Le principe de Huygens-Fresnel ou

la diffraction appliquée à l'interféromètre holographique

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE

par P. BAULAIGUE, I.U.T. rue des Géraniums, 13337 Marseille Cedex 3.

INTRODUCTION.

L'holographie est une méthode optique permettant d'obtenir d'un objet, une image en « relief intégral ». L'hologramme est alors un enregistrement en amplitude et en phase d'une onde optique, cohérente. En éclairant cet hologramme par une lumière cohérente, on restitue ainsi l'objet. C'est en 1948 que Gabor en formula, le premier, les principes; mais c'est depuis l'avènement des lasers, en particulier des lasers de puissance, que l'interférométrie holographique a pris tout son essor dans le domaine de la recherche (analyse des contraintes) ou dans le domaine industriel (contrôle des pièces en vibration).

L'holographie ainsi que la diffraction admettent une même base commune : le principe de HUYGENS-FRESNEL. Nous allons revoir mathématiquement ce principe et ses conséquences physiques.

Principe de Huygens-Fresnel.

Une vibration lumineuse peut toujours s'exprimer *a priori* sous une forme scalaire du type :

(1)
$$\psi(x, y, z) = A(x, y, z) e^{j\omega t}$$

A(x, y, z) est l'amplitude complexe.

(2)
$$A(x, y, z) = a(x, y, z) e^{-j \cdot (x, y, z)}.$$

Nous savons que ψ répond à l'équation générale de la propagation :

(3)
$$\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \psi}{\delta t^2}$$

et conduit à l'équation connue sous le nom d'équation d'onde :

(4)
$$\Delta A + k^2 A = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Considérons alors deux fonctions A et A' vérifiant l'équation (4). Mathématiquement, nous les considérons comme continues, ainsi que leurs dérivées premières dans un domaine (D) fermé de surface (S), de normale \overrightarrow{n} orientée vers l'extérieur.

Le théorème de GREEN appliqué à A et A' donne :

(5)
$$\iint_{S} \left(A' \frac{\delta A}{\delta n} - A \frac{\delta A'}{\delta n} \right) dS = \iiint_{(D)} (A' \Delta A - A \Delta A') dv$$

A et A' vérifiant l'équation (4), il en résulte que :

(6)
$$\iiint_{(D)} (A' \Delta A - A \Delta A') dv = 0$$

donc:

(6')
$$\iint_{S} \left(A' \frac{\delta A}{\delta n} - A \frac{\delta A'}{\delta n} \right) dS = 0.$$

A et $\frac{\delta A}{\delta n}$ étant connus sur S, peut-on calculer A en un point M de (D)? Admettons la solution particulière pour A':

(7)
$$A' = \frac{1}{a} e^{-ikr}.$$

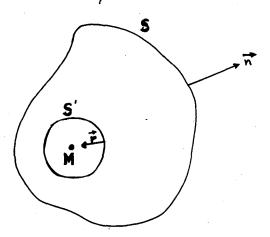


Fig. 1

C'est l'équation d'une onde sphérique divergente ayant pour pôle M. Soit une surface sphérique (S'), de centre M, de rayon r; le théorème de GREEN appliqué au volume V limité par S et S' s'écrit :

(8)
$$\iint_{S} \left(A' \frac{\delta A}{\delta n} - A \frac{\delta A'}{\delta n} \right) dS + \iint_{S'} \left(A' \frac{\delta A}{\delta n} - A \frac{\delta A'}{\delta n} \right) dS' = 0.$$

Sur S', on a : dn = -dr et l'élément d'angle solide $(d\Omega)$ s'exprime alors par :

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$$

(8) devient alors:

(8')
$$\iint_{S} \left(A' \frac{\delta A}{\delta n} - A \frac{\delta A'}{\delta n} \right) dS = \iint_{S'} \left(A' \frac{\delta A}{\delta r} - A \frac{\delta A'}{\delta r} \right) dS'$$

et:

$$(9) \iint_{S} \left(A' \frac{\delta A}{\delta n} - A \frac{\delta A'}{\delta n} \right) dS = \iint_{S} e^{-jkr} \left(r \frac{\delta A}{\delta r} + A \left(1 + jkr \right) \right) d\Omega$$

Lorsque r tend vers zéro, $\frac{\delta A}{\delta r}$ reste fini (A est une fonction sans singularité à l'intérieur de S) et le second membre tend vers $4\pi A$ (M).

