

Le filtrage numérique *

par Yves BERNARD,
Conservatoire National
des Arts et Métiers, Paris.

1. INTRODUCTION.

— Un filtre est un système capable de séparer les constituants d'un mélange en tenant compte d'une de leurs caractéristiques. Dans le cas du filtre électrique, cette caractéristique est la FRÉQUENCE du signal sinusoïdal, car, depuis FOURIER (1822) on sait qu'un signal quelconque peut être considéré comme un mélange de signaux sinusoïdaux. Un filtre PASSE-BAS par exemple, laissera passer toutes les composantes sinusoïdales de fréquence inférieure à f_0 , et stoppera toutes les composantes de fréquence supérieure. Les filtres PASSE-BANDE, COUPE-BANDE, PASSE-HAUT,... sont aussi aisés à décrire par des graphiques du type de ceux de la fig. 1. L'abscisse est le logarithme de la fréquence, de façon à concentrer l'échelle. L'ordonnée est liée au rapport des amplitudes des tensions à la sortie et à l'entrée, d'un signal sinusoïdal de la fréquence considérée ; on introduit la grandeur :

$$a = 10 \log_{10} \left[\frac{V_e}{V_s} \right]^2$$

qui se mesure en DÉCIBEL (dB) qui est plus commode, à la fois parce qu'elle comprime l'échelle, et parce qu'elle fait intervenir le carré des tensions électriques, proportionnel au rapport des puissances. Dans un filtre idéal, a vaut 0 dB dans les bandes passantes et ∞ dans les bandes coupées.

— Cette notion de filtre électrique s'est dégagée vers la fin de la première guerre mondiale. C'est l'Américain CAMPBELL qui a proposé, vers 1915, des circuits composés de résistances, de condensateurs et de bobines pour effectuer ce filtrage en fréquence. Les travaux n'ont pas cessé depuis, et aujourd'hui le FILTRAGE est une des grandes fonctions de l'électronique. Les filtres constituent une classe très importante des circuits utilisés dans les systèmes de télécommunications et d'automatique. Nous

(*) Exposé présenté le 1^{er} septembre 1981 à Toulouse, lors du stage d'information des professeurs de physique, organisé par le Centre National d'Etudes Spatiales et l'Union des Physiciens.

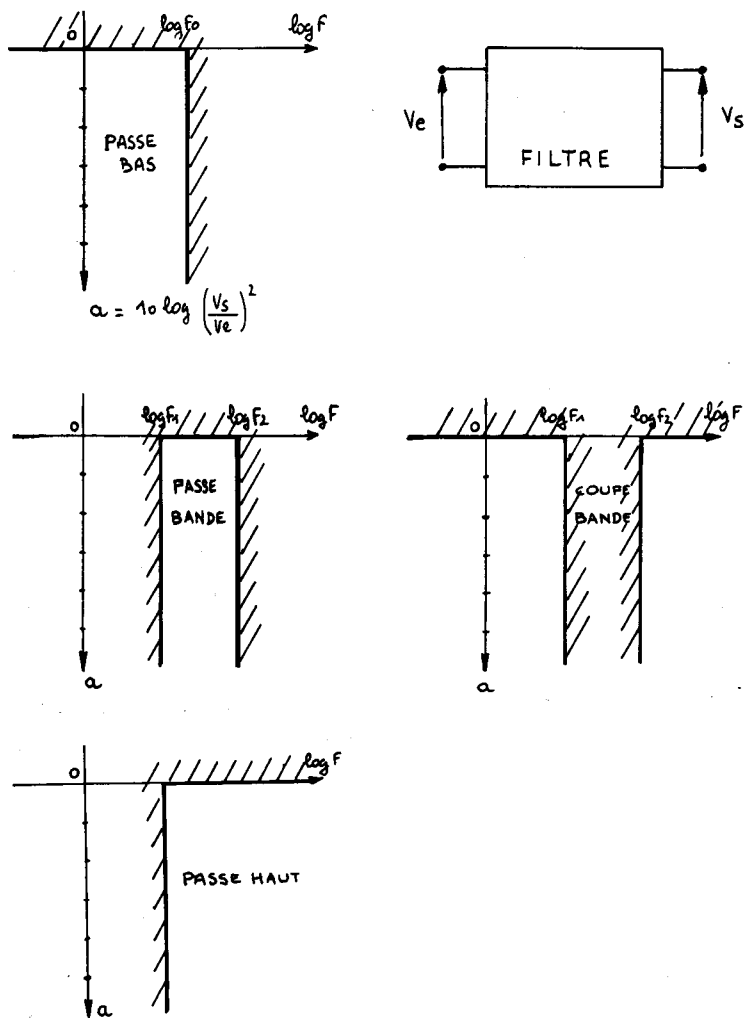


Fig. 1

allons en détailler quelques aspects et notamment la conception la plus récente, le filtrage numérique.

Mais auparavant, il faut comprendre pourquoi l'utilité du filtrage en fréquence n'a pas été perçue pendant trois-quarts de

siècle, car, c'est en 1844 que le premier système de télécommunication électrique, le TÉLÉGRAPHE, a été inventé. Pendant 75 ans, on a transmis des signaux électriques sans se préoccuper de trier les fréquences, et aujourd'hui, ce tri est une fonction essentielle ; quelles furent les motivations de ces études conduites à partir des années 1920 ?

2. QUELQUES MOTS D'HISTOIRE...

— Le télégraphe électrique naît en 1844. Son principe est bien connu. Une pile électrique (VOLTA, 1800) alimente un électro-aimant (WEBER-GAUSS, 1833) par l'intermédiaire d'un long fil conducteur (OHM, 1836). Dans le premier système, l'émetteur et le récepteur sont éloignés de 65 km (Washington - Baltimore). Si l'interrupteur est ouvert, l'électro-aimant n'attire pas la petite pièce de fer, solidaire d'une plume, inscrivant une trace sur le papier qui se déroule.

Si l'interrupteur est fermé, le courant traverse l'électro-aimant et la plume se déplace ; la trace aussi. On dispose d'un système binaire (1.0) pour transmettre l'information (fig. 2).

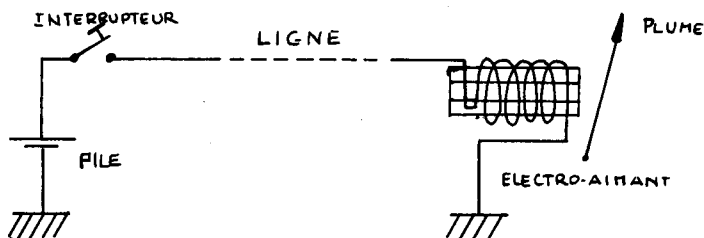


Fig. 2

— Mais, à l'époque, on ne disposait pas d'horloges capables d'assurer le cadencement, en divisant le temps en intervalles égaux, où l'on puisse observer (ou non) un « digit », suivant que l'interrupteur était fermé ou ouvert. Le grand mérite de l'artiste peintre américain, Samuel MORSE fut d'inventer un système de codage, l'alphabet MORSE, adapté à la manœuvre manuelle de l'interrupteur. On émet une succession d'impulsions courtes (points) et d'impulsions longues (traits) dont la durée précise importe peu, pourvu que les deux classes soient aisément discernables. Ces impulsions sont séparées par des silences brefs (écarts entre impulsions d'un même groupe) et longs (écarts entre impulsions de groupes adjacents) pour lesquels la même remarque s'impose. Le code MORSE affecte les symboles les plus courts aux lettres les plus fréquentes ($e = 1$ point) de façon à améliorer le débit de l'information.

— Le télégraphe se développe rapidement ; l'essentiel des progrès techniques concerne la réalisation des lignes conductrices, de grande longueur et bien isolées. Dès 1850, on peut immerger ces lignes (isolées à la gutta-percha) dans la Manche, entre Calais et Douvres. En 1856, une ligne de 850 km joignant Varna (Bulgarie) à Balaklava (Crimée) dans la Mer Noire... La longueur était suffisante pour que l'on puisse observer la durée de propagation. Le savoir-faire des opérateurs à l'émission et à la réception (« lecture » du message d'après le son...) fit aussi des progrès considérables. Le télégraphe est un système très utile et très répandu en 1914... et on ne voit se manifester aucun besoin de filtrage en fréquence (ni d'ailleurs de fréquence privilégiée).

— 1876 marque une seconde étape importante. Cette année-là, l'Américain Graham BELL lance sur le marché le téléphone, utilisant la modulation d'un courant continu par une self variable (fig. 3). Le noyau magnétique d'une bobine comporte un entrefer

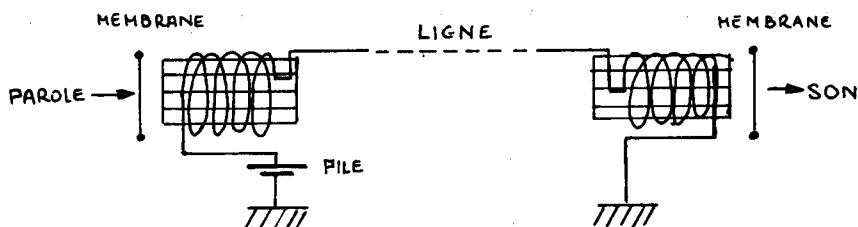


Fig. 3

dont la largeur varie si l'on parle au voisinage car la pression sonore déplace la membrane qui limite l'entrefer. La variation de réluctance crée une variation de self, et cela modifie la valeur du courant. La variation du courant dans l'autre bobine, de structure identique, entraîne une attraction plus ou moins grande de la membrane, qui vibre, reproduisant à peu près les vibrations de la première membrane, donc émettant un son semblable à la parole. On transmet ainsi la parole à distance, grâce aux variations d'un courant.

— Ce système connut rapidement le succès. Les progrès techniques ont été faits dans la structure de l'émetteur (le microphone à charbon, de « résistance variable », remplaçant l'émetteur de BELL, de rendement médiocre) et surtout dans la répartition géographique des appareils. Si N personnes désirent être

reliées entre elles, il faut $\frac{1}{2} N(N-1)$ lignes, ce qui immobilise

beaucoup de cuivre, inutilisé la plupart du temps. Il est préférable de relier tous les « abonnés » à un « central », avec N lignes,

et de prévoir un système qui connecte au moment opportun les extrémités des lignes des abonnés qui désirent se parler. D'abord manuelle, cette opération devint automatique grâce à un système télégraphique. Chaque abonné utilise d'abord sa ligne pour transmettre un message codé, qui, au central, déplace les commutateurs pour réaliser la connexion nécessaire. Puis il utilise sa ligne, connectée à celle de son correspondant, comme téléphone.

Là encore, on n'aperçoit pas la nécessité de filtrer quelques-unes des fréquences. Un son musical pur est un signal sinusoïdal ; mais la parole est toujours un mélange de signaux sinusoïdaux dont les fréquences vont sensiblement de 20 Hz à 4 000 Hz et si l'on veut que le signal soit intelligible, il faut tout conserver.

