# Exemples de matière dégénérée en astrophysique : naines blanches et étoiles à neutrons

par L. BOTTINELLI,
Observatoire de Meudon, 92190 Meudon.

L'Univers nous présente des situations où les conditions physiques peuvent être tout à fait extrêmes, par comparaison avec ce que nous rencontrons dans l'expérience terrestre. Par exemple, les milieux gazeux peuvent être exceptionnellement dilués dans le milieu interstellaire, avec une masse volumique de l'ordre de $10^{-21}$ kg m$^{-3}$ (et une température de l'ordre de 100 K). Par contre, le gaz — complètement ionisé — constituant une étoile comme le soleil a une masse volumique moyenne beaucoup plus élevée égale à $1{,}4 \times 10^3$ kg m$^{-3}$ ; cette masse volumique étant environ 100 fois plus grande dans les régions centrales, avec une température de l'ordre de $10^7$ K. Cette température est suffisamment élevée pour que le gaz stellaire au centre du soleil soit encore un gaz parfait malgré sa grande densité ; en effet, la condition pour qu'un gaz soit parfait peut s'exprimer pratiquement sous la forme : $kT \gg \varepsilon_F$ où $\varepsilon_F$ désigne l'énergie de FERMI des particules constituant le gaz. Si l'on exprime $\varepsilon_F$ en terme de température $T_{lim}$ à l'aide de la définition suivante : $\varepsilon_F = k\,T_{lim}$, la conditon précédente s'écrit : $T \gg T_{lim}$. Le rapport $T_{lim}/T$ représente le paramètre de dégénérescence : $T_{lim}/T$ très grand correspond au cas de la dégénérescence complète. $T_{lim}$ s'exprime en fonction de la masse $m$ des particules et de leur densité numérique $n$ par une relation de la forme : $T_{lim} \propto m^{-1}\, n^{2/3}$, dans le cas non relativiste. Au centre du soleil, milieu complètement ionisé constitué environ pour moitié (en masse) d'hydrogène et d'hélium, la valeur la plus élevée de $T_{lim}$ est obtenue pour les électrons et correspond à $T_{lim} \approx 5 \times 10^6$ K. *A fortiori*, la condition $T \gg T_{lim}$ sera également vérifiée pour les protons et les noyaux d'He. Cependant, comme nous le décrirons plus loin, le gaz stellaire peut atteindre au cours de l'évolution d'une étoile des densités beaucoup plus élevées que celles rencontrées dans le Soleil, c'est le cas notamment des étoiles naines blanches pour lesquelles la masse volumique moyenne est de l'ordre de $10^8$ kg. m$^{-3}$ et des étoiles à neutrons (la masse volumique moyenne est de l'ordre de $10^{17}$-$10^{18}$ kg. $^{-3}$). Les températures (de l'ordre de $10^7$ K) ne sont alors plus assez élevées pour que la condition $T \gg T_{lim}$ soit réalisée et le gaz stellaire est dans un état dégénéré ; celui-ci pouvant être, aux densités les plus élevées, un état dégénéré relativiste. Ces états extrêmes de la matière induisent une structure d'ensemble des étoiles très denses — que nous déterminerons plus loin par un calcul simple — tout à fait différente de celle des étoiles constituées de gaz classique.

## I. SIRIUS B : LA PREMIERE NAINE BLANCHE OBSERVEE.

C'est l'astronome allemand Friedrich BESSEL dans la première moitié du 19e siècle qui proposa d'expliquer le mouvement périodique de l'étoile Sirius par l'interaction gravitationnelle d'un compagnon invisible. Cette hypothèse fut confirmée vingt ans plus tard, en 1862, par l'astronome américain CLARK qui réussit à observer l'étoile compagnon de Sirius. Sirius est donc une étoile double : Sirius A est la composante brillante visible à l'œil nu, le compagnon d'éclat beaucoup plus faible est appelé Sirius B.