D'autre part, si
$$(n, r) = \emptyset$$
, $\frac{\delta A}{\delta n} = \frac{\delta A}{\delta r} \cos \emptyset$ (fig. 2).

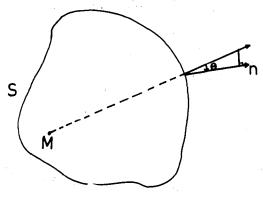


Fig. 2

En choisissant pour A' une solution du type:

(10)
$$A' = \frac{1}{r} e^{-jk\epsilon r}$$

 $\varepsilon = +1$ caractérise une onde sphérique divergente,

 $\varepsilon = -1$ caractérise une onde sphérique convergente.

On obtient:

(11)
$$A(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{\delta A}{\delta n} + \psi \left(\frac{1}{r} + jk\epsilon \right) \cos \vartheta \right] dS.$$

Dans la plupart des cas, en optique r est très supérieur à λ , il en résulte que :

(12)
$$A(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\delta A}{\delta n} + A j k \epsilon \cos \vartheta \right) dS.$$

C'est là l'expression générale du théorème de HUYGENS-FRESNEL. Supposons par exemple que l'amplitude A sur (S) est celle d'une onde issue d'un point O intérieur à (S). Posons :

(13)
$$A = \frac{a}{r'} e^{-jk\epsilon'r'} \text{ (fig. 3)}$$

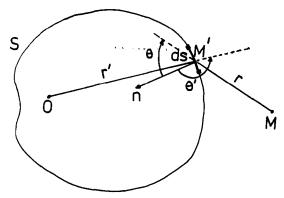


Fig. 3

$$\frac{\delta A}{\delta n} = \frac{\delta A}{\delta r'} \cos \vartheta'$$

la relation (12) devient:

(14)
$$A(M) = j \frac{a}{\lambda} \iint_{S} \frac{e^{-jk} (\varepsilon r + \varepsilon' r')}{rr'} \frac{\varepsilon \cos \theta - \varepsilon' \cos \theta'}{2} dS$$

Physiquement, cette relation (14) signifie que le calcul de A(M) peut s'obtenir en remplaçant la source O par des sources cohérentes réparties sur la surface (S). Chacune des sources ayant pour amplitude complexe :

$$dA = j \frac{a}{\lambda} \frac{e^{-jk\epsilon'r'}}{r'} dS.$$

Cette source élémentaire dS donne en M l'amplitude :

$$dA(M) = (j - \frac{a}{\lambda} - \frac{e^{-jk\epsilon'r'}}{r'} dS) \cdot \frac{1}{r} e^{-jkr}$$

la quantité $F(dS) = \frac{\varepsilon \cos \theta - \varepsilon' \cos \theta'}{2}$ est un coefficient de

forme; on somme alors sur toute la surface (S) pour obtenir A(M).

Remarque.

Il ne faut pas oublier le « côté pratique » d'une telle démonstration mathématique du principe de Huygens-Fresnel. On est conduit de ce point de vue à déterminer l'amplitude complexe $A(\xi,\eta)$ dans un plan (π) , connaissant cette amplitude A(x,y) dans le plan du diaphragme D. Si O et O' sont les centres du diaphragme (D) et du plan (π) , on peut écrire que $r \simeq OO' = p$ (fig. 4).

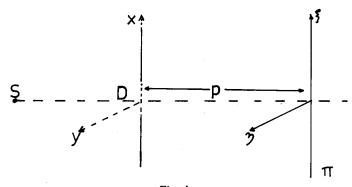


Fig. 4

(15)
$$A(\xi,\eta) = \frac{j}{\lambda p} \iint_{D} A(x,y) e^{-jkp} dS.$$

On parlera « alors » de transformée de Fourier, et la relation (15) représente la fonction image, ou encore fonction de transfert.