— Les expériences de l'Allemand Heinrich HERTZ, en 1887, vont nous mettre sur la voie que nous recherchons. On peut constater expérimentalement que les variations du courant dans un fil (antenne d'émission) créaient, au voisinage, un champ électromagnétique, qui se propageait à distance. Un autre fil (antenne de réception) frappé par ces ondes, était le siège d'un courant induit, dont les variations reproduisaient celles du courant dans l'antenne d'émission (fig. 4).

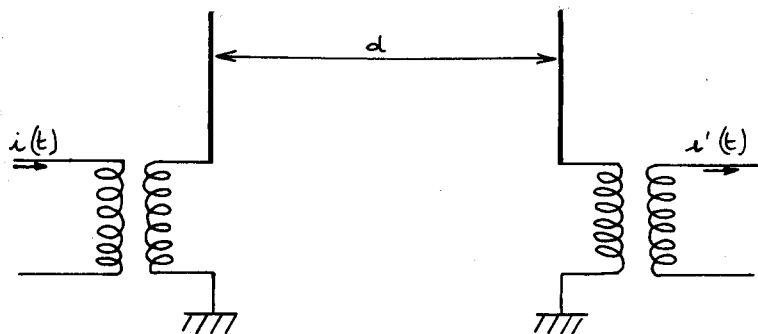


Fig. 4

Dès lors, on pouvait transmettre à distance, et sans fil, des variations de courant, donc penser à la télégraphie ou à la téléphonie sans fil.

En fait, dans ce cas, la théorie avait précédé l'expérience, grâce aux travaux de l'Ecossois James-Clerk MAXWELL publiés en 1875. Une exploitation aujourd'hui classique de cette théorie faite par FITZGERALD en 1883, montre que le champ rayonné a plusieurs composantes dont l'importance décroît avec la distance d ; certaines décroissent comme $1/d^3$ ou $1/d^2$ et sont sans intérêt à quelques mètres ; une seule des composantes décroît comme $1/d$ et peut donc être utilisable au loin. Or, on constate que si l'an-

tenne est excitée par un courant sinusoïdal de fréquence f , cette composante utile du champ électromagnétique a une amplitude proportionnelle à f^2 , ce qui veut dire que les basses fréquences ne rayonneront pratiquement pas, alors que les hautes fréquences rayonnent beaucoup. Le résultat est clair : si l'on alimente l'antenne avec le signal télégraphique, ou avec le signal « audio », on n'obtiendra qu'un rayonnement négligeable, car il s'agit de signaux basse-fréquence.

— Il fallut alors introduire la notion de « porteuse ». Un signal sinusoïdal de haute fréquence F alimente l'antenne d'émission et crée une onde électromagnétique qui, à distance, reproduit le signal sinusoïdal dans l'antenne de réception. Puis, l'information est placée sur cette porteuse, par exemple en modulant son amplitude. La fig. 5 montre un signal porteur modulé par un

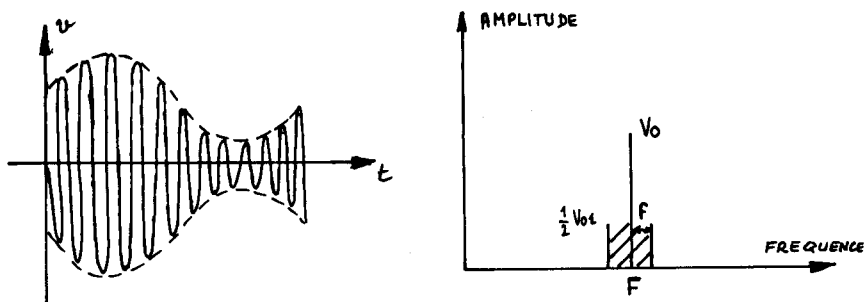


Fig. 5

signal sinusoïdal de basse fréquence. Ce dernier cas correspond à la description mathématique :

$$v = V_0 [1 + \varepsilon \sin 2\pi ft] \sin 2\pi Ft$$

qui s'écrit encore :

$$v = V_0 \sin 2\pi Ft \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} V_0 \varepsilon \cos 2\pi (F - f) t - \frac{1}{2} \varepsilon V_0 \cos 2\pi (F + f) t.$$

Ainsi, à une modulation à la fréquence f (disons une fréquence audio, comme 4 000 Hz) correspondra 3 fréquences dans l'onde électromagnétique F et $F \pm f$ (fig. 5). Un signal audio, qui s'étend, dans la bande de base, entre 0 et 4 000 Hz va s'étendre, une fois « placé sur la porteuse », dans la bande $F \pm 4 000$ Hz, soit sur 8 000 Hz de part et d'autre de la porteuse.

— On aperçoit alors très clairement l'importance du filtrage, car le circuit est ouvert. L'antenne peut recevoir un très grand

nombre d'autres signaux ; ce sera catastrophique s'ils se trouvent dans la même bande de fréquence. Mais s'ils sont dans des bandes différentes, on pourra s'en débarrasser par un filtrage adéquat.

Le filtrage en fréquence apparaît ainsi comme un outil essentiel dans les transmissions sans fil, travaillant avec des porteuses, pour se protéger des autres fréquences indésirables.

— Lorsque les filtres furent assez perfectionnés pour laisser passer la bande utile de modulation et stopper pratiquement les autres fréquences, on put réaliser un multiplex (dès 1918 entre Pittsburgh et Baltimore). On utilise pour cela, sur la même ligne téléphonique, un grand nombre de porteuses, de fréquences $F_1, F_2, F_3, \dots$ chacune supportant un message-audio. Pour que cela fonctionne, il faut, comme le montre la fig. 6 que l'écart F

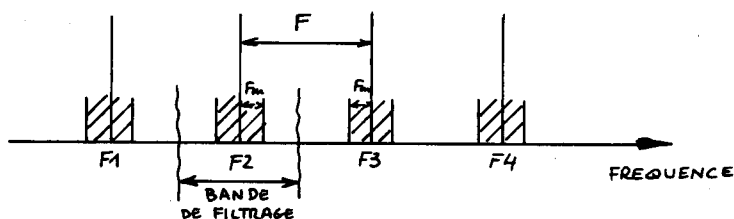


Fig. 6

entre deux fréquences porteuses soit supérieur au double de la fréquence maximum f_m , que l'on trouve dans le signal modulant. Il faut disposer d'une batterie de filtres passe-bande laissant $2 f_m$ (soit 8 000 Hz dans le cas de la parole). A partir de 1930, les systèmes de télécommunications devinrent de grands consommateurs de filtres, et la sagacité des spécialistes de la « synthèse » de ces circuits fut mise à l'épreuve en cherchant des performances de plus en plus grandes. Une batterie de filtres devenait un outil essentiel de toute transmission électrique.

Pour clore ce bref historique, signalons un autre système qui allait exiger des filtres. C'est la boucle de réaction, base des amplificateurs efficaces et aussi des servo-mécanismes. Ce montage a été créé par BLACK vers 1923 (fig. 7). Un amplificateur simple, de gain A , réalimente son entrée, par un circuit de réaction. Avant de fermer la boucle, il est opportun de prévoir l'instabilité qui peut se produire si un signal sinusoïdal, après avoir parcouru la boucle revient amplifié, et en phase (ou, plus généralement déphasé de 2π). Le système est alors instable, car le moindre signal perturbateur s'amplifie sans arrêt en « tournant » dans la boucle. Il faut donc « faire la chasse » aux fréquences où le déphasage est égal à 2π , et veiller à ce que pour ces fréquences, le gain de la boucle soit inférieur à l'unité. Cela consiste

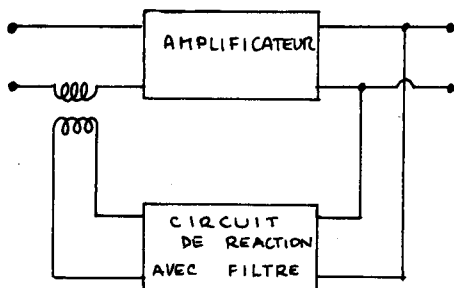


Fig. 7

à introduire un filtrage en fréquence dans le circuit de réaction qui, pour certaines plages de fréquences affaiblit le gain. C'est une autre cause du développement rapide de l'industrie du filtre.

3. CIRCUITS ELECTRIQUES POUR LE FILTRAGE DES FREQUENCES.

— Dans les années 1920, les composants utilisables pour réaliser des circuits étaient essentiellement passifs : il s'agissait de résistances, de condensateurs et de bobines de self-induction. Le seul composant actif connu, la triode, était trop délicat pour être introduit dans un circuit où, *a priori*, l'amplification ne s'imposait pas. Il convient de ne pas oublier ce qu'était un tube radio, vers 1920 : un composant fragile, volumineux, exigeant deux batteries (6 volts et 110 volts) pour fonctionner et dégageant beaucoup de chaleur... Le fabricant de circuits ne prévoyait une triode dans un schéma que si cela était absolument indispensable.

— Depuis les années 1950, les choses ont considérablement évolué, grâce au transistor. On trouve aujourd'hui des amplificateurs à transistor, baptisés « amplificateur opérationnel » dont l'emploi est très simple ; il suffit d'une pile de 6 volts pour alimenter ce composant petit et robuste.

Le composant le plus volumineux est aujourd'hui la bobine de self-induction, dont on cherche d'ailleurs à éviter l'emploi, alors que celui d'un amplificateur est devenu simple. Très schématiquement, les trente années comprises entre 1920 et 1950 ont été l'ère des filtres passifs, avec R, L et C tandis que les vingt années comprises entre 1950 et 1970 auront vu l'ère des filtres actifs, avec R, C et des amplificateurs à transistor, en évitant d'utiliser L, élément lourd et volumineux.

— Donnons quelques exemples simples de calculs de filtres en montrant comment l'on aboutit à la description esquissée dans l'introduction. Comme il s'agit d'exprimer le comportement d'un

circuit en régime sinusoïdal, on utilise la notation complexe, introduite par STEINMETZ en 1904. La fig. 8 donne le plus simple des filtres passifs RC. La « fonction de transfert » est le quotient de la tension de sortie (en notation complexe) par la tension d'entrée. On obtient :

$$T = \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

en appelant ω la pulsation ($\omega = 2\pi f$) et en posant :

$$v_1 = V_1 e^{j\omega t} \quad v_2 = V_2 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$T_0 = \frac{1}{1 + RG} \quad \omega_0 = \frac{1 + RG}{RC}$$

C'est un filtre du premier ordre.

Il en résulte que :

$$a = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

en mesurant l'affaiblissement à partir de l'affaiblissement du continu fixé à 0 dB (fig. 8).