Les observations régulières des positions apparentes des deux étoiles permettent de déterminer d'une part les ellipses trajectoires de chaque étoile par rapport au centre de gravité du système et d'autre part l'ellipse trajectoire de Sirius B par rapport à Sirius A. On trouve ainsi que le rapport des masses des deux étoiles $M_A/M_B$ égal au rapport des distances $r_B/r_A$ de chaque étoile au centre de gravité vaut 2,3. La troisième loi de KEPLER, appliquée au mouvement relatif de Sirius B autour de Sirius A, permet d'obtenir la somme des masses des deux composantes à partir de la période observée T, et du demi-grand axe apparent $a$ de l'ellipse relative par la relation : $a^3/(p^3\,T^2) = M_A + M_B$ où $p$ désigne la parallaxe de Sirius exprimée en seconde d'arc (la parallaxe — mesurée en utilisant le mouvement annuel de la Terre autour du Soleil — est l'angle sous lequel on voit depuis l'étoile le rayon moyen de l'orbite terrestre) ; $a$ est exprimé en seconde d'arc, $M_A$ et $M_B$ sont exprimées en masse solaire (la masse du Soleil notée $M_\odot$, vaut $2 \times 10^{30}$ kg). A partir des valeurs observées suivantes : $T = 50$ ans, $a = 7''62$, $p = 0''379$, on obtient : $M_A + M_B = 3{,}25\ M_\odot$. On obtient donc la masse suivante pour chaque composante :

$$M_A = 2{,}27\ M_\odot \qquad \text{et} \qquad M_B = 0{,}98\ M_\odot .$$

La comparaison des éclats apparents de chaque composante indique que Sirius A est environ 40 000 fois plus brillante que Sirius B. Ceci explique que Sirius B ne pouvait être détectée qu'à l'aide d'un instrument assez puissant.

Par comparaison avec le Soleil, la puissance totale rayonnée par chaque étoile, appelée luminosité L, vaut :

$$L_A \approx 40\ L_\odot \qquad \text{et} \qquad L_B \approx 10^{-3}\ L_\odot$$

où $L_\odot$ désigne la luminosité du Soleil ($L_\odot = 4 \times 10^{26}$ W). Ainsi apparaît une première particularité de Sirius B — particularité commune aux étoiles naines blanches en général — : *la luminosité est très faible comparée à la masse.* Les étoiles classiques, telles Sirius A et le Soleil obéissent à une relation « masse-luminosité » de la forme : $L \propto M^{4-5}$ à laquelle, les étoiles naines blanches n'obéissent pas.

Comment s'explique cette faible luminosité relative de Sirius B ? L'observation indique que Sirius A et Sirius B ont la même couleur, correspondant à une température superficielle $T_{eff}$ de 10 000 K. Cette luminosité s'exprime en fonction du rayon R de l'étoile et de la température $T_{eff}$ appelée température effective, définie comme la température du corps noir qui rayonnerait la puissance totale L ; d'où :

$$L_B = 4\pi R_B^2 \sigma T_{eff}^4 \qquad \text{et} \qquad L_A = 4\pi R_A^2 \sigma T_{eff}^4$$

où $\sigma$ désigne la constante de STEFAN. Ainsi la luminosité beaucoup plus faible de Sirius B est due à son rayon beaucoup plus petit : en effet $R_B/R_A = (L_B/L_A)^{1/2} \approx 1/200$.

En comparant ces rayons à celui $R_\odot$ du Soleil,

$$(R_\odot = 7 \times 10^5 \text{ km})$$

pour lequel $T_{eff} = T_\odot = 6\,000$ K, on obtient :

$$R_A \approx 2{,}3\ R_\odot \qquad \text{et} \qquad R_B \approx R_\odot/100.$$

Ainsi, Sirius B a une masse comparable à celle du Soleil et un rayon 100 fois plus petit, comparable à celui de la Terre. Ceci constitue une caractéristique générale des étoiles naines blanches : *leur rayon est comparable à celui des planètes ;* aussi, bien que relativement chaudes, ces étoiles ont une faible luminosité.

On comprend alors que la masse volumique moyenne d'une naine blanche soit très élevée. Dans le cas de Sirius B, on a :

$$\bar{\varrho}_B = M_B \Big/ \left( \frac{4\pi}{3} R_B^3 \right) \approx 1{,}4 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$$

soit une valeur $10^6$ fois plus élevée que la masse volumique moyenne du Soleil et environ $10^4$ fois plus élevée qu'au centre du Soleil.

