha|E\rangle$, F étant la matrice $F = 1 - \alpha R$ (1 : matrice identité). On calcule $|I\rangle$ par itération, au moyen de la relation permettant de passer d'un vecteur $|I_n\rangle$ au vecteur $|I_{n+1}\rangle$:

$$|I_{n+1}\rangle = F|I_n\rangle + \alpha E.$$

Pour que le processus d'itération ne diverge pas, les valeurs propres de F , $\lambda_F = 1 - \alpha\lambda_R$, doivent être toutes de module inférieur à 1.

Les λ_R étant toutes positives (voir VI.3.), ces conditions peuvent être réalisées en choisissant pour α par exemple (fig. 2)

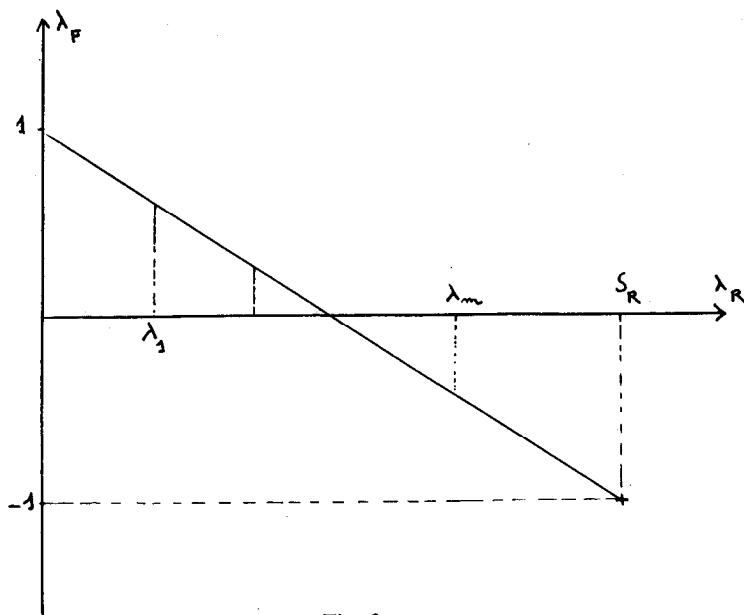


Fig. 2

$\alpha = 2/S_R$, S_R étant la somme des λ_R , somme que l'on connaît puisqu'elle est égale à la trace de la matrice R (dans notre exemple, $S_R = 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + r_6 + r_7$).

VIII. CONCLUSIONS.

VIII.1. SANS ORDINATEUR.

Du point de vue pratique, la résolution matricielle ne présente pas d'intérêt : chacun sait comme il est fastidieux de faire le produit de matrices et surtout d'inverser une matrice.

Du point de vue théorique, elle permet néanmoins de démontrer les théorèmes classiques d'électrocinétique linéaire (superposition, réciprocité...). Par exemple, le théorème de réciprocité est ici évident : il consiste à affirmer que la matrice $M'(M r M')^{-1}M$ est symétrique, ce qui découle immédiatement de sa construction à partir de la matrice r diagonale (voir VI.3).

VIII.2. DU POINT DE VUE PROGRAMMATION.

Le programme a été réalisé au Club « Informatique » du lycée Pasteur à Neuilly sur un miniordinateur « TRS 80 » en langage basic.

Nous remercions ceux qui nous ont aidé par leurs conseils, leurs suggestions, leurs critiques, en particulier M. DALLARD et M. MOREAU.

Si on lui donne le nombre de mailles indépendantes, le nombre de nœuds indépendants, la matrice M , les résistances et les f.é.m. des dipôles, l'ordinateur fournit l'intensité, la tension, la puissance relatives à chaque dipôle.

Les seules parties « intelligentes » à effectuer par l'opérateur sont :

- l'analyse du circuit et en particulier son codage afin d'écrire la matrice M ,
- le choix de la méthode de résolution de $R | I \rangle = | E \rangle$.

Au niveau de nos connaissances et de nos moyens (donc avec toutes les réserves que cela comporte), nous avons tiré les conclusions suivantes sur les trois méthodes utilisées :

- *Inversion de la matrice R* : cette méthode lourde ne convient que pour des matrices de dimension faible (nous l'avons programmé pour $m \leq 5$) ; elle peut être intéressante si l'on fait varier les f.é.m. du circuit sans faire varier les résistances.
- *Elimination de Gauss* : c'est la méthode la plus rapide et c'est celle que nous conseillons.
- *Itération* : la résolution est précise mais elle est longue ; elle peut être intéressante si l'on fait varier lentement un seul paramètre du circuit.

En effet, le programme proposé peut s'inclure comme sous-programme d'un programme plus vaste d'optimisation : recherche, en faisant varier un paramètre, de l'obtention d'une intensité, d'une tension, d'une puissance maximales ou minimales dans un dipôle donné.