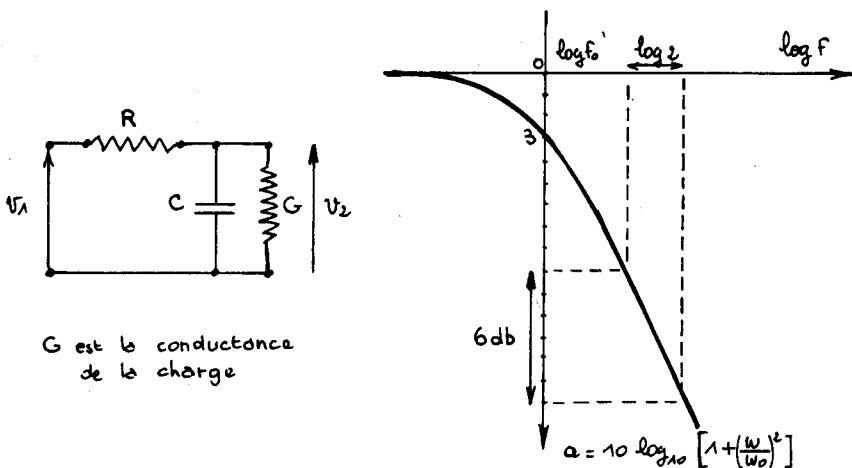


Fig. 8

Le déphasage imposé par le filtre vaut :

$$\varphi = - \text{Arc tg } \frac{\omega}{\omega_0}$$

Ce montage est évidemment un filtre passe-bas. Pour $\omega < \omega_0$, l'affaiblissement a est compris entre 0 et 3 dB. Pour des fréquences supérieures, l'affaiblissement augmente rapidement ; aux fréquences élevées, ($\omega \gg \omega_0$), on constate que l'affaiblissement augmente de 6 dB chaque fois que la fréquence double (passage à l'octave).

→ Ce schéma R, C passif est simple ; malheureusement, ses caractéristiques dépendent de G , la conductance de charge qui peut varier. Avec un montage actif comprenant un amplificateur de gain A très élevé, on peut éliminer cet inconvénient, en conservant l'expression de T . La fig. 9 donne le schéma d'un filtre actif pour lequel :

$$T_0 = \frac{Aq}{A(R+q) + (2q+R)} \approx \frac{q}{R+q} \dots$$

$$\omega_0 = \frac{A(R+q) + (2q+R)}{CqR(2+A)} \approx \frac{R+q}{CRq}$$

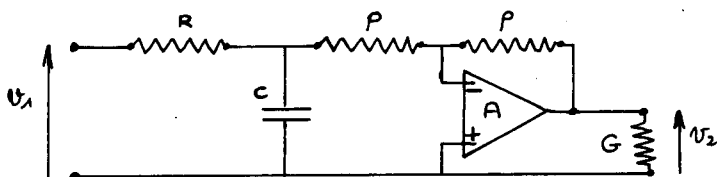


Fig. 9

dans le cas usuel où A est très élevé, et où l'impédance d'entrée de l'amplificateur est si élevée que l'on peut négliger le courant qui entre par les bornes $+$ et $-$ (on obtient $10^{12} \Omega$). La conductance de la charge, G n'intervient plus. Si l'impédance de sortie de l'amplificateur est négligeable, on peut placer plusieurs cellules en cascade, avec des valeurs de R et C différentes et l'on obtient un filtre dont la fonction de transfert est de la forme :

$$T = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{T_1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{T_3}{1 + j \frac{\omega}{\omega_3}} \dots$$

Nous voyons apparaître une méthode puissante de synthèse de filtre, en plaçant en cascade des cellules actives simples.

— Donnons encore, sur la fig. 10 le schéma d'un filtre passif utilisant une self. Le calcul conduit à :

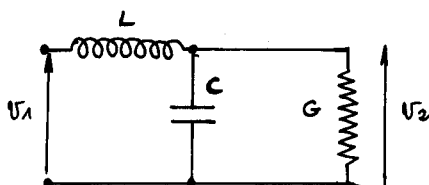


Fig. 10

$$T = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{1 + jGL\omega - LC\omega^2}$$

formule qui sera utile dans la suite. Suivant les valeurs des paramètres, on peut obtenir pour a des courbes de formes très différentes.

On a :

$$a = 10 \log_{10} [1 + (G^2 L^2 - 2CL)\omega + C^2 L^2 \omega^4]$$

$$\varphi = \text{Arc tg } \frac{GL\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

— Comment, avec de tels schémas, peut-on satisfaire les desiderata du client. Ceux-ci s'expriment avec le « gabarit ». Pour un filtre passe-bas, on demandera par exemple :

- que dans l'intervalle $0 - \omega_c$, l'affaiblissement soit inférieur à une certaine valeur, 3 dB par exemple ;
- que, pour la pulsation $2\omega_c$ (octave de la coupure), l'affaiblissement a_2 soit aussi grand que possible.

La fig. 11 donne trois solutions possibles avec les exemples que nous venons de traiter. Avec le filtre du premier ordre (fig. 8), un seul cadrage est possible et conduit à :

$$\omega_c = \omega_0 \quad a_2 = 7 \text{ dB.}$$

Avec le filtre LC du second ordre, on peut envisager deux cadrages, l'un, dit de « BUTTERWORTH » donne :

$$a_2 = 12 \text{ dB}$$

avec les conditions :

$$C = \frac{G}{\omega_0 \sqrt{2}} \quad L = \frac{\sqrt{2}}{G \omega_0}.$$

L'autre, dit de « TCHEBYTCHEFF » donne :

$$a_2 = 14 \text{ dB}$$

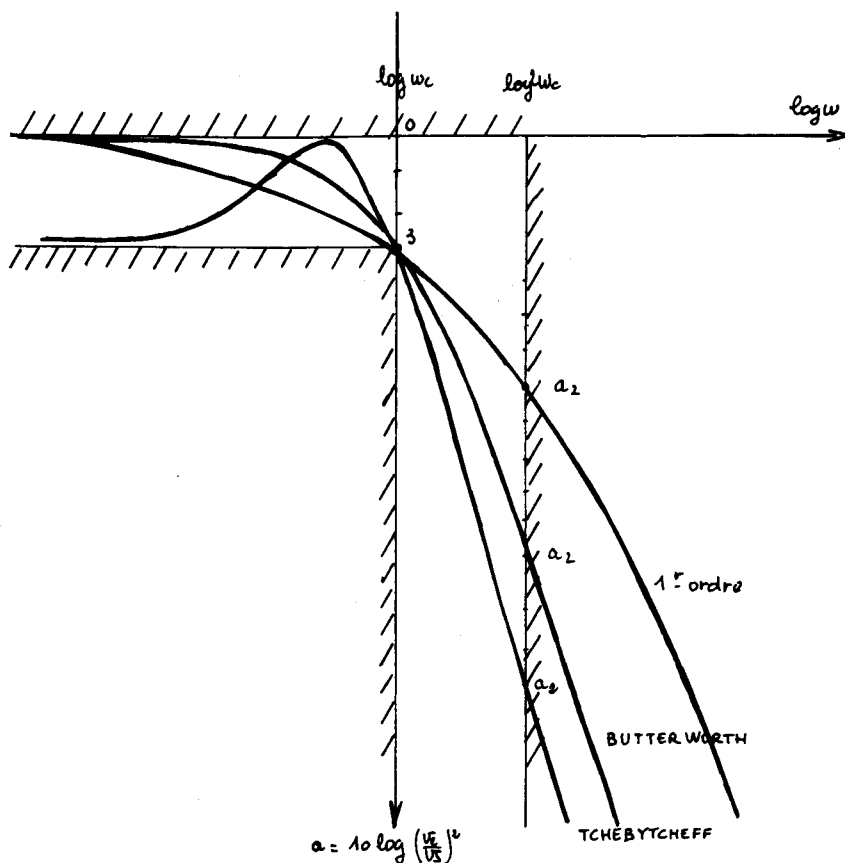


Fig. 11

avec les conditions :

$$C = \frac{G}{\omega_c} \quad L_1 = \frac{1}{G \omega_c}.$$

Avec les exigences du client telles qu'elles viennent d'être explicitées, il conviendra donc de choisir un réglage de TCHEBYTCHEFF, si l'on ne dispose que des deux schémas précédents. En fait, il existe de très nombreux schémas de filtres dont les performances sont encore meilleures et, par ailleurs, le client exige toujours, pour a_2 une valeur minimum ; si, par exemple, il demande $a_2 \geq 30$ dB, il faut adopter un schéma plus évolué que les précédents. On pourra s'exercer à satisfaire à ces exigences avec des schémas du type de ceux de la fig. 12.

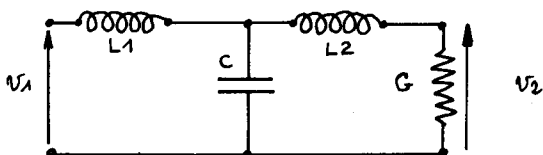


Fig. 12

— Nous avons beaucoup insisté sur les filtres passe-bas ; c'est que, outre leur utilité propre pour éliminer des fréquences élevées perturbatrices, ils constituent des modèles commodes pour fabriquer d'autres filtres. Partons du schéma LC de la fig. 10 avec le réglage de BUTTERWORTH et :

- là où il y avait une capacité C, plaçons un circuit bouchon $L_1 C_1$, résonnant sur la pulsation ω_0 c'est-à-dire remplaçons l'admittance $j C \omega$ par :

$$j C_1 \omega + \frac{1}{j L_1 \omega}$$

avec : $L_1 C_1 \omega_0^2 = 1$,

- là où il y avait une self L, plaçons un circuit L_2, C_2 , en série, résonnant aussi sur la pulsation ω_0 , c'est-à-dire remplaçons l'impédance $j L \omega$ par :

$$j L_2 \omega + \frac{1}{j C_2 \omega}$$

avec : $L_2 C_2 \omega_0^2 = 1$.

Compte tenu du réglage de BUTTERWORTH qui impose :

$$G^2 L_2 = 2 C_1$$

on obtient :

$$a = 10 \log_{10} \left[1 + Q^4 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^4 \right]$$

avec :

$$Q^2 = L_2 C_1 \omega_0^2.$$

La fig. 13 montre l'allure des variations de a avec la fréquence ; c'est bien un filtre passe-bande. La bande où l'affaiblissement est inférieur à 3 dB est $\omega_0 (1 \pm 1/2 Q)$, (car Q est toujours élevé).