La température limite $T_{lim}$ obtenue précédemment pour les électrons au centre du Soleil devient ici environ $10^3$ fois plus élevée, soit de l'ordre de $10^9$ K ; dans les zones centrales de Sirius B, la densité sera supérieure à $\bar{\varrho}_B$ et $T_{lim}$ dépassera même

$10^9$ K. On comprend alors que pour $T \approx 10^7$ K (ordre de grandeur des températures régnant dans les naines blanches), les électrons sont dans un état tel que $T < T_{lim}$, autrement dit le gaz d'électrons pourra être considéré comme un *gaz d'électrons complètement dégénéré.* Par contre, la température $T_{lim}$ relative aux ions (protons, particules $\alpha$, noyaux de carbone, essentiellement) sera beaucoup plus faible — puisque $T_{lim} \propto m^{-1}$ — avec $T_{lim} \approx 10^4$ K, ce qui entraîne : $T_{ion} \gg T_{lim}$. Cela signifie que le gaz constitué par les ions pourra être considéré comme un gaz parfait. On arriverait à des conclusions analogues pour les densités très élevées conduisant à des conditions relativistes.

Nous rappellerons, avant d'établir simplement les principales propriétés de la structure des naines blanches, quelles sont les grandes étapes conduisant à la formation d'étoiles naines blanches ou d'étoiles à neutrons.

## II. QUELQUES GRANDES LIGNES DE L'EVOLUTION STELLAIRE.

Une étoile classique naît de la contraction gravitationnelle d'une grande masse de gaz sphérique constituée essentiellement d'hydrogène qui, si la masse gazeuse est supérieure à environ 5/100e de la masse du Soleil, produit dans les régions centrales des températures d'au moins $10^7$ K suffisantes pour déclencher des réactions thermonucléaires de fusion de l'hydrogène en hélium. Cette production centrale d'énergie crée alors dans la sphère gazeuse un gradient de pression qui, en contrebalançant la contraction gravitationnelle, assure l'équilibre de l'étoile. La pression totale comprend celle due au gaz parfait d'électrons, et celle due au gaz parfait d'ions auxquelles s'ajoute, dans le cas des étoiles les plus chaudes, la pression de radiation. Ce dernier terme proportionnel à $T^4$ est négligeable devant la pression gazeuse pour les étoiles analogues au Soleil.

La théorie de la structure interne d'une étoile permet de décrire comment l'énergie produite au centre de l'étoile est transportée vers sa surface d'où elle est rayonnée et d'établir, pour une étoile de masse et de composition chimique donnée, la valeur des différents paramètres physiques en chaque point de l'étoile : cet ensemble de valeurs qui constitue un modèle d'étoile, varie au cours du temps à mesure que la composition chimique de l'étoile se modifie dans ses régions centrales du fait des réactions thermonucléaires.

Des protoétoiles de différentes masses donnent naissance à des étoiles de structure différente : plus la masse initiale est élevée, plus l'étoile a un grand rayon et plus la température de ses régions centrales est élevée. Ceci a pour effet d'accélérer le rythme des réactions thermonucléaires de fusion avec la double conséquence d'augmenter le débit d'énergie produite au centre de l'étoile et donc sa puissance rayonnée et d'épuiser plus rapidement le combustible nucléaire. Comme cela a été indiqué précédemment la luminosité des étoiles classiques est proportionnelle à la puissance 4 ou 5 de la masse. D'autre part, la durée de vie des étoiles massives (masse supérieure à 15 $M_{\odot}$) est seulement de l'ordre de quelques millions d'années, alors qu'elle est de l'ordre de plusieurs milliards d'années pour les étoiles de masse voisine de celle du Soleil.

Lorsque tous les noyaux d'hydrogène des régions centrales de l'étoile ont été transformés en noyaux hélium, la contraction gravitationnelle n'est plus contrebalancée et elle redevient prépondérante. L'étoile n'est plus alors en équilibre et sa contraction centrale a pour effet d'augmenter la température dans les régions centrales. Lorsque cette température atteint $10^8$ K, les réactions de fusion de l'hélium lui-même peuvent prendre place. L'étoile qui a subi des modifications importantes au cours de la phase de contraction des régions centrales, l'atmosphère en particulier s'étant dilatée, trouve un nouvel état d'équilibre pendant la période où les noyaux d'hélium se transforment en noyaux de carbone. Quand tout l'hélium est épuisé, la contraction des régions centrales reprend. La production d'énergie par transformation de noyaux de carbone en noyaux plus lourds nécessite une température de $10^9$ K environ, mais un état d'équilibre peut s'établir *avant* que la contraction permette d'atteindre cette température parce que l'augmentation de la densité rend le gaz d'électrons très fortement dégénéré. La contraction de l'étoile très dense peut être stoppée par les effets du gradient de pression du gaz dégénéré d'électrons, si sa masse ne dépasse pas 1,44 masses solaires, elle constitue alors une *naine blanche.*

Cette masse limite appelée « *limite de* CHANDRASEKHAR » sera évaluée simplement dans la suite.

