A propos d'un exercice de dynamique des systèmes en terminale C

par Gérard SERRA,
Lycée Saint-Charles, 13004 Marseille.

Un fléau de balance porte à l'une de ses extrémités, une poulie dans la gorge de laquelle passe un fil relié à deux masses $M_1 < M_2$.

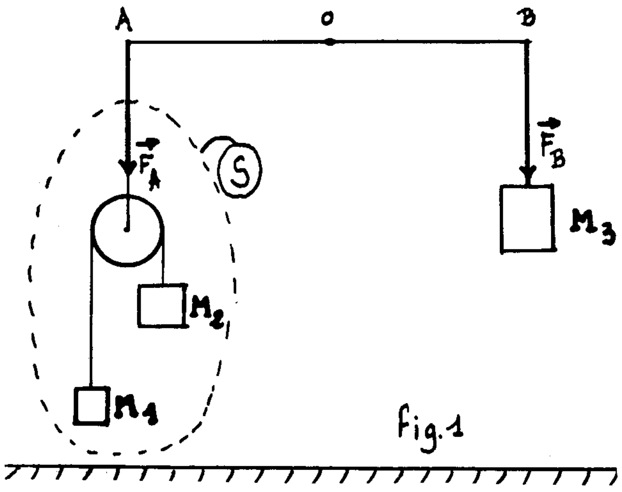

Fig. 1

L'autre extrémité du fléau porte une masse M_3. La masse de la poulie et celle des fils sont négligeables devant : M_1, M_2 et M_3.

Le système S étant bloqué (par exemple : une goutte de cire immobilise la poulie et le fil), déterminer la relation entre M_1, M_2 et M_3 si le fléau est en équilibre.

On débloque S (par exemple : par fusion de cette goutte de cire en approchant une allumette). Dans quel sens tourne le fléau ?

Les solutions que l'on trouve dans certains ouvrages établissent l'expression des tensions des fils à l'équilibre et utilisent ces relations hors de l'équilibre, ce qui semble hasardeux. Voici deux autres solutions évitant cet écueil.

I. METHODE ANALYTIQUE.

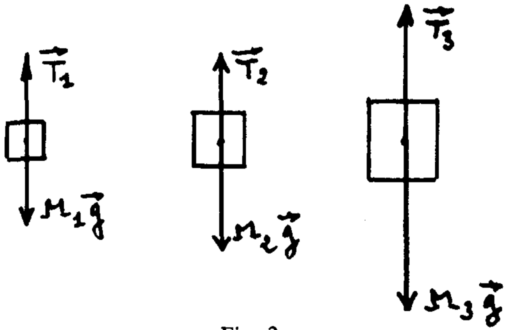

Fig. 2

$$\mathbf{T}_1 + M_1\,\mathbf{g} = M_1\,\mathbf{a}_{1R_L} = M_1(\mathbf{a}_{1\,R_P} + \mathbf{a}_{\,R_P/R_L})$$

où $\mathbf{a}_{1\,R_L}$ représente l'accélération de M_1 dans le Référentiel du laboratoire (galiléen) ; idem pour M_2 et M_3. $\mathbf{a}_{\,R_P/R_L}$ représente l'accélération du Référentiel lié à la poulie, en translation rectiligne par rapport à R_L. $\mathbf{a}_{1R_P}$ représente l'accélération de M_1 dans le Référentiel lié à la poulie ; idem pour M_2 et M_3.

$$\mathbf{T}_2 + M_2\,\mathbf{g} = M_2\,\mathbf{a}_{2R_L} = M_2(\mathbf{a}_{2\,R_P} + \mathbf{a}_{R_P/R_L})$$
$$\mathbf{T}_3 + M_3\,\mathbf{g} = M_3\,\mathbf{a}_{3R_L} = -M_3\,\mathbf{a}_{R_P/R_L}.$$

On en tire :

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = (M_1 + M_2)(\mathbf{a}_{R_P/R_L} - \mathbf{g}) + M_1\,\mathbf{a}_{1R_P} + M_2\,\mathbf{a}_{2\,R_P}$$
$$\mathbf{T}_3 = -M_3(\mathbf{a}_{R_P/R_L} + \mathbf{g}).$$

Or :

$$\mathbf{F}_A = -(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F}_B = -\mathbf{T}_3\,;$$

d'autre part :

$$\mathbf{a}_{1\,R_P} = -\mathbf{a}_{2R_P} \Rightarrow \mathbf{F}_A = (M_1 + M_2)(\mathbf{g} - \mathbf{a}_{R_P/R_L}) + (M_2 - M_1)\,\mathbf{a}_{1\,R_P} \ldots$$
$$\ldots \text{et} \qquad \mathbf{F}_B = M_3(\mathbf{g} + \mathbf{a}_{R_P/R_L}).$$

La condition d'équilibre avec S bloqué a donné $M_1 + M_2 = M_3$.

On a toujours $(M_2 - M_1)\,\mathbf{a}_{1\,R_P}$ de sens contraire à $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{g}$.

Faisons l'hypothèse $\|\mathbf{F}_A\| > \|\mathbf{F}_B\| \Rightarrow \mathbf{a}_{R_P/R_L}$ de même sens que $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{g}$; donc $\|\mathbf{F}_A\| < \|\mathbf{F}_B\|$, ce qui est absurde. Il faut donc $\|\mathbf{F}_A\| < \|\mathbf{F}_B\| \Rightarrow \mathbf{a}_{R_P/R_L}$ de sens contraire à $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{g}$. D'où la condition : $2(M_1 + M_2)\,\|\mathbf{a}_{R_P/R_L}\| < (M_2 - M_1)\,\|\mathbf{a}_{1\,R_P}\|$ et le fléau s'incline en B.

METHODE SYNTHETIQUE.

Cette méthode est suggérée par le second paragraphe de la p. 141 du programme officiel.

On isole le système S de centre de masse G :

$$\left(\frac{\mathbf{dP}}{dt}\right)_{R_L} = \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \qquad \text{où} \qquad \mathbf{P} = (M_1 + M_2)(\mathbf{V}_G)_{R_L} = C^{te} = \mathbf{0}.$$

Lorsqu'on débloque le système : $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$, car on a supprimé des forces intérieures à S, exclusivement.

Dans le mouvement qui suit, M_1 se rapproche de la poulie et M_2 s'en éloigne, donc G s'éloigne de la poulie puisque $M_2 > M_1$. Comme $(\mathbf{V}_G)_{R_L} = \mathbf{0}$, la poulie et le bras de fléau correspondant se soulèvent.

On a là, un exemple d'application des théorèmes généraux qui allègent considérablement les calculs. Ceci met en lumière le fait que le soin pris pour analyser les conditions d'application de ces théorèmes est récompensé par la simplicité des calculs qui s'en suivent.