En pratique le client impose ω_0 , fréquence centrale du filtre, Q lié à la largeur de bande à 3 dB et G , conductance de la charge. Les formules précédentes conduisent à :

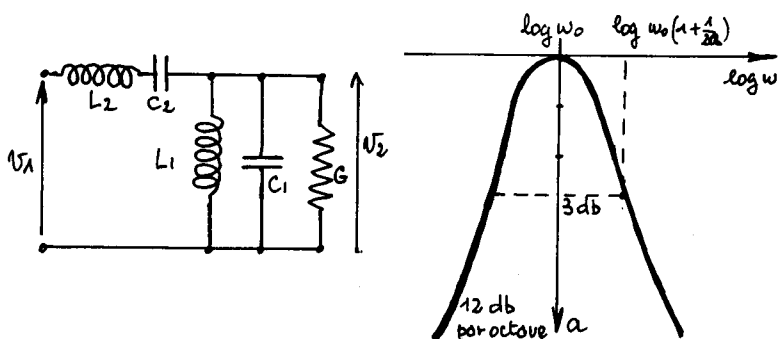


Fig. 13

$$L_1 = \frac{1}{Q \omega_0 G \sqrt{2}} \quad C_1 = \frac{Q G \sqrt{2}}{\omega_0} \quad L_2 = \frac{Q}{G \omega_0 \sqrt{2}} \dots$$

$$\dots C_2 = \frac{G \sqrt{2}}{Q \omega_0}$$

— Pour achever ces indications sommaires sur le comportement des filtres de fréquence, notons que la technologie ne met pas à notre disposition n'importe quel composant. Il est difficile de réaliser une capacité inférieure à 10 picofarads, et une capacité supérieure à 10 microfarads... la dynamique est de l'ordre de 10^6 ... Il en est à peu près de même pour les selfs. Comme :

$$\frac{L_2}{L_1} = Q^2 \quad \frac{C_1}{C_2} = Q^2$$

il en résulte que $Q = 1000$ est un maximum. Cette limite n'est d'ailleurs pas atteinte dans l'état actuel de la technologie, car une capacité doit être connectée par des fils qui présentent une certaine self (1 cm de fil à une self de l'ordre de 10 nanohenrys) de sorte qu'à une fréquence de l'ordre de 10 MHz, l'impédance du fil est de l'ordre de 0,7 mΩ, comparable à celle d'un condensateur de 10 μF à cette fréquence. Le condensateur n'est plus une capacité, mais un circuit résonnant... Des limitations analogues interviennent vers les basses fréquences et on obtient, sur la fig. 14 le domaine pratique de réalisation technologiquement possible des filtres LC.

Les réalisations de filtres actifs sont limitées au domaine de basse fréquence car l'amplification, supposée très grande, diminue en pratique avec la fréquence.

Nous reviendrons sur ce tableau dans la suite.

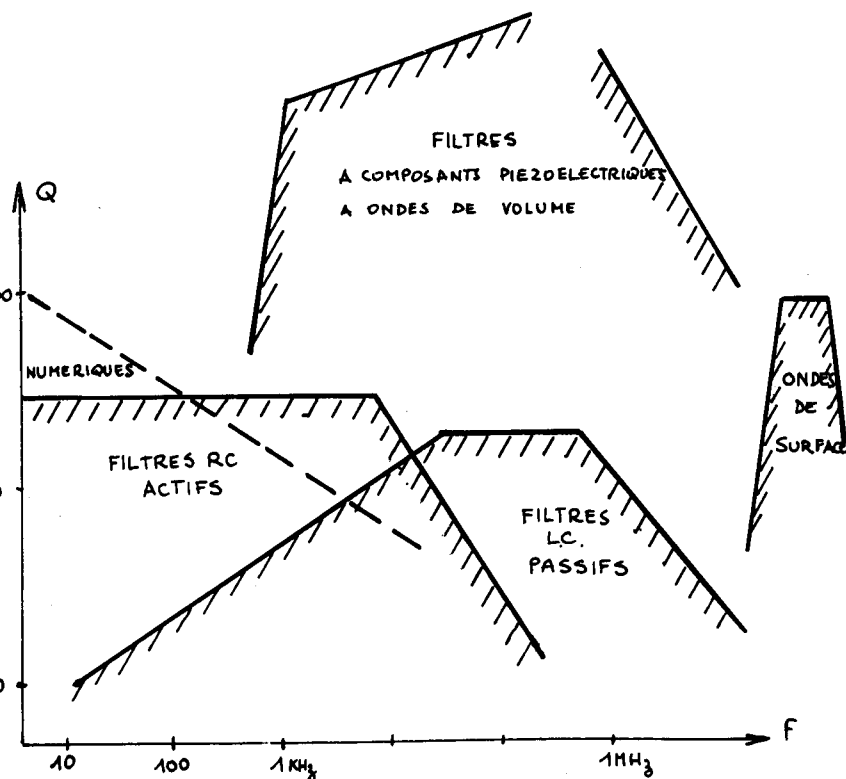


Fig. 14

4. LE FILTRE DE FREQUENCE EST AUSSI UN INTEGRATEUR ANALOGIQUE ; MAIS UNE INTEGRALE PEUT S'OBTENIR PAR UN CALCULATEUR NUMERIQUE.

— Ces circuits électriques qui effectuent la fonction filtrage en fréquence, telle qu'elle vient d'être décrite, vont agir sur n'importe quel signal électrique, représenté par exemple par une tension fonction du temps. Ce signal n'aura souvent aucune ressemblance avec une sinusoïde ; ce sera, par exemple la succession aléatoire d'impulsions rectangulaires que constitue le signal du télégraphe MORSE.

Dès lors, l'intérêt de l'analyse fréquentielle n'apparaît pas, tout au moins en première urgence ; il est préférable de faire une étude directe. Prenons l'exemple du filtre RC qui nous a déjà servi (fig. 15).

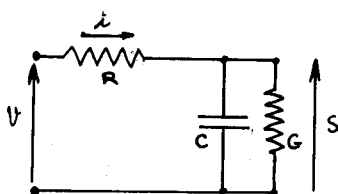


Fig. 15

On écrit que l'intensité i qui traverse la résistance R est donnée par la loi d'OHM,

$$i = \frac{1}{R} (V - S)$$

mais qu'elle est aussi la somme de l'intensité que la tension S fait circuler dans la capacité C et dans la conductance de charge G ,

$$i = C \frac{dS}{dt} + GS.$$

Cela conduit à :

$$RC \frac{dS}{dt} + (1 + RG) S = V$$

équation différentielle linéaire à coefficient constant qui permet de connaître la réponse $S(t)$ à un signal d'attaque quelconque $V(t)$.

— Des filtres réalisés avec des circuits plus compliqués conduisent aussi à des équations différentielles (à cause des selfs et des capacités, dont les lois physiques s'expriment avec des dérivés); ces équations sont linéaires à coefficients constants tant que l'on utilise des composants de valeur constante (1) dont le comportement est décrit par une loi linéaire (2).

Mais au lieu d'obtenir une équation de premier ordre, on peut avoir des équations d'ordre élevé. Par exemple, le circuit de la fig. 16 est décrit par :

$$LC \frac{d^2S}{dt^2} + LG \frac{dS}{dt} + S = V.$$

(1) On pourrait imaginer que l'une des armatures du condensateur vibre mécaniquement; l'épaisseur, donc la capacité varie au cours du temps; il n'y aurait plus de coefficient constant.

(2) Ce ne serait pas le cas si l'une des résistances était réalisée avec une diode à semi-conducteur.

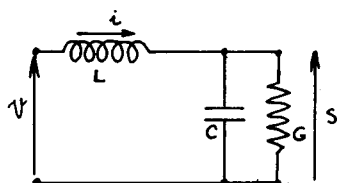


Fig. 16

Pratiquement, on préfère manipuler deux équations du premier ordre qu'une seule du second ordre. On écrira par exemple, en introduisant l'intensité dans la self :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{G}{c} S + \frac{i}{c} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{S}{L} + \frac{V(t)}{L}\end{aligned}$$

formulation, sans doute moins usuelle, mais plus commode pour le traitement mathématique. Ces notations sont les ÉQUATIONS D'ÉTAT. Quant au troisième circuit qui nous a servi dans l'analyse fréquentielle (fig. 17), il est décrit par :

$$L_1 C_2 \frac{d^4 S}{dt^4} + L_1 G \frac{d^3 S}{dt^3} + \left(1 + \frac{L_1}{L_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{G}{c_1} \frac{dS}{dt} + \frac{1}{c_1 L_1} S = \frac{dV}{dt}.$$

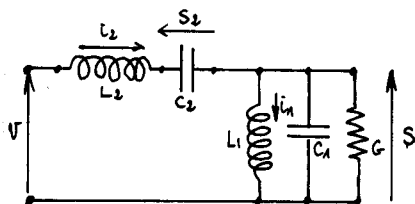


Fig. 17

Le lecteur établira cette équation, et, en introduisant les intensités i_1 et i_2 dans les selfs et la tension S_2 aux bornes du condensateur C_2 , il pourra aussi décrire le montage par quatre équations différentielles du premier ordre, comportant au premier membre les dérivés de S , S_2 , i_1 et i_2 .

— Comment utiliser ces équations ? Il suffit de consulter l'arsenal de formules que les mathématiciens nous fournissent. Prenons par exemple l'équation simple du circuit R, C :

$$\frac{dS}{dt} + \alpha S = \beta V(t)$$

en posant :

$$\alpha = \frac{1 + GC}{RC} \quad \beta = \frac{1}{RC}.$$

On sait intégrer cette équation, et obtenir la solution sous la forme :

$$S(t) = \int_0^t \beta V(x) \cdot e^{-\alpha(t-x)} dx$$

(on consultera un ouvrage de mathématiques, dites « générales » au chapitre portant ce nom admirable de « méthodes de variation des constantes »). L'origine des temps, qui est l'origine de l'intégration, est choisie au moment où $V(t)$, le signal d'attaque démarre ; il est nul avant (évidemment !) On suppose que $S(t)$ est nul, avant que l'attaque ne soit intervenue, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de souvenir d'attaques antérieures, et donc, concrètement que le condensateur est déchargé.

— Les mathématiciens nous fournissent des solutions comparables pour des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre plus élevé. Elles ont la même forme, qui s'appelle une intégrale de convolution. Nous dirons donc qu'un filtre, c'est un circuit électrique qui réalise, de façon analogique, le calcul d'une intégrale de convolution, sur la valeur du signal d'attaque $V(t)$.

On montre que toute équation différentielle linéaire à coefficient constant avec un second membre fonction de temps, du type :

$$d[S] = V(t)$$

où d est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, a pour solution :

$$S(t) = \int_0^t V(x) \cdot D(t-x) dx.$$

C'est une intégrale de convolution, entre le second membre (lié au signal qui attaque le filtre) et la fonction D qui est une solution de l'équation sans second membre :

$$d[S] = 0.$$

La fonction D caractérise donc le filtre décrit par l'équation. On montre facilement que c'est la réponse à un signal $V(t)$, très bref et très intense (une IMPULSION de DIRAC).

— Si le filtre est réalisé matériellement, nous disposons d'un intégrateur analogique, qui fournit automatiquement $S(t)$; si le

filtre n'est pas réalisé, nous pouvons quand même obtenir $S(t)$ en calculant l'intégrale par un des nombreux procédés que l'analyse numérique met à notre disposition.