II. Les étapes de fabrication d'une « image » : le réseau de diffraction.

Envisageons dans une première étape, un réseau formé de N traits parallèles équidistants de C (pas du réseau). Si on éclaire ce réseau par un faisceau de lumière parallèle, on observe, chacun le sait, une infinité de spectres inclinés de ϑ sur l'axe, tels que :

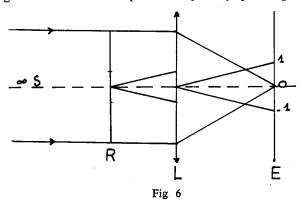
$$\sin \vartheta = k \frac{\lambda}{C}$$
 (fig. 5)

Fig. 5

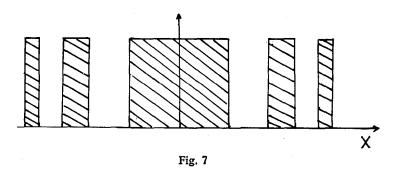
l'intensité lumineuse en (π) est proportionnelle à :

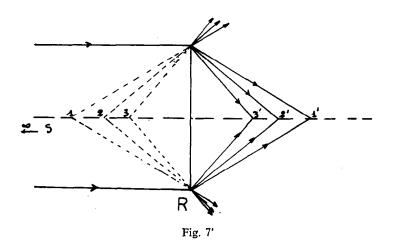
$$\frac{\sin^2(1/2 k \text{ NC } \sin \vartheta)}{\sin^2(1/2 k \text{ C } \sin \vartheta)}$$

Utilisons à présent un réseau dont la transmission en intensité est de la forme $\cos^2 x$; dans ce cas, on n'observe plus que l'image centrale et deux spectres S_{-1} et S_1 symétriques (fig. 6).

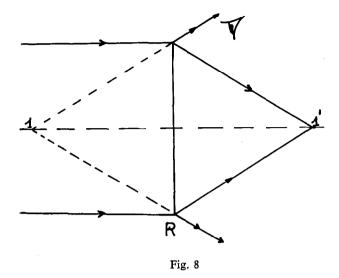


Pour aller plus loin dans la construction de notre image, utilisons un réseau dit « zoné ». On peut l'obtenir en traçant sur une lame de verre des cercles concentriques dont les rayons varient comme la racine carrée des entiers successifs; on noircit alors un intervalle sur deux. La fonction de transmission en intensité est la suivante (fig. 7 et 7'). Eclairé en lumière parallèle, le réseau



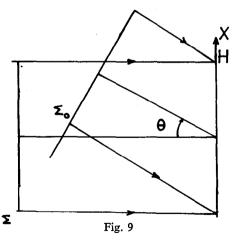


se comporte comme une lentille multifocale. On observe le faisceau direct et sur l'axe une infinité d'images virtuelles $S_1 S_2 S_3$ et réelles $S_1' S_2' S_3$. Si on remplace le profil rectangulaire par un profil en $\cos^2 x$, il n'y a plus alors qu'une seule image réelle et qu'une seule image virtuelle en plus du faisceau directement transmis. L'œil peut alors voir l'image S_1 d'un point S à l'infini (fig. 8).



III. Les étapes de « reconstruction » d'une onde en amplitude et en phase ou la naissance de l'holographie.

Prenons deux surfaces d'onde Σ et Σ_0 cohérentes, faisant entre elles un angle ϑ , qui arrivent sur une plaque photogra-



phique H (fig. 9). Les deux vibrations interfèrent et donnent des franges d'interférences. L'intensité résultante est égale à :

$$I = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi$$

avec:

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad \text{et} \quad \delta \simeq \vartheta x,$$

a et b les amplitudes de Σ_0 et Σ .

L'énergie reçue par cette plaque est proportionnelle à I, et le facteur de transmission τ de la plaque est une fonction de cette énergie. Si on prend a=b, on s'aperçoit (fig. 10) que le signal

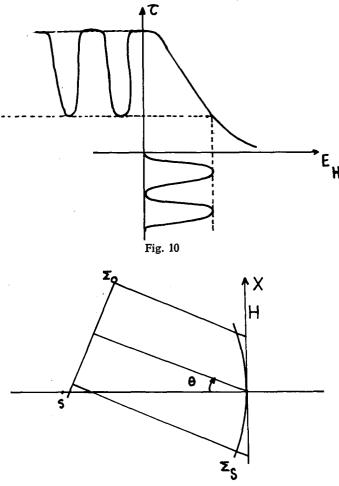


Fig. 11

sinusoïdal restitué est déformé, car on travaille dans la partie sous-exposée AB. Afin d'obtenir un profil sinusoïdal du facteur de transmission τ , il faut utiliser uniquement la partie rectiligne BC de la courbe et donc éclairer la plaque avec une intensité du type $A + B \cos^2 x$, ce qui s'obtient facilement en prenant des amplitudes différentes (a > b).