Une étoile naine blanche n'a pas de source d'énergie sauf quelques dernières réactions de fusion de l'hélium en carbone dans ses régions superficielles : elle ne rayonne donc plus beaucoup de lumière. Elle se transformera lentement en naine noire, invisible.

Si la masse de l'étoile est supérieure à 1,44 masses solaires, la dégénérescence électronique n'est pas suffisante pour arrêter la contraction : la température de l'étoile peut atteindre et dépasser $10^9$ K. La suite des processus est assez complexe, conduisant à la synthèse d'éléments de plus en plus lourds jusqu'au fer. Des variations rapides du taux de production d'énergie peuvent conduire l'étoile à exploser en éjectant une grande partie de sa masse dans le milieu interstellaire : il s'agit du phénomène de *supernova.* Le résidu de l'explosion se contracte sur lui-même et s'il n'est pas trop massif (masse inférieure à 2 ou 3 $M_{\odot}$ environ) peut se stabiliser sous la forme d'une *étoile à neutrons.* L'équilibre est alors essentiellement assuré par l'action du gradient de pression dû au gaz dégénéré de neutrons. Enfin, si le résidu a une masse plus élevée, il semble que rien ne puisse s'opposer à son écroulement définitif sous la forme d'un *trou noir.*

## III. LA STRUCTURE D'ENSEMBLE DES NAINES BLANCHES.

On peut généralement considérer qu'une étoile est stratifiée en couches concentriques homogènes. On décrit alors son état physique par les valeurs $\varrho(r)$, $P(r)$, $T(r)$ de la masse volumique, la pression ou la température à la distance $r$ du centre de l'étoile ; on note par $M_r$ et $V_r$ la masse et le volume de la sphère de rayon $r$, et on appelle R le rayon de l'étoile et M sa masse.

On peut obtenir une excellente approximation de la structure d'ensemble d'une naine blanche, en particulier la relation liant sa masse et son rayon, en considérant que la pression s'y réduit à la seule pression $P_e$ du *gaz de Fermi d'électrons et que ce gaz est complètement dégénéré* ($T = 0$). La pression du gaz parfait (à $T \approx 10^7$ K environ) constitué par les noyaux est en effet très inférieure — au moins d'un facteur 100 — à la pression des électrons ; de plus, les électrons sont fortement dégénérés ($T \ll T_{lim}$), ce qui justifie l'approximation $T \approx 0$ pour les électrons.

### 1. L'équation d'état d'un gaz complètement dégénéré.

L'équation d'état d'un gaz d'électrons complètement dégénéré sera utilisée ici pour des raisons de simplicité dans deux cas extrêmes suivant que l'impulsion de FERMI $p_F$ des électrons est très inférieure ou très supérieure à $m_e c$, où $m_e$ désigne la masse des électrons et $c$ la vitesse de la lumière. Dans le cas de la dégénérescence complète, la densité numérique en électrons $n_e$ s'exprime en fonction de l'impulsion de FERMI par la relation :

$$n_e = \int_0^{p_F} 8\pi p^2\, dp/h^3 = (8\pi/3\,h^3)\, p_F^3.$$

Le cas où $p_F \ll m_e c$ appelé « cas non relativiste » et le cas $p_F \gg m_e c$ appelé « cas très relativiste », correspondent donc à 2 domaines de densité :

$$n_e \ll 5{,}9 \times 10^{29}\ \text{cm}^{-3} \qquad \text{et} \qquad n_e \gg 5{,}9 \times 10^{29}\ \text{cm}^{-3},$$

respectivement.

L'énergie de FERMI $\varepsilon_F$ correspondant à l'impulsion $p_F$ prend l'une des deux formes suivantes :

$$\varepsilon_F \approx p_F^2/(2\,m_e) \propto n_e^{2/3} \quad \text{dans le cas non relativiste,}$$

et $\varepsilon_F \approx p_F c \propto n_e^{1/3}$ dans le cas très relativiste.