Prenons par exemple la méthode des rectangles, telle que l'indique la fig. 18 :

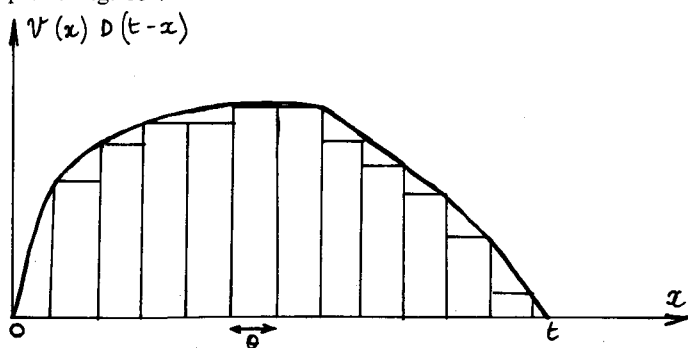


Fig. 18

Nous divisons l'intervalle d'intégration $0, t$ en petits intervalles, de durée θ ; considérons la fonction à intégrer comme constante dans l'intervalle $k\theta, (k+1)\theta$ et assimilons la courbe à intégrer à un escalier. L'aire est celle d'une somme de rectangles, et en posant :

$$t = n\theta \quad S(t) = S(n\theta) = S_n,$$

$$V(x) = V(k\theta) = V_k \quad D(t-x) = D[(n-k)\theta] = \frac{1}{\theta} D_{n-k}$$

en introduisant un facteur d'échelle $1/\theta$, qui simplifiera la suite, il vient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k \cdot D_{n-k}$$

ou encore,

$$S_n = V_0 D_n + V_1 D_{n-1} + V_2 D_{n-2} + \dots + V_{n-1} D_1 + V_n D_0.$$

La valeur du signal $S(t)$, à l'instant $n\theta$ s'obtient donc de façon très simple : on effectue une combinaison linéaire de toutes les valeurs passées du signal d'attaque, avec une suite de coefficients D_j qui caractérisent le filtre. Un filtre peut être considéré comme un calculateur qui doit comporter les éléments suivants :

- un échantillonneur, capable de mesurer la valeur du signal d'attaque V à des instants $k\theta$, et de mettre ces valeurs en mémoire,
- un registre où sont inscrits les coefficients D_0, D_1, D_2 , qui caractérisent le filtre,

— un ensemble de multiplication et sommation.

Le schéma de la fig. 19 indique le principe de ce calcul ; deux registres se déplacent, l'un en face de l'autre. D_j est inscrit sur l'un et V_k sur l'autre, en sens inverse. On multiplie les termes qui sont face à face et l'on fait la somme des termes ainsi obtenus.

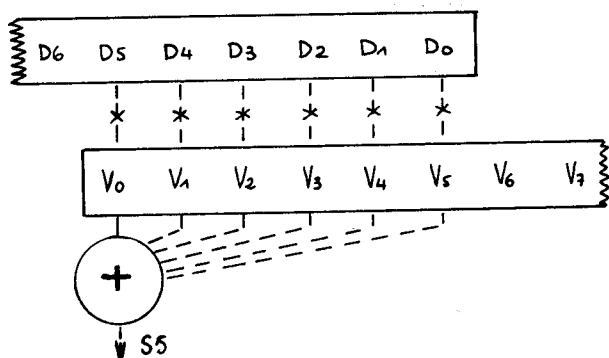


Fig. 19

En pratique ce système n'est pas réalisable, car il faut un nombre variable de termes pour chaque opération. Pour avoir S_n , il faut n multiplications et une somme de n termes ; pour avoir S_{n+1} , il faut une opération de plus. On peut alors mettre à profit la signification de $D(t)$, qui est la réponse du circuit à une impulsion très brève, pour $t = 0$. Comme le circuit est STABLE, il revient à l'équilibre, c'est-à-dire $D \simeq 0$ lorsque t augmente. On peut donc poser approximativement $D_n \equiv 0$ pour $n \geq N$. On obtient alors la somme de N termes :

$$S_n = \sum_{k=n-N}^{k=n} V_k \cdot D_{n-k}$$

étant entendu que $V_k = 0$ pour $n - N < 0$.

Ceci nous conduit à un premier type de filtre numérique, baptisé filtre transversal.

Un premier registre contient les n valeurs $D_0, D_1, D_2, \dots, D_N$. Le signal d'attaque, précédé d'autant de 0 que nécessaire, figure dans un second registre qui glisse devant un système fixe symbolisé sur la fig. 20. Le sommateur porte toujours sur N termes, qui ont toujours les mêmes coefficients multiplicatifs.

— Bien entendu, tout ceci repose sur une tolérance dans la précision avec laquelle on cherche le résultat. Remplacer la

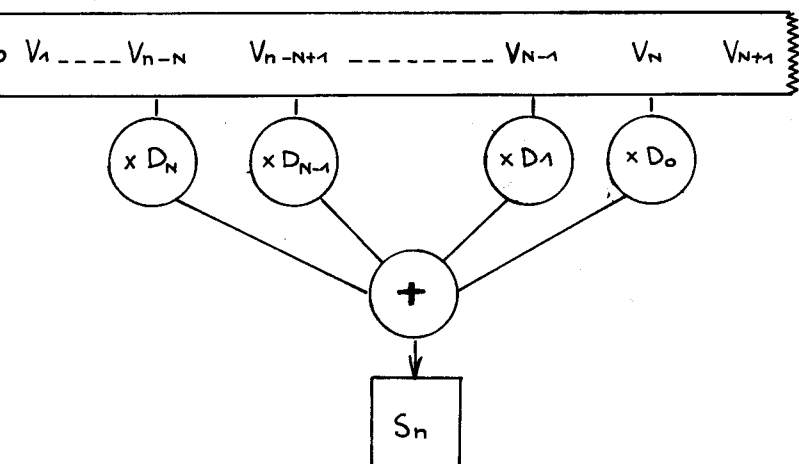


Fig. 20

courbe, dont il faut calculer l'aire, par un escalier, cela entraîne une première erreur ; négliger les termes après D_N entraîne une seconde erreur.

Nous avons déjà vu que les desiderata du client se limitaient généralement à un gabarit, c'est-à-dire à une fourchette de tolérance. Si les erreurs ainsi commises restent dans la tolérance acceptée, nous pouvons utiliser ce procédé et donc remplacer un circuit électrique qui est un calculateur analogique de convolution, par un calculateur numérique. En pratique, pour évaluer l'erreur, on étudiera le comportement de filtre en signal sinusoïdal, posant :

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 e^{j\omega t} & V_k &= V_0 (e^{j\omega \delta})^k \\ S(t) &= S_0 e^{j\omega t} & S_n &= S_0 (e^{j\omega \delta})^n. \end{aligned}$$

Il vient :

$$S_n = \sum_{k=n-N}^{k=n} V_0 D_{n-k} (e^{j\omega \delta})^k$$

et la fonction de transfert :

$$T_N = \frac{S_n}{V_n} = \sum_{k=n-N}^{k=n} D_{n-k} (e^{j\omega \delta})^{k-n} = \sum_{p=0}^{p=N} D_p (e^{-j\omega \delta})^p.$$

Si l'expression de T_N ainsi calculée donne une courbe qui entre dans le gabarit, c'est que les erreurs sont tolérables. Le filtre numérique est aussi satisfaisant que le filtre analogique. Nous allons y revenir.

5. LE FILTRAGE NUMERIQUE.

— Le traitement numérique du signal suppose donc un échantillonnage, c'est-à-dire la mise du signal sous la forme de tableau de nombres. Dans la plupart des cas, les signaux à traiter sont des grandeurs physiques qui varient de façon continue (la tension électrique aux bornes d'un microphone par exemple). Il faut donc être capable de mesurer la valeur de la grandeur physique à des intervalles de temps régulièrement espacés de θ , puis de présenter le résultat dans un système numérique adapté au calculateur (c'est dire, dans la quasi totalité des cas, sous forme d'un nombre binaire). Des circuits spéciaux, baptisés Convertisseurs Analogiques Numériques (C.A.N.) aujourd'hui d'un usage courant et commercialisés, réalisent cette opération. Encore faut-il choisir θ .

— Il est clair que plus θ sera petit, plus les performances technologiques seront difficiles à réaliser ; il faut en effet dans l'intervalle de temps θ , permettre au C.A.N. d'effectuer les nombreuses opérations élémentaires nécessaires pour « piquer » l'information analogique et la transformer en un nombre binaire ; plusieurs bascules doivent changer de position, ce qui demande un certain temps... Disons pour fixer les idées que $\theta = 10^{-3}$ sec est une performance simple, et que $\theta = 10^{-6}$ sec est déjà difficile à réaliser. Le record actuel est de l'ordre de 10^{-8} sec. Mais si le signal varie rapidement, il faudra obtenir de nombreux échantillons si l'on désire que la table numérique en fournisse une image satisfaisante. On ne peut donc traiter que des signaux de fréquence « pas trop élevée ». L'Américain SHANNON a précisé cette notion intuitive en 1949, en énonçant un théorème fondamental dont nous allons donner une idée.

— Considérons un signal sinusoïdal, de fréquence f échantillonné avec la période d'échantillonnage θ , donc à la fréquence $F_e = 1/\theta$.

Nous pouvons représenter ce phénomène par une modulation d'amplitude d'un signal échantillonneur constitué d'une succession d'impulsions très brèves, séparées de θ (fig. 21) lorsque la

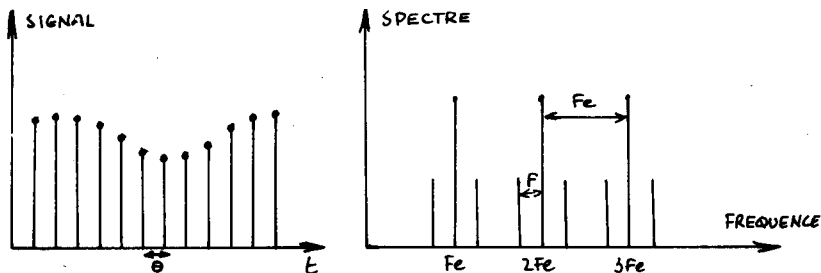


Fig. 21

« porteuse » est une sinusoïde, son spectre est une simple raie, à la fréquence $1/\vartheta$; lorsque c'est une succession d'impulsions courtes, c'est la superposition du fondamental et de tous les harmoniques comme le montre un développement en série de FOURIER ; on a un spectre de raies. La modulation d'amplitude, par une sinusoïde de fréquence f crée le même phénomène que celui décrit dans la fig. 5 ; on observe des raies de modulation $\pm f$ de part et d'autre des raies nF_c du spectre du signal porteur.

Il suffit dès lors de regarder la fig. 21 pour comprendre que le signal sera correctement représenté si les raies parasites sont correctement liées à la raie de la porteuse, et n'empiètent pas les unes sur les autres ; cela exige que :

$$F_c = \frac{1}{\vartheta} > 2f$$

donc que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la fréquence du signal à échantillonner.

En pratique, le signal à échantillonner (la parole par exemple) n'est pas sinusoïdal ; mais, grâce à FOURIER, on peut le décrire par une superposition des sinusoïdes et en fait, on constate expérimentalement une limite aux fréquences de ces composantes. Dans le signal de parole, on peut considérer que $f_M = 4\,000$ Hz est une limite tolérable ; on peut couper les fréquences supérieures sans changer l'intelligibilité du message, car ces composantes ont toujours une amplitude négligeable.