Eclairons maintenant la plaque H par deux ondes cohérentes Σ_0 plane et Σ_S sphérique issue de la source S et calculons l'éclairement reçu par H (fig. 11).

Posons:

(1)
$$A(x, y) = a e^{-jk\theta x}$$

l'amplitude complexe de Σ_0 ,

$$B(x, y) = b \exp(-j k \sqrt{p^2 + x^2 + y^2})$$

l'amplitude complexe de Σ_S .

L'éclairement s'exprime par :

(2) $E_H = (A + B)(\overline{A} + \overline{B}) = |A|^2 + |B|^2 \overline{A}B + A\overline{B}$, l'énergie W reçue, après un temps de pose t, est alors :

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}_{\mathbf{H}} t = |\mathbf{A}|^2 t + |\mathbf{B}|^2 t + \overline{\mathbf{A}} \mathbf{B} t + \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{B}} t.$$

Dans la partie rectiligne de la courbe de transmission $\tau = f(W)$, on a :

(3)
$$\tau = \tau_0 - \gamma (W - W_0) \quad \text{avec} \quad W_0 = |A|^2 t.$$

Cette expression devient alors:

(4)
$$\tau = \tau_0 - \gamma t (|\mathbf{B}|^2 + \overline{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{B}})$$

expression qui caractérise la modulation d'intensité sur la plaque H. Eclairons alors cette plaque au moyen d'une onde d'amplitude constante A_{O} . L'amplitude transmise par la plaque est alors :

(5)
$$A_0 \tau = [A_0 \tau_0 - \gamma_0 t \tau_0 | B|^2] ...$$

 $... - \gamma t A_0 ab e^{jkbx} \exp(-jk\sqrt{p^2 + x^2 + y^2})$
 $... - \gamma t A_0 ab e^{-jkbx} \exp(jk\sqrt{p^2 + x^2 + y^2}).$

Cette expression est composée de 3 termes, le premier relatif à une onde transmise directement, le second correspond à une onde sphérique divergente issue de l'image virtuelle S' et dont l'axe est incliné de ϑ par rapport à H, enfin le dernier terme représente une onde sphérique convergente vers l'image réelle S" et inclinée de $-\vartheta$ sur l'axe de H (fig. 12). Tout se passe donc comme si on avait reconstitué l'onde Σ issue de la source S à partir de sa figure de diffraction avec une onde de référence Σ_0 .

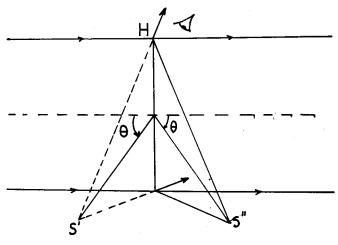


Fig. 12

Si on peut reconstituer l'image d'un point, on sait reconstituer celle d'un objet O quelconque : H est appelé hologramme de O.

A partir de cette étude, on peut évidemment faire varier la forme de l'onde et on parlera alors d'hologramme de Fresnel (l'onde plane de référence est remplacée par une onde sphérique Σ_S) ou d'hologramme de Fourier (Σ et Σ_O ont même courbure sur H).

IV. Les principes de l'holographie.

A partir des études précédentes, on constate donc que l'on peut faire interférer sur une plaque holographique, les ondes Σ et Σ_1 issues d'un élément de surface dS de l'objet O avec une onde de référence Σ_0 provenant d'une source cohérente S. A la restitution, les deux ondes Σ et Σ_1 interfèrent reproduisant l'état de surface dS de l'objet (fig. 13). Avant d'examiner plus en détail les montages expérimentaux, nous traiterons mathématiquement le problème de l'holographie en transmission.