La forme de l'équation d'état liant la pression $P_e$ à $n_e$ peut s'obtenir en exprimant la pression comme la dérivée de l'énergie par rapport au volume, soit : $P_e \propto -\dfrac{\partial \varepsilon_F}{\partial (n_e^{-1})}$, d'où :

$P_e \propto n_e^{5/3}$ (cas non relativiste)

ou $P_e \propto n_e^{4/3}$ (cas très relativiste).

La masse volumique $\varrho$ du milieu complètement ionisé constituant la naine blanche s'exprime en fonction de $n_e$ et du paramètre $\mu_e = A/Z$ où A et Z désignent respectivement le nombre de masse et le numéro atomique des noyaux ; en général : $\mu_e \approx 2$. En négligeant la masse d'un électron devant la masse $m_p$ d'un proton, on obtient : $\varrho = n_e \mu_e m_p$.

Au total, l'équation d'état s'écrit :

— *cas non relativiste* ($p_F \ll m_e c$) : $P_e = K_1 (\varrho/\mu_e)^{5/3}$ avec :

$$K_1 = (h^2/20\, m_e m_p)(3/\pi m_p)^{2/3} \tag{1}$$

où $h$ désigne la constante de Planck. La constante $K_1$ vaut $9{,}91 \times 10^6$ (unités SI) ;

— *cas très relativiste* ($p_F \gg m_e c$) : $P_e = K_2 (\varrho/\mu_e)^{4/3}$ avec :

$$K_2 = (hc/8\, m_p)(3/\pi m_p)^{1/3} \tag{2}$$

$K_2 = 1{,}23 \times 10^{10}$ (unités SI).

**2. L'équilibre mécanique d'une étoile et caractéristiques de cet équilibre pour une naine blanche.**

Comme cela a été dit plus haut, une étoile est un système autogravitant dont l'équilibre est assuré par l'action du gradient de pression interne. Un élément de volume unité situé à la distance $r$ du centre de l'étoile est soumis à une attraction centrale d'intensité : $G M_r \varrho(r)/r^2$ qui est équilibrée par la force d'intensité $-\dfrac{dP}{dr}$, due au gradient de pression.

L'équilibre mécanique s'exprime donc par la relation :

$$-\frac{dP(r)}{dr} = \frac{G M_r \varrho(r)}{r^2} \tag{3}$$

où G désigne la constante de la gravitation universelle :

($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ unités SI).

Une analyse en dimension de l'équation (3) indique que le terme d'attraction gravitationnelle : $GM_r\,\varrho(r)/r^2$ est proportionnel à :

$$\boxed{GM^2/R^5}$$

Le terme de gradient de pression prend l'une ou l'autre des deux formes :

— *cas non relativiste :* $P = P_e \propto \varrho^{5/3}$,

d'où : $$\frac{dP}{dr} \propto \varrho^{2/3}\,\frac{d\varrho}{dr} \propto \varrho^{2/3}\,\frac{\varrho}{R} \propto \boxed{M^{5/3}/R^6}$$

— *cas très relativiste :* $P = P_e \propto \varrho^{4/3}$,

d'où : $$\frac{dP}{dr} \propto \varrho^{1/3}\,\frac{d\varrho}{dr} \propto \varrho^{4/3}/R \propto \boxed{M^{4/3}/R^5}$$

L'équilibre s'exprime donc par :

— *cas non relativiste :*

$$GM^2/R^5 \propto M^{5/3}/R^6,$$

d'où :

$$\boxed{RM^{1/3} = \text{constante}}$$

— *cas très relativiste :*

$GM^2/R^5 \propto M^{4/3}/R^5$, d'où M = constante, il en résulte une valeur bien définie pour la masse, il s'agit de la masse limite $M_{lim}$ de CHANDRASEKHAR citée précédemment ($M_{lim} = 1{,}44\ M_\odot$).

Dans ce cas, l'équilibre ne peut être atteint que pour cette valeur bien particulière de la masse. Si $M > 1{,}44\ M_\odot$, le terme d'attraction gravitationnelle devient prépondérant et il y a effondrement. Si $M < 1{,}44\ M_\odot$, le terme de gradient de pression devient prépondérant et il y a expansion ; le gaz devient alors non relativiste et on pourra atteindre un nouvel équilibre, celui relatif au gaz dégénéré non relativiste avec $RM^{1/3}$ = constante.