Il en résulte que l'échantillonnage d'un signal de parole fournira un spectre continu, s'étendant sur tout l'intervalle 0 - 4 000 Hz, de part et d'autre de chaque raie du signal d'échantillonnage. Si

$$F_c > 8\,000 \text{ Hz}$$

les spectres ne se recouvrent pas, et l'on conserve correctement l'information contenue dans le signal. : $\vartheta = 125 \mu\text{sec}$, ce qui est facile à obtenir (des C.A.N. simples effectuent les opérations « échantillonnage + numérisation » en $4 \mu\text{sec}$...).

Notons enfin qu'il existe des circuits réciproques des C.A.N. qui sont les Convertisseurs Numériques Analogiques (C.N.A.) qui fournissent un signal analogique, continu, « passant par les points » d'un signal numérique de commande.

— Le filtrage numérique consiste donc à choisir ϑ , en respectant le théorème de SHANNON, puis à placer, en amont un C.A.N. et en aval, un C.N.A. Entre les deux, il faut un calculateur... qui matérialise le filtre numérique. Or tous ces circuits sont actifs ; à l'ère de la lampe triode, de tels circuits dont le principe était connu (les bascules ont été inventées par ECCLES et JORDAN vers

1919) auraient été technologiquement irréalisables par suite du volume et de la dépense d'énergie. Ils auraient fonctionné à des fréquences F_c si faibles que l'intérêt aurait été nul. Il a fallu le transistor (1945) et surtout la technologie des circuits intégrés (1960-1970) pour avoir de très nombreuses bascules, de très petites dimensions, donc rapides, sans dépense d'énergie (ou presque). Le schéma de la fig. 22 est réalisable à très bon marché, et dans un faible volume depuis 1970.

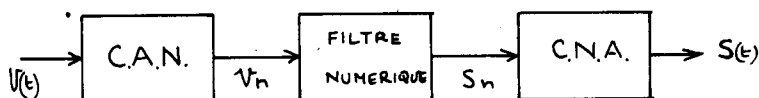


Fig. 22

— Réaliser un filtre numérique c'est donc programmer un calculateur électronique pour qu'il réalise l'opération de convolution entre le signal d'attaque échantillonné V_n et le signal D_j , conservé en mémoire et qui est la réponse impulsionnelle. Nous avons vu un exemple d'un tel programme au paragraphe précédent : il convient d'effectuer N multiplications et une somme, ce qui n'est pas difficile.

Mais il y a beaucoup d'autres techniques permettant de numériser l'équation différentielle qui décrit le filtre analogique, pour passer au filtre numérique équivalent. Partons de :

$$\frac{dS}{dt} + \alpha S = \beta V$$

et intégrons, par rapport au temps, entre les instants $(k-1)\vartheta$ et $k\vartheta$. Il vient :

$$\int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \frac{dS}{dt} \cdot dt + \alpha \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} S \cdot dt = \beta \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} V \cdot dt.$$

Les deux intégrales définies peuvent être obtenues par la méthode des trapèzes (fig. 23), ce qui conduit à :

$$S_k - S_{k-1} + \alpha \frac{\vartheta}{2} (S_k + S_{k-1}) = \beta \frac{\vartheta}{2} (V_k + V_{k-1})$$

et par conséquent à,

$$S_k = \left(\frac{1 - \frac{\alpha \vartheta}{2}}{1 + \frac{\alpha \vartheta}{2}} \right) S_{k-1} + \frac{\frac{1}{2} \beta \vartheta}{1 + \frac{\alpha \vartheta}{2}} (V_k + V_{k-1})$$

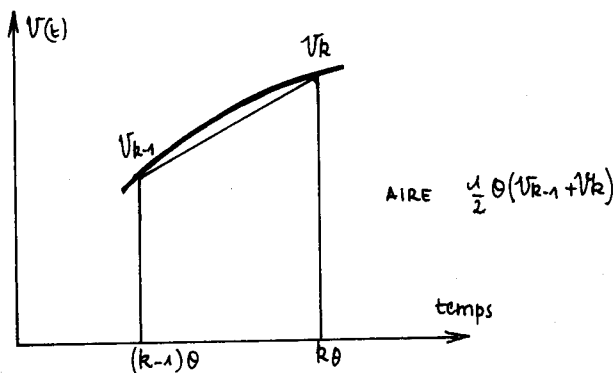


Fig. 23

ou encore :

$$S_k = A S_{k-1} + B V_k + B V_{k-1}$$

avec trois coefficients constants A , B et C . Pour avoir la réponse S_k , à l'instant $t = k\theta$, il suffit de conserver en mémoire la valeur de la réponse et de l'attaque à l'instant précédent ($t = (k-1)\theta$); la combinaison linéaire est alors très simple. Mais le programme est répétitif et, à chaque coup on est obligé d'arrondir le résultat; il en résulte une erreur qui se cumule à chaque étape. On risque des ennuis, comme des oscillations permanentes du montage.

— Retenons que la numérisation qui conduit au programme peut s'effectuer de plusieurs façons, toujours avec une incertitude créée par le fait que le signal est échantillonné et que l'on « saute » de $k\theta$ à $(k+1)\theta$,... Pour évaluer l'importance de cette erreur, on peut comparer l'effet du filtre sur un signal sinusoïdal,

$$V = V_0 e^{j\omega t}.$$

Dans le cas analogique, la réponse est :

$$S = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

et en transposant dans l'équation différentielle, on a :

$$S(j\omega + \alpha) = \beta V$$

dont la fonction de transfert :

$$T = \frac{S}{V} = \frac{\beta}{j\omega + \alpha} = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad [T_0 = \frac{\beta}{\alpha}, \omega_0 = \alpha]$$

Dans le cas numérique, l'attaque numérisée est,

$$V_n = V_0 (e^{j\omega\theta})^n$$

et la réponse est :

$$S_n = S_0 (e^{j\omega\vartheta})^n e^{j\varphi}.$$

En transposant dans la relation qui caractérise le filtre numérique, on a :

$$S_n \left[1 + \frac{\alpha\vartheta}{2} - \left(1 - \frac{\alpha\vartheta}{2} \right) e^{-j\omega\vartheta} \right] = V_n \frac{1}{2} \beta\vartheta (1 + e^{-j\omega\vartheta})$$

donc après quelques transformations, une fonction de transfert,

$$T_N = \frac{S_n}{V_n} = \frac{\beta}{\alpha + j \frac{2}{\vartheta} \operatorname{tg} \frac{\omega\vartheta}{2}} = \frac{T_0}{1 + j \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega_0\vartheta}{2}}{\frac{\omega_0\vartheta}{2}}}$$

T et T_N sont apparemment très différents, au point que l'on peut se demander si tout ce qui précède a un sens. C'est le théo-

rème de SHANNON qui nous fournit la réponse, car $f = \frac{\omega}{2\pi}$

doit être inférieur à $1/2 \vartheta$... Cela signifie que le filtre numérique n'a d'intérêt que pour,

$$\omega < \frac{\pi}{\vartheta}.$$

Le seul intervalle UTILE, où le filtre numérique soit intéressant est la partie basse du spectre. Dans cet intervalle, les deux courbes sont très voisines comme le montre la fig. 24. La courbe du filtre numérique entre même mieux dans le gabarit que l'analogique car elle « coupe » plus brutalement. En pratique, on choisira ϑ en dessous de la limite théorique imposée par SHANNON de façon que l'écart entre T et T_N soit inférieur à la tolérance du client dans le spectre utile.

Un filtre numérique n'est utilisable que pour des signaux dont le spectre est limité en fréquence, ce qui est, en pratique, le cas général.

— Le filtre numérique, tel qu'il vient d'être décrit, semble un raffinement technologique sans grand intérêt. Il peut sembler absurde de faire, avec un calculateur électronique, ce que l'on peut faire avec une résistance et un condensateur... En fait, l'intérêt considérable du filtrage numérique réside dans le traitement effectué par l'ordinateur, qui peut être bien plus complexe qu'une simple convolution numérique.

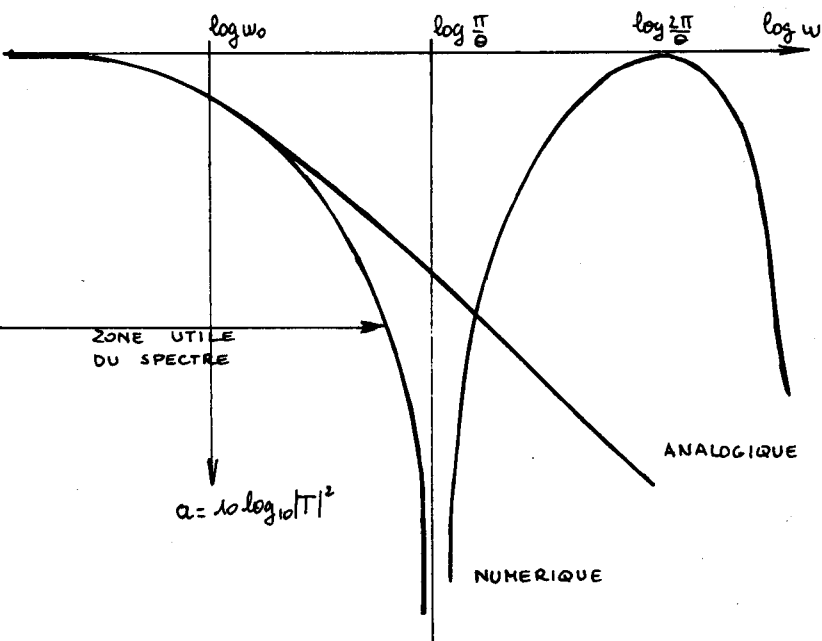


Fig. 24

Le signal naturel, capté par un système physique (parole, captée par un microphone - activité cardiaque, captée par des électrodes placées sur la peau - activité sismique, captée par un sismographe...) puis numérisé, se présente à nous sous la forme d'une sonde de nombre $V_0, V_1, V_2, \dots, V_k, \dots$ qui contiennent, à la fois, l'information utile et tout un ensemble de perturbations, globalement caractérisée par le terme « bruit ».

On ne connaît évidemment pas le bruit à chaque instant ; mais, le plus souvent on connaît des propriétés statistiques comme sa valeur quadratique moyenne. On ne connaît pas, *a priori*, la valeur du signal (sinon on n'aurait pas besoin de le mesurer) mais on possède certains renseignements ; par exemple on sait que le signal utile est une succession d'impulsions de forme connue, ou encore qu'il obéit à une loi physique connue.

— Supposons, par exemple, que le phénomène soit décrit par un seul paramètre, obéissant à la loi,

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha X$$

α étant constant. A l'instant $t = n\theta$, ce paramètre est égal à X_n ; au bout du temps θ , il vaudra :

$$X_{n+1} = X_n e^{-\alpha\theta}$$

comme on le montrera en intégrant l'équation.