Le schéma de principe est indiqué fig. 14. Une onde plane Σ traverse l'objet O. A une distance r de O, on a placé un diffuseur D de manière à éclairer entièrement l'hologramme H. Sans diffuseur, seul un point de la plaque serait éclairé, et la restitution nécessiterait alors une optique. Soit p la distance D-H; l'onde issue d'un point A du diffuseur s'exprime sous la forme :

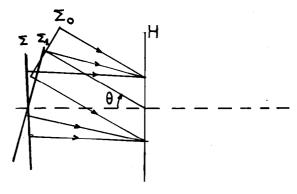


Fig. 13

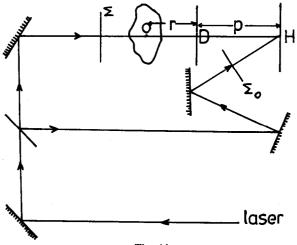


Fig. 14

(1)
$$D_1(x,y) = \frac{1}{r} e^{-jk(r+d)} \simeq \frac{1}{n} e^{-jkr} e^{-j\varphi}$$

où $\varphi=\dfrac{2\pi\,d}{\lambda}$, d étant une différence de marche introduite par l'action du diffuseur D.

D'après le théorème de Huygens-Fresnel, l'amplitude complexe dans le plan de H est donc :

(2)
$$A_1(\xi,\eta) = \frac{1}{p} \int \int_D e^{-jkr} e^{-j\varphi} dx dy.$$

Si A(x, y) est l'amplitude complexe due à l'onde Σ_0 , on sait que l'éclairement de la plaque holographique est alors :

(3)
$$W_1 = (A + A_1)(\overline{A} + \overline{A_1}) = |A|^2 + |A_1|^2 + A\overline{A_1} + \overline{AA_1}.$$

Plaçons alors l'objet derrière le diffuseur D, la relation (1) devient :

(1')
$$D_2(x, y) = \frac{1}{p} e^{-jkr} e^{-j\phi} e^{-j\theta}$$

 $\vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) e$ est le déphasage introduit par l'objet O d'épais-

seur e, d'indice n. De (2), on déduit donc :

(2')
$$A_2(\xi,\eta) = \frac{1}{p} \iiint_{\mathcal{D}} e^{-ikr} e^{-j\varphi} e^{-j\vartheta} dx dy.$$

D'où l'éclairement de la plaque :

(3')
$$W_2 = (A + A_2)(\overline{A} + \overline{A_2}) = |A|^2 + |A|^2 + A\overline{A_2} + \overline{AA_2}$$

Prenons donc un cliché de l'objet, avec un temps de pose t; puis un second cliché avec le même temps de pose t mais sans l'objet. Sur la plaque H, nous avons la superposition des deux éclairements W_1+W_2 , c'est-à-dire que le facteur de transmission en amplitude s'écrit sous la forme :

(4)
$$\tau = \tau_0 - \gamma t |A_1|^2 + |A_2|^2 + \overline{A}(A_1 + A_2) + A(\overline{A}_1 + \overline{A}_2).$$

En éclairant la plaque H par un faisceau de lumière du type:

$$A(x, y) = a e^{-jvx}$$

le dernier terme de l'expression (4) donne une onde :

$$-\gamma t a^2 (\overline{A}_1 + \overline{A}_2) = \gamma t - \frac{a^2}{p} \int_{D} e^{ikr} e^{i\varphi} (1 + e^{i\vartheta}) dx dy,$$

on recompose une image réelle en tous ses points, l'intensité est proportionnelle à :

$$e^{i\varphi}(1+e^{i\vartheta}) \cdot e^{-i\varphi}(1+e^{-i\vartheta})$$

c'est-à-dire que l'intensité est fonction de $\cos \frac{2\pi}{\lambda}$ (n-1)e.

On observe les franges d'égale épaisseur de l'objet O, franges qui peuvent être photographiées.

Effectuons une pose de l'objet O au « repos », puis une autre pose de l'objet O mais cette fois-ci déformé. On obtient alors :

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{p} \iint_D e^{-jkr} e^{-j\phi} e^{-j\theta} (1 + e^{-j\Delta\theta}) dx dy$$

$$\text{avec } \Delta \theta = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) \Delta e.$$

L'onde reconstituée présente une intensité proportionnelle à

$$\cos^2\frac{\pi}{\lambda}(n-1)\,\Delta e.$$

On obtient des franges d'égale variation d'épaisseur de l'objet O déformé. Ce principe reste valable si la pièce, au lieu d'être déformée de manière permanente, est excitée en vibrations.