En conclusion, *une naine blanche ne peut avoir une masse supérieure à 1,44 masses solaires.* Par ailleurs, son rayon est d'autant plus petit que sa masse est élevée (toujours avec $M < 1{,}44\ M_\odot$), au contraire des étoiles classiques.

### 3. L'équilibre mécanique et le théorème du viriel.

En multipliant les deux membres de la relation (3) par le volume $V_r = 4\pi r^3/3$ et compte tenu de la symétrie sphérique qui s'exprime par : $dM_r = 4\pi r^2 \varrho(r)$, on obtient :

$$3\, V_r\, dP(r) = -G\, M_r\, dM_r/r.$$

En intégrant sur toute l'étoile et compte tenu de :

$$\int_0^R V_r\, dP(r) = [P(r)\, V_r]_0^R - \int_0^R P(r)\, dV_r$$

et des conditions aux limites : $V_r = 0$ pour $r = 0$ et $P(r = R) = 0$, il résulte la relation :

$$\boxed{3 \int_0^R P(r)\, dV_r = \int_0^R G\, M_r\, dM_r/r} \qquad (4)$$

Cette relation, générale pour tout système autogravitant en équilibre sans mouvement de matière et sans champ magnétique, n'est autre que le théorème du viriel classique : $2\, E_{cin} = -\Omega$ où $E_{cin}$ est l'énergie cinétique du système et $\Omega$ son énergie potentielle. En effet : $P(r)$ est égal aux 2/3 de la densité d'énergie cinétique et l'intégrale du second membre de (4) représente l'opposé de l'énergie potentielle du système.

Cette relation (4) permet de déterminer les caractéristiques d'ensemble des naines blanches avec une excellente approximation en évaluant de manière approchée chacune des deux intégrales. Pour cela, on remplace dans le calcul, $\varrho(r)$ par sa valeur moyenne : $\bar{\varrho} = M/\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right)$.

Ainsi, $M_r$ sera remplacé par $4\pi r^3 \bar{\varrho}/3$ et $dM_r$ par $4\pi r^2 \bar{\varrho}\, dr$, d'où :

$$\int_0^R G\, M_r\, dM_r/r = (16\pi^2 G/15)\, \bar{\varrho}^2 R^5.$$

$P(r)$ prendra l'une des formes (1) ou (2) où $\varrho(r)$ sera remplacé par la constante $\bar{\varrho}$.

### 4. La relation masse-rayon pour les naines blanches peu massives.

Dans le cas non relativiste : $P(r)$ est remplacé par $K_1 (\bar{\varrho}/\mu_e)^{5/3}$ et le premier terme de (4) devient :

$$3 \int_0^R P(r)\, dV_r = (4\pi K_1/\mu_e^{5/3})\, \bar{\varrho}^{5/3} R^3,$$

d'où la relation : $$\boxed{R\,M^{1/3} = K} \qquad (5)$$

avec : $$K = 5\,(4\,\pi/3)^{-2/3}\,K_1\,\mu_e^{-5/3}/G.$$

Pour $\mu_e = 2$, on obtient $K = 9 \times 10^{16}$ (unités SI).

On retrouve bien la forme de la relation indiquée précédemment au § 2, avec ici une valeur explicite pour la constante K. D'après (5), une naine blanche de masse égale à celle du Soleil, soit $M = 2 \times 10^{30}$ kg, aura un rayon R égal à $7 \times 10^6$ m environ, soit le centième du rayon du Soleil. Cela correspond bien aux caractéristiques observées pour Sirius B (cf. § I).

Il faut noter cependant que la relation (5) a été établie dans le cas non relativiste et n'est donc pas générale pour toutes les naines blanches.