Mais, si l'on fait la MESURE de X , on obtient une valeur x , somme de X et du bruit.

A l'instant $(n+1)\theta$, on mesure x_{n+1} , qui diffère probablement de X_{n+1} (la différence est le bruit). On introduit donc la première loi de filtrage : la valeur estimée de X , à l'instant $(n+1)\theta$ est la somme de $X_n e^{-\alpha\theta}$, obtenue en suivant la loi physique, et de $K(x_{n+1} - X_n e^{-\alpha\theta})$ qui représente l'effet du bruit ; on pose :

$$X_{n+1} = X_n e^{-\alpha\theta} + K_{n+1}(x_{n+1} - X_n e^{-\alpha\theta}).$$

Le coefficient K_{n+1} , représente l'importance que l'on accorde au bruit, pour corriger l'évaluation de X , déduite d'abord de la loi d'évolution. Le choix de K_{n+1} exige d'introduire la seconde loi de filtrage, énoncée par WIENER en 1940, et qui dérive de la méthode des « moindres carrés ».

On écrit que l'incertitude quadratique moyenne après n estimations, c'est-à-dire :

$$\epsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - X_j)^2$$

est minimum ; en transposant dans cette expression la loi de récurrence précédente et en exprimant la condition de minimum, on obtient, après des calculs assez pénibles, l'expression de K_n sous forme d'une relation entre K_n et K_{n+1} . On parvient, dans des cas simples, qui nous serviront pour un dernier exemple, à la loi

$$K_{n+1} = \frac{K_n}{e^{2\alpha\theta} + K_n}.$$

— Il est clair que seul un ordinateur permet de faire ces opérations ; il faut un premier programme pour calculer K_n par récurrence à partir d'une première estimation K_0 ; il faut un second programme pour calculer X_n par récurrence, à partir d'une première estimation X_0 , et des mesures $x_1, x_2, \dots$. La fig. 25 symbolise ce second programme.

Comme le phénomène étudié (par exemple la position d'un mobile) dépend de plusieurs paramètres, on se trouve confronté avec une douzaine d'équations de récurrence, que seul un puissant ordinateur permet de traiter...

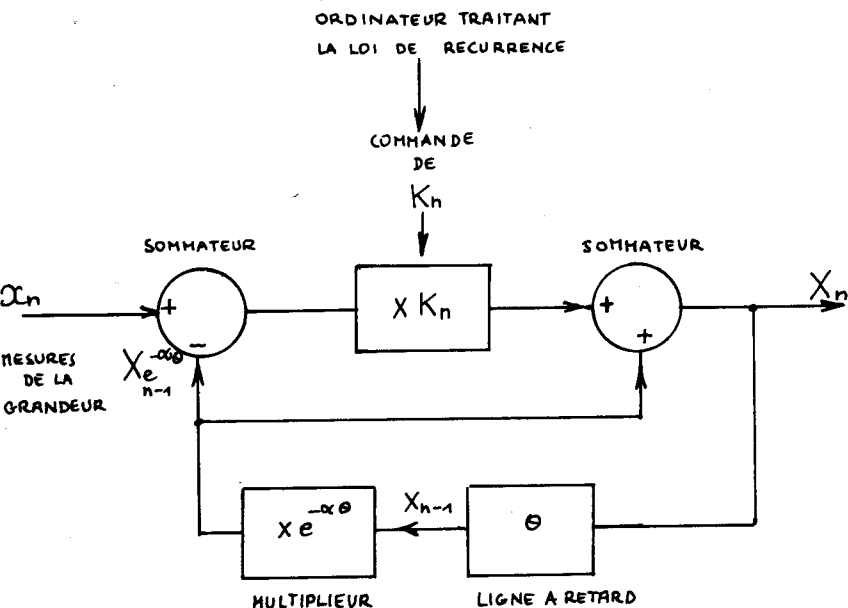


Fig. 25

Terminons ces notions arides, qui tentent de décrire sommairement ce qu'est un filtre de KALMAN, par un cas particulier. Supposons que la loi physique soit $\alpha = 0$, ce qui signifie que la grandeur que nous cherchons à évaluer est constante. On constatera alors que $K_n = 1/n$ et que :

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

c'est-à-dire que la meilleure estimation est la MOYENNE...

Le filtre de KALMAN, résultat du processus d'échantillonnage et d'un calculateur est la généralisation du calcul de la moyenne pour des systèmes à N paramètres variables au cours du temps. Le « filtre » est maintenant comme un système qui sépare, le mieux possible, le signal utile des perturbations qui l'accompagnent (fig. 26). Ce n'est plus un filtrage en fréquence et le filtre numérique n'est plus une mauvaise copie d'un filtre analogique. C'est un filtrage du bruit, laissant passer la meilleure estimation possible du signal utile.

L'ordinateur permet ces réalisations, que l'on ne sait pas, actuellement, faire avec des systèmes analogiques et dans ce

domaine, le filtre numérique est irremplaçable, notamment parce que ses paramètres (K_n par exemple) sont COMMANDABLES en cours d'opération.

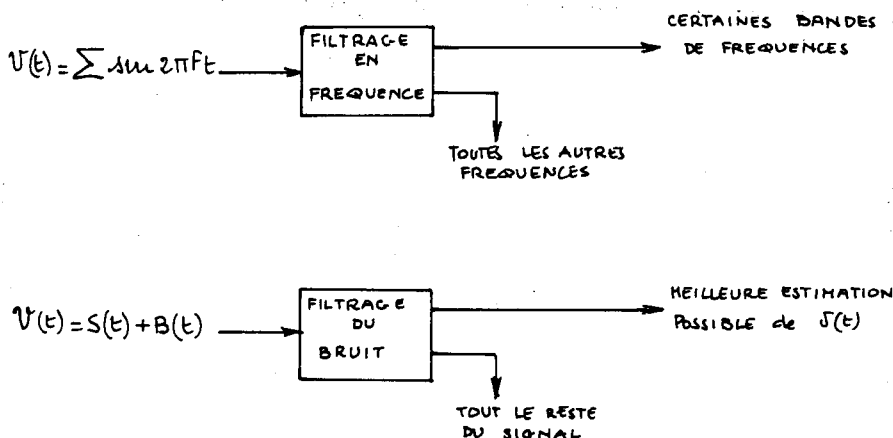


Fig. 26

6. LE MODELE DU FILTRE NUMERIQUE CONDUIT A DES NOUVEAUX TYPES DE FILTRE ANALOGIQUE.

— Nous allons terminer cet exposé en montrant que le modèle de filtre numérique peut servir à matérialiser des nouveaux circuits analogiques, mettant en application un phénomène très important, la propagation des ondes élastiques à la surface de corps piezoélectriques. Cette application récente (1970) de la piezoélectricité à la synthèse des filtres est très intéressante.

— Chacun connaît les « ronds » qu'engendre, à la surface de l'eau calme, le caillou que l'on y a fait tomber. Il s'agit d'ondes superficielles ; la perturbation ne se propage pas à l'intérieur de l'eau et dès que l'on observe à une profondeur de l'ordre de 2 ou 3 fois la longueur d'onde, on constate que l'eau est en repos. On connaît aussi la célèbre expérience des rides créées à la surface de l'eau (ou du mercure) par la pointe vibrante, accrochée à un diapason. Il s'agit là aussi d'ondes superficielles mais qui sont conditionnées surtout par la tension superficielle du liquide tandis que les « ronds dans l'eau », comme la houle, sont principalement conditionnés par la gravité et la déformation d'un liquide incompressible.

— Il nous faut maintenant rappeler ce qu'est la piezoélectricité. Prenons un corps solide ; nous pouvons exercer sur lui deux actions (fig. 26) :

- une action MÉCANIQUE, en le comprimant avec une force F répartie sur l'aire S (pression F/S),
- une action ÉLECTRIQUE, en appliquant une tension V entre deux faces métallisées, distantes de X (champ électrique V/X).

L'action mécanique a un effet mécanique, qui est une variation d'épaisseur. X devient $X + x$, x/X caractérise l'effet. L'action électrique a un effet électrique ; des charges Q apparaissent sur les électrodes d'aire S et la quantité Q/S (densité de charge) sont assez petites pour que l'approximation linéaire soit valable, on a :

$$\frac{x}{X} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \qquad \frac{Q}{S} = \epsilon_0 \epsilon \frac{V}{X}$$

E étant un coefficient d'élasticité, $\epsilon_0 \epsilon$ la constante diélectrique. Mais dans certains corps, tels que le quartz, le niobate de lithium,... chaque cause produit les deux effets. L'application de la force fait varier l'épaisseur, *mais crée aussi une charge* ; l'application de la tension engendre une charge, *mais crée une variation d'épaisseur*.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{x}{X} &= \frac{1}{E} \frac{F}{S} + K \frac{V}{X} \\ \frac{Q}{S} &= K \frac{F}{S} + \epsilon_0 \epsilon \frac{V}{X} \end{aligned}$$

K est un coefficient qui caractérise ce couplage entre la déformation mécanique et la polarisation électrique. C'est la constante piezoélectrique.

Les coefficients E , $\epsilon_0 \epsilon$ et K dépendent du corps considéré. Pour les corps piezoélectriques usuels, on retiendra les ordres de grandeur suivants :

$$E \simeq 10^{11} \qquad \epsilon_0 \epsilon \simeq 10^{-11} \qquad K \simeq 10^{-10}$$

en unité du système international.

— Prenons alors une plaquette d'un corps piezoélectrique. Réalisons dessus, par photogravure, un système d'électrodes dont la fig. 27 donne l'allure. Ces électrodes adhèrent à la surface qu'elles entraînent dans leur déplacement. Appliquons une tension V ; nous allons observer, grâce à l'effet piezoélectrique un effet mécanique *qui va tendre à rapprocher les deux doigts, donc qui comprimera le corps, entre les deux doigts et seulement près de la surface (ou qui le dilate, suivant le signe V)*.