V. La technique holographique.

Dans le cadre de l'enseignement de l'optique et de ses applications, nous avons été conduits à réaliser un banc d'holographie. Toutes les pièces de montage optique, de même que la table anti-vibratoire ont été réalisées par nos soins, à l'exception du support de plaque holographique et du filtre spatial qui nous ont été fournis par la Société Micro-Contrôle.

Les supports optiques reposent par l'intermédiaire de pieds magnétiques sur une plaque en fer de 8 mm d'épaisseur, reposant elle-même sur une table en béton de 250 cm de longueur sur 125 cm de largeur. La stabilité des divers montages est parfaite; l'intérêt des pieds magnétiques est de favoriser l'étudiant dans la connaissance des difficultés de la « prise de vue » d'un hologramme.

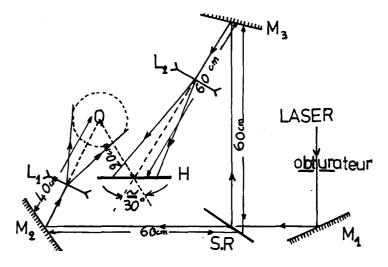
Ces difficultés, que nous examinerons, sont diverses : alignements et montages optiques, objet situé dans « le domaine de la longueur de cohérence » du laser utilisé, équilibrage du rapport de brillance entre la lumière diffractée par l'objet et le faisceau de référence, développement de la plaque, etc.

Nous proposons aux étudiants d'étudier trois montages classiques :

- 1. un hologramme de retransmission simple,
- 2. un hologramme de réflexion simple,
- 3. un hologramme de transmission, méthode de double exposition.

1. Un hologramme de retransmission simple.

Le montage utilisé pour la circonstance est représenté ciaprès. Le laser utilisé est un laser de 7MW Hélium-Néon de chez Cohérent-Radiation; on a placé devant le faisceau laser un obtu-



rateur à diaphragme du type « Synchro compur », ce qui permet de régler parfaitement le temps d'exposition. L'optique est constitué de 3 miroirs de 20 mm de diamètre, d'une séparatrice permettant de diviser le rayon principal en un faisceau de référence et un faisceau objet, et de deux lentilles divergentes qui sont en fait des oculaires de microscope de G=15.

Pour des raisons liées à la longueur de cohérence de notre laser (15 à 20 cm) il faut se souvenir en pratique que la distance parcourue par les faisceaux de référence et objet doit être un multiple de cette longueur de cohérence.

Par ailleurs, en vue d'une retransmission commode de l'hologramme, on s'assurera que l'écart angulaire entre le plan de symétrie du volume de cohérence et celui du faisceau de référence est d'environ 30°.

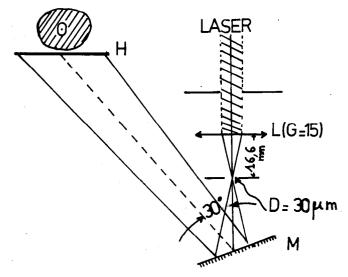
L'hologramme doit présenter un contraste suffisant; pour cela, on s'arrangera afin que l'intensité du faisceau de référence au niveau de la plaque soit de 2 à 5 fois plus lumineuse que le faisceau objet. Nous avons utilisé un luxmètre électronique.

Le temps de pose est de l'ordre de 1/4 à 1/2 seconde, suivant le caractère diffusant de l'objet dont on veut prendre l'hologramme. Nous avons utilisé des plaques Agfa 10E75 et un révélateur du type G3P de chez Agfa ou D11 de chez Kodak. Le temps de révélation dépend évidemment des conditions d'éclairement de la plaque, mais aussi d'autres paramètres plus impalpables comme la température du bain ou de la pièce, l' «âge » du révé-

lateur, etc. En moyenne, l'ordre de grandeur est environ 2 à 3 minutes. La plaque révélée doit être énergiquement rincée à l'eau, puis fixée. Afin d'améliorer la luminosité de l'hologramme, on peut, après fixation, utiliser une technique de blanchiment (hologramme phasé). En particulier Agfa propose une méthode de blanchiment pour ses plaques 8E75 ou 10E75. La plaque ayant été séchée, on peut alors reproduire l'hologramme de l'objet.