Lorsque l'on considère des étoiles naines blanches de masse croissante, la densité massique moyenne $\bar{\varrho}$ augmente — compte tenu de (5) — comme $M^2$. On peut donc prévoir que la densité, au moins dans les régions centrales, devient trop élevée pour que l'approximation non relativiste reste valable. Pour préciser la valeur limite $M_1$ de la masse qui autorise l'approximation non relativiste, on peut évaluer, toujours de manière approchée, la valeur $P_c$ de la pression au centre de l'étoile, donc la valeur $\varrho_c$ de la densité centrale. Cette valeur peut s'obtenir en intégrant l'équation d'équilibre mécanique (3) dans le cadre de l'approximation précédente, où l'on remplace $\varrho\,(r)$ par sa valeur moyenne $\bar{\varrho}$. On trouve ainsi :

$$P_c = \frac{3\,G}{8\,\pi}\,M^2/R^4, \text{ soit compte tenu de (5) : } P_c = (3\,G/8\,\pi\,K^4)\,M^{10/3}$$

et d'après (1) :

$$(\varrho_c/\mu_e)^{5/3} = (3\,G/8\,\pi\,K^4\,K_1)\,M^{10/3}.$$

Par ailleurs, le cas non relativiste correspond, comme cela a été vu précédemment à la condition suivante pour la densité numérique en électrons : $n_e = \dfrac{1}{m_p}\,(\varrho/\mu_e) \ll 5{,}9 \times 10^{29}\ \text{cm}^{-3}$. Il en résulte la condition suivante sur la masse :

$$M \ll 1{,}9 \times 10^{30}\ \text{kg} \qquad \text{soit} \qquad M \ll 1\,M_\odot.$$

Autrement dit : *la relation* (5) *ne s'applique qu'aux naines blanches de faible masse.* Pour des masses plus élevées que la masse du Soleil, la dégénérescence du gaz d'électrons sera relativiste et pour des masses encore plus élevées, cette dégénérescence deviendra très relativiste.

**5. La limite supérieure de la masse d'une naine blanche.**

En reprenant la démarche suivie au § 4 et en se plaçant dans le cas très relativiste où $P(r)$ est remplacé par $K_2(\overline{\varrho}/\mu_e)^{4/3}$, on obtient :

$$3\int_0^R P(r)\,dV_r = 4\pi K_2 \mu_e^{-4/3}\overline{\varrho}^{4/3} R^3.$$

Les termes en R disparaissent alors de la relation (4) qui se réduit à :

$$M = (3/4\pi)^{1/2}(5K_2/G)^{3/2}\mu_e^{-2}. \qquad (6)$$

Le calcul explicite (avec $\mu_e = 2$) fournit : $M \approx 1{,}6\ M_\odot$. Cette valeur représente la masse maximum que peut avoir une naine blanche. Le calcul approché qui a été effectué ici en fournit un excellent ordre de grandeur puisque la limite de CHANDRASEKHAR vaut $1{,}44\ M_\odot$.

Les résultats théoriques donnés par CHANDRASEKHAR pour la structure interne des naines blanches, en supposant $P = P_e$ et $\mu_e = 2$, sont représentés sur la figure. On y retrouve en particu-

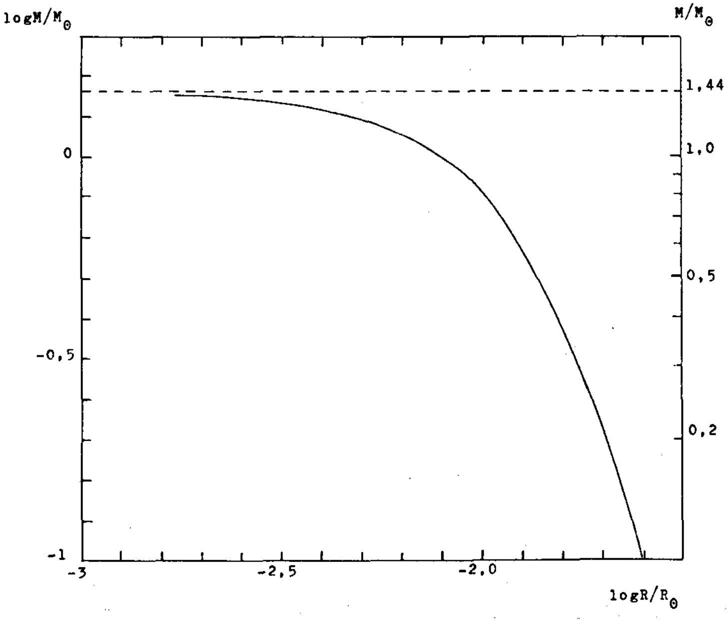


Fig. — Relation théorique entre la masse M (exprimée en unités solaires $M_\odot$) et le rayon R (exprimé en unités solaires R ) pour les étoiles naines blanches.