ANNEXE :

RESOLUTION D'UN SYSTEME PAR LA METHODE D'ELIMINATION DE GAUSS

Soit, par exemple, le système :

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

soit : $A|x\rangle = |a\rangle$.

I. Principe.

I.1. La méthode d'élimination de Gauss revient : à rendre le coefficient de x_1 égal à 1 dans la première équation (ici, en multipliant par 1/2) ; à supprimer le terme en x_1 et à rendre le coefficient du terme en x_2 égal à 1 dans la seconde (ici, en retranchant la première et en multipliant par 2) ; à supprimer les termes en x_1 et en x_2 et à rendre le coefficient du terme en x_3 égal à 1 dans la troisième, etc. Le système est alors mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3/10 & 1/2 & -1/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 23 \\ 4 \end{pmatrix}$$

soit :

$$D|x\rangle = C|a\rangle.$$

Cette forme permet un calcul simple par remontée :

$$\begin{aligned} x_3 &= 4, & x_2 + 5(4) &= 23 \Rightarrow x_2 = 3, \\ x_1 + 3/2(3) + 1/2(4) &= 17/2, & x_1 &= 2. \end{aligned}$$

I.2. Plutôt que d'écrire $D|x\rangle = C|a\rangle$, on préfère introduire la matrice inverse de C : $B = C^{-1}$, c'est-à-dire écrire le système sous la forme : $BD|x\rangle = BC|a\rangle \Rightarrow BD|x\rangle = |a\rangle$

B (inverse de C, triangulaire inférieure) est une matrice triangulaire inférieure; D est une matrice triangulaire supérieure.

II. Calculs.

II.1. CALCUL DE B ET D.

On a donc :

$$b_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i < k$$

$$d_{jk} = 0 \quad \text{pour} \quad k < j \quad (\text{avec} \quad d_{jj} = 1).$$

Puisque $BD = A$,

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} d_{jk} = a_{ik}.$$

On peut, dans la sommation, s'arrêter lorsque j est égal au minimum de i ou de k .

La dernière expression peut donc s'écrire :

$$\sum_{j=1}^k b_{ij} d_{jk} = a_{ik} \quad \text{si} \quad k \leq i$$

$$\sum_{j=1}^i b_{ij} d_{jk} = a_{ik} \quad \text{si} \quad i < k.$$

On en déduit :

$$b_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{ij} d_{jk} \quad \text{pour} \quad k \leq i$$

$$d_{ik} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} d_{jk} \right) \quad \text{pour} \quad i < k.$$

Les calculs s'effectuent successivement pour les ensembles $(i, k) = (1, 1), (1, 2) \dots, (1, m), (2, 1) \dots, (2, m), \dots, (m, 1) \dots, (m, m)$.

Exemple : Ici,

$$b_{11} = a_{11} = 2$$

$$d_{11} = 1$$

$$b_{12} = 0$$

$$d_{12} = \frac{a_{12}}{b_{11}} = 3/2$$

$$b_{13} = 0$$

$$d_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}} = 1/2$$

$$b_{21} = a_{21} = 1$$

$$d_{21} = 0$$

$$b_{22} = a_{22} - b_{21} d_{12} = 1/2$$

$$d_{22} = 1$$

$$b_{23} = 0 \qquad d_{23} = \frac{a_{23} - b_{21} d_{13}}{b_{22}} = 5$$

$$b_{31} = a_{31} = -1 \qquad d_{31} = 0$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31} d_{12} = 5/2 \qquad d_{32} = 0$$

$$b_{33} = a_{33} - b_{31} d_{13} - b_{32} d_{23} = -10 \qquad d_{33} = 1$$

On a donc écrit A sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 5/2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A = B • D

(on pourra vérifier que B est bien l'inverse de la matrice C que nous avons calculée au I.1).

II.2. RÉOLUTION.

Pour résoudre $B D |x\rangle = |a\rangle$,

II.2.1. On résout d'abord $B |y\rangle = a$ (calcul direct),
ici :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 5/2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$$

soit :

$$2 y_1 = 17 \Rightarrow y_1 = 17/2$$

$$17/2 + 1/2 y_2 = 20 \Rightarrow y_2 = 23$$

$$-17/2 + 5/2 \cdot 23 - 10 y_3 = 9 \Rightarrow y_3 = 4$$

(remarquons que le vecteur $|y\rangle$ tel que $B |y\rangle = a$ peut s'écrire $|y\rangle = B^{-1} |a\rangle = C |a\rangle$; il avait été calculé de cette manière au I.1);

II.2.2. On résout ensuite $D |x\rangle = |y\rangle$ (calcul par remontée) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 23 \\ 4 \end{pmatrix}$$

soit :

$$x_3 = 4$$

$$x_2 + 5(4) = 23 \Rightarrow x_2 = 3$$

$$x_1 + 3/2(3) + 1/2(4) = 17/2 \Rightarrow x_1 = 2.$$