2. Un hologramme de réflexion simple.

Nous avons utilisé le montage suivant. La plaque, dont la partie sensible est tournée vers l'objet, est éclairée par un faisceau divergent issu du filtre spatial. Ce dernier est constitué d'un oculaire de microscope de G=15, associé à un diaphragme de 30 μm

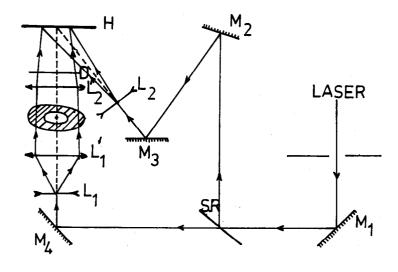


placé dans le plan focal de la lentille. Ce dispositif permet, après réglage, d'isoler la tache centrale avec une plage lumineuse bien homogène : on pourra alors parler de « nettoyage » du faisceau laser.

La procédure de prise de vue reste identique à la précédente; l'objet devant se situer le plus près possible de la plaque.

3. UN HOLOGRAMME DE TRANSMISSION, MÉTHODE DE DOUBLE EXPOSITION.

Le montage est encore représenté ci-après. L'objet est un anneau en plexiglas de 50 mm de diamètre intérieur et 100 mm de diamètre extérieur. Cet anneau peut être mis en traction par l'in-



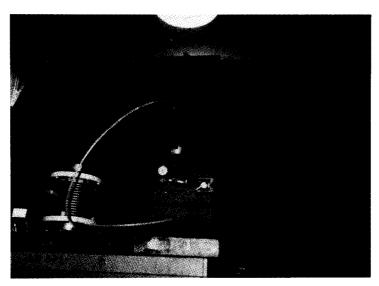


Photo 1. — Presse hydraulique à 2 soufflets permettant une traction parfaitement verticale.

termédiaire d'une presse hydraulique (photo 1) parfaitement guidée verticalement, c'est-à-dire sans possibilité de déplacement latéral de l'objet. D est un verre dépoli permettant d'assurer un éclairement homogène de la plaque, L₁ et L₂ deux lentilles permettant d'adapter l'étendue du faisceau géométrique à l'éclairement de l'objet et de la plaque-photo. On prend alors un cliché de l'anneau sans déformation, puis sans rien changer au montage,

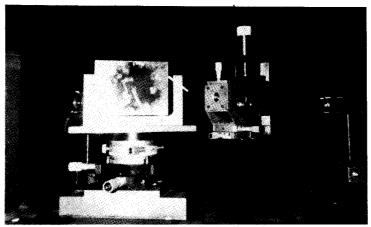


Photo 2. — Un hologramme de réflexion. On reconnaît le filtre spatial et le support holographique.

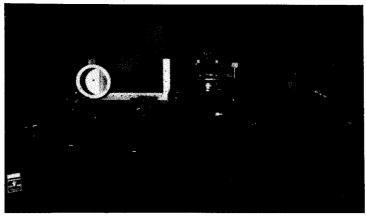


Photo 3. — Une vue du banc d'optique utilisé dans un hologramme de transmission.

un second cliché de l'objet, cette fois sous tension. Après développement, fixation et séchage; l'hologramme restitue l'anneau sur lequel on voit apparaître des franges sombres qui sont les franges d'égale variation d'épaisseur. On pourrait montrer en résistance des matériaux que les franges sont aussi des franges d'égale somme de contraintes principales et par conséquent étudier le comportement mécanique de cette structure (photos 2 et 3).

VI. Conclusion.

Nous avons voulu présenter, au cours de cette étude, les fondements théoriques, ainsi que les applications pratiques d'une technique qui permet à l'étudiant de mieux appréhender l'optique, aussi bien géométrique que physique par ses nombreux aspects diversifiés : réglages optiques, notion de cohérence spatiale ou temporelle, filtrage spatial ainsi que tous les problèmes liés à la prise d'un hologramme et à son développement.

Nous estimons que l'aspect pratique entrevu ici constitue une étape préliminaire suffisante à l'information dans l'enseignement de l'holographie, moyen d'expression de la diffraction par une onde cohérente. Il ne faudrait cependant pas minimiser l'importance des recherches dans ce domaine, ni la complexité des problèmes qui s'y rattachent.