lier les résultats établis précédemment de manière approchée, c'est-à-dire, l'existence d'une masse limite maximum quand le rayon tend vers zéro et la relation approchée $RM^{1/3}$ = constante — soit encore $\log (M/M_{\odot}) = -3 \log (R/R_{\odot})$ + constante — pour les faibles masses ($M/M_{\odot} \lesssim 0{,}3$). Les données observationnelles obtenues sur les luminosités et les températures effectives des naines blanches — on rappelle que $L \propto R^2 T_{eff}^4$ — montrent que les rayons des naines blanches sont en bon accord avec les prédictions théoriques des modèles fondés sur l'équilibre d'une sphère autogravitante contenant un gaz dégénéré d'électrons.

### 6. Application au cas des étoiles à neutrons.

Au cours de la formation d'une étoile à neutrons (cf. II), la grande densité rend l'énergie de FERMI du gaz dégénéré d'électrons si élevée qu'il est énergétiquement plus facile aux électrons de se combiner avec les protons à l'intérieur des noyaux pour former des neutrons.

A mesure que la densité augmente, les neutrons ne sont plus liés aux noyaux et forment un gaz de neutrons libres, complètement dégénéré. L'état d'équilibre peut être atteint grâce à la pression de FERMI de ce gaz de neutrons. L'étoile est alors composée essentiellement de neutrons libres et d'un petit nombre d'électrons, dont l'énergie de FERMI est suffisante pour stopper la désintégration des neutrons, et d'un nombre égal de protons.

La pression totale est alors due essentiellement au gaz dégénéré de neutrons. L'équation d'état dans le cas non relativiste a une forme analogue à (1), soit :

$$P = K'_1 \varrho_n^{5/3} \qquad \text{avec} \qquad K'_1 = 5{,}5 \times 10^3 \text{ (unités SI)}$$

et où $\varrho_n$ désigne la densité massique en neutrons.

Le coefficient $K_1$, relatif aux particules de masse $m$, étant inversement proportionnel à $m$, on remarque que $K'_1 \approx K_1/2\,000$. Par ailleurs, la prépondérance des neutrons dans le mélange stellaire est telle que l'on peut prendre $\varrho_n \approx \varrho$.

Le calcul effectué aux III.3. et III.4. se transpose exactement ici en remplaçant $K_1 \mu_e^{-5/3}$ par $K'_1$. Il en résulte donc une relation masse-rayon du même type que celle décrite par la relation (5) : $RM^{1/3} = K'$, avec une nouvelle constante $K' = K\,K'_1/K_1 \mu_e^{-5/3}$, soit (compte tenu de $\mu_e = 2$) : $K' = 1{,}6 \times 10^{14}$ (unités SI).

D'après cette relation, une étoile à neutrons de masse 1,5 $M_{\odot}$ (soit $3 \times 10^{30}$ kg) aura un rayon R égal à $10^4$ $m$. Ceci correspond à une densité massique moyenne de $10^{17}$ kg. m$^{-3}$. Les valeurs très faibles des rayons des étoiles à neutrons leur permettent de tourner sur elles-mêmes avec des périodes très courtes (de l'ordre de la seconde) sans se disloquer. C'est l'une des raisons pour lesquelles on a pu identifier les pulsars à des étoiles à neutrons en rotation avec une période égale à celle du pulsar.

Le traitement pour les densités plus élevées ne se transpose pas aussi simplement à partir du cas très relativiste des naines blanches envisagé précédemment. En effet, à ces densités énormes, les interactions entre particules deviennent très importantes. Cependant, on obtient encore dans ce cas une valeur maximum de la masse, appelée « masse d'OPPENHEIMER-VOLKOFF », cette limite est de l'ordre de 2 à 3 $M_{\odot}$.

## REFERENCES

CHANDRASEKHAR S. — *Introduction to the study of stellar structure,* (University of Chicago Press, 1939; ou Dover Publications, 1957).

COX J.-P., GIULI R.-T. — *Principles of stellar structure,* (Gordon and Breach, 1968).

KOURGANOFF V. — *Introduction to advanced astrophysics,* (Reidel, 1979).

SCHWARZSCHILD M. — *Structure and evolution of the stars,* (Princeton University Press, 1958).