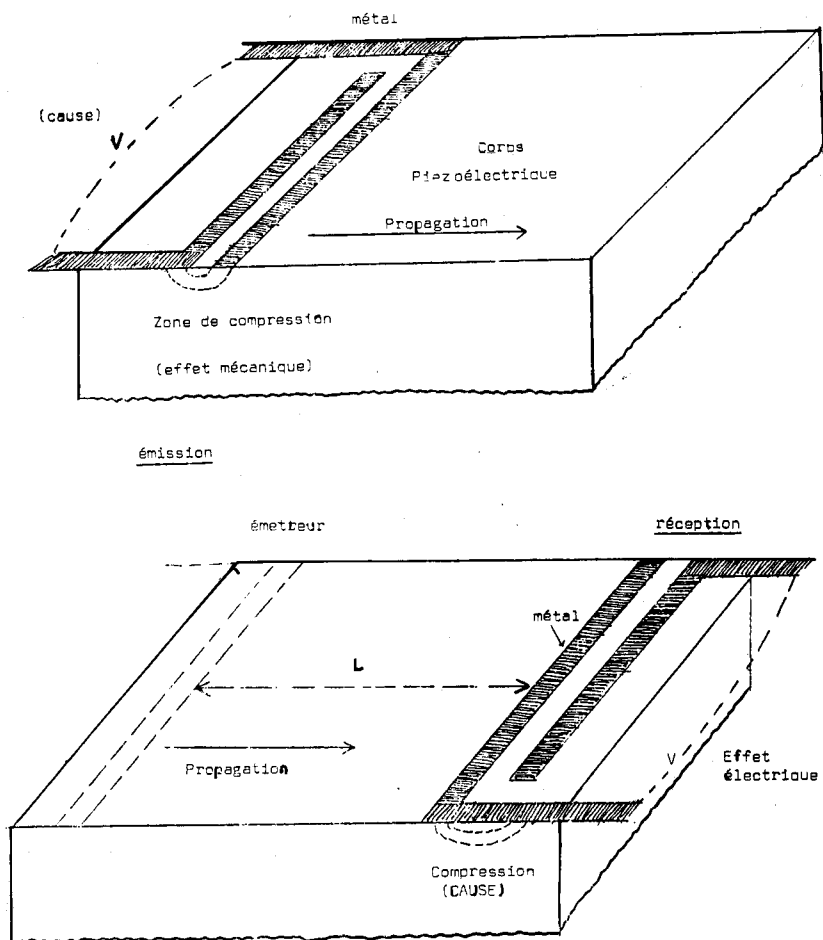


Fig. 27

Appliquons la tension V variable ; on crée une perturbation mécanique et l'on constate que cette perturbation se PROPAGE à la surface, sans pénétrer à l'intérieur. On observe le déplacement d'une sorte de vague, qui transporte un effet mécanique (la compression) mais aussi un effet électrique (la tension électrique, qui accompagne toute compression dans un corps piezoélectrique). Ce phénomène est *formellement* identique à celui que l'on observe sur une longue corde, que l'on frappe en un point ; on

observe l'impulsion (ici purement mécanique) qui s'écarte du point de choc.

— Plaçons alors un système d'électrodes identiques, à une distance L de l'émetteur. L'impulsion va y parvenir après un RETARD $T = L/v$, si v est la vitesse; celle-ci est de l'ordre de 3 000 m/s; elle ne dépend pas de la fréquence, ce qui est fort sympathique; en effet, le système est NON DISPERSIF (v indépendant de f) et une impulsion se propage sans déformation car toutes les composantes sinusoïdales qui interviennent dans la décomposition de FOURIER de l'impulsion se propagent ensemble. L'impulsion arrive donc « sous » les électrodes réceptrices; elle contient, à la fois, une déformation mécanique et un champ électrique. Lors de son passage, on va donc observer un signal électrique, sous forme d'une tension que l'on recueillera. Il sera prudent de mettre ensuite des « obstacles » qui empêchent l'impulsion mécanique de se réfléchir; on y parvient avec un traitement de surface approprié, qui absorbe les ondes.

Ainsi, à l'attaque $V(t)$ sur les électrodes de gauche, va correspondre la réponse $V(t - T)$ sans déformation sur les électrodes de droite; le système est une ligne à retard (3 microseconde par centimètre).

— Nous allons maintenant réaliser sur le substrat piezo-électrique, le peigne à N intervalles de la fig. 28. Les doigts ont des longueurs différentes; appelons l_j la longueur du doigt numéro j , à partir du premier, à droite du peigne émetteur. Le premier intervalle est alimenté par la tension $V(t)$. La longueur du doigt émetteur est l_0 ; il est raisonnable de supposer que l'ébranlement est proportionnel à la longueur du doigt qui l'a créé et c'est bien ce que l'on constate expérimentalement. L'ébranlement se propage, et arrive sur le peigne récepteur; la tension recueillie vaut :

$$S_0 = K l_0 V(t - T)$$

puisque l'ébranlement doit parcourir l'intervalle libre.

Le second intervalle, où le doigt a une longueur l_1 émet aussi un ébranlement, mais celui-ci est proportionnel à l_1 et a dû parcourir la distance $(L + a)/v$ pour arriver sur le peigne récepteur. Celui-ci reçoit donc :

$$S_1 = -K l_1 V\left(t - T - \frac{a}{v}\right)$$

Le signe — traduit le fait évident que les deux doigts émetteurs supportent la tension en sens opposés aux précédents, comme le montre la fig. 28. Le peigne récepteur reçoit ainsi toutes les impulsions qui sont retardées les unes par rapport aux autres du temps $\vartheta = a/v$, qui est le temps de transit d'une dent à l'autre. La tension recueillie est la somme, ce qui conduit à :

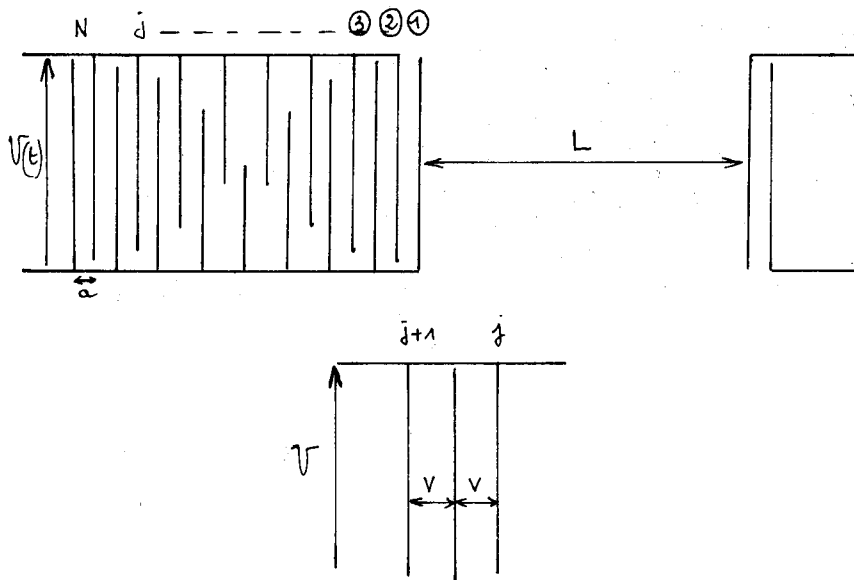


Fig. 28

$$S(t) = \sum_{j=0}^{j=N} (-1)^j K l_j V \left(t - T - j \frac{a}{v} \right).$$

Il suffit quelque peu de changer les notations, en posant :

$$t = n \vartheta \quad T = m \vartheta \quad (-1)^j l_j K = D_{n-k} \quad V(t - T - j \vartheta) = V_k$$

$$S_n = \sum_{k=p-N}^{k=p} D_{n-k} \cdot V_k$$

avec $p = n + m$ car tout est retardé du temps de transit du montage, sur la longueur $L = m \vartheta$.

Dans le cas du filtre numérique du § 4, il n'y avait pas de retard global ; $n = 0$, $p = n$.

— Nous retrouvons bien le modèle du filtre numérique, ce qui est facile à comprendre ; en effet, les deux doigts d'un peigne effectuent un échantillonnage de la tension d'attaque lorsque l'impulsion est appliquée. Le signal électroacoustique ainsi créé est mis en mémoire pendant un bref instant, celui de la propagation sur la ligne. Le décalage des dents du peigne entraîne un décalage temporel des instants d'échantillonnage, la fréquence d'échantillonnage étant $1/\vartheta = v/a$. Enfin le peigne récepteur, qui

reçoit les impulsions échantillonnées et décalées, joue le rôle d'un sommateur tandis que la longueur du doigt règle l'importance de l'échantillon.

Ce système matérialise donc, de façon analogique, un modèle de filtre numérique.

— Les difficultés technologiques sont importantes.

Le premier problème concerne l'application du théorème de SHANNON ; la fréquence $1/\theta$ doit être supérieure au double de la fréquence la plus élevée à traiter. Or, v est de l'ordre de 3 000 m/s et la photogravure permet $a = 30 \mu$. On peut atteindre plusieurs centaines de MHz, ce qui place d'emblée ces filtres dans le domaine très utile des hyperfréquences. D'ailleurs, des procédés d'usinage par faisceau électronique permettent de gagner encore un ordre de grandeur et d'atteindre le gigahertz.

Par contre, la bande de fréquence utile est assez faible ; on ne peut traiter ainsi que des signaux compris dans une bande de quelques MHz autour de la porteuse qui peut atteindre plusieurs centaines de MHz. Cette limitation provient du fait que l'ébranlement créé par $V(t)$ dans le n° intervalle va agir sur tous les autres doigts qu'il rencontre avant de quitter l'émetteur ; si cette action, retardée, s'effectue en sens contraire de celle de $V(t)$ favorable à l'émission, l'efficacité du montage baisse.

Enfin, il faut déterminer la suite des nombres l_j qui représentent les longueurs des doigts.

Comme dans le cas du filtre numérique, on cherche à faire entrer la courbe représentant la fonction de transfert en régime sinusoïdal dans le gabarit. La fonction de transfert vaut :

$$T_N = \sum_{q=0}^{q=N} (-1)^q l_q K(e^{-j\omega\theta})^q$$

comme le montre un calcul comparable à celui du § 4.

On cherche une courbe $T(\omega)$ qui entre dans le gabarit « à peu près au milieu ». Puis, on cherche à minimiser l'erreur,

$$\varepsilon = \int_{\omega_i}^{\omega_f} [T(\omega) - T_N]^2 d\omega.$$

l'intégration étant effectuée sur toute la bande utile des fréquences. La difficulté réelle du problème provient du fait que l_q est nécessairement positif. Fort heureusement, les ordinateurs ont appris des programmes capables de faire cela.

On n'obtient pas un minimum absolu, mais un minimum relatif, qui tient compte de ces contraintes. L'essentiel est que T_N entre dans le gabarit, ce que l'on vérifie *a posteriori*.

Actuellement, une large part des difficultés technologiques est surmontée ; les filtres à ondes de surface sont efficaces dans la bande de 100 MHz à plusieurs GMz. Des réalisations sont commercialisées. On trouvera, sur la fig. 14, le domaine où les filtres à ondes de surface sont réalisables.

On peut utiliser l'effet piezoélectrique dans la synthèse de filtres très différents, dits à « onde de volume ». Le domaine correspondant a été aussi indiqué sur la fig. 14, pour la compléter, et rassure le lecteur sur les réalisations de la technologie moderne.

Pour en savoir plus :

- Sur le traitement numérique de l'information, on consultera :

BELLANGER (M.),

Traitement numérique du signal. Masson. 1981.

BOÎTE (R.), LECH (N.),

Les filtres numériques. Masson. 1980.

RADIX (J.-C.),

Introduction au filtrage numérique. Eyrolles. 1970.

- Sur les filtres analogiques, on consultera :

MARCHAIS (J.-C.),

Structure élémentaire des filtres actifs. Masson. 1979.

- Sur les ondes de surface, on lira, avec intérêt :

DIEULESAINT (E.), et ROYER (P.),

Ondes élastiques dans les solides. Masson. 1974.
