

Séries de Fourier sur micro-ordinateur

Le micro-ordinateur permet dans ce programme d'effectuer la simulation d'une expérience difficile, sinon impossible, à réaliser avec les moyens de laboratoire de lycée. Il offre en quelque sorte la « visualisation » d'un théorème mathématique aux nombreuses interprétations physiques : la synthèse d'une fonction périodique par addition d'harmoniques. Il donne loisir d'observer chaque stade de cette synthèse, l'effet de la superposition de chaque harmonique, et l'évolution progressive de la courbe à partir du terme fondamental sinusoïdal successivement « déformé » ou « modelé » par chacun des N harmoniques introduits par l'opérateur.

Celui-ci pourra, à l'occasion, vérifier « *de visu* » les résultats d'une analyse, physique ou mathématique, d'un phénomène périodique.

QUELQUES REMARQUES.

I. Le nombre d'harmoniques à composer n'est pas limité (*); il doit être annoncé dès le début par l'opérateur (ceci sur micro-ordinateur à dimensionnement statique des tableaux, comme le PET COMMODORE que nous avons utilisé).

En pratique, la machine ne représente, par un point sur l'écran, que la valeur entière arrondie de la somme.

Les additions d'harmoniques d'amplitudes, de l'ordre de quelques dixièmes d'interlignes, sont encore sensibles. Au-dessous, elles ne sont plus perçues. La fonction périodique est correctement obtenue à partir de la composition de 8 à 20 termes de la série de Fourier, selon les cas.

II. Le programme permet évidemment de synthétiser aussi des sommes d'harmoniques de phases à l'origine et d'amplitudes quelconques choisies par l'opérateur (sous la seule réserve de contenir dans l'écran de 25 lignes) et d'obtenir ainsi un nombre infini (ou presque...) de graphes différents.

III. La programmation, dans beaucoup de cas à la portée des élèves, est elle-même un excellent exercice d'assimilation de la synthèse de Fourier, et de l'analyse correspondante. Les élèves n'en savoureront ensuite que mieux l'utilisation la plus large de « leur » programme.

(*) Si ce n'est pas la capacité du micro-ordinateur.

CONCEPTION DU PROGRAMME.

Il consiste en la superposition (somme algébrique point par point) progressive de fonctions sinusoïdales, de fréquences f , $2f$, Nf (fondamental et harmoniques) et, éventuellement, d'un terme constant $A\phi$, et en la représentation cartésienne sur l'écran du micro-ordinateur.

Chaque terme de la série, de fréquence Nf , est défini par son amplitude AN et sa phase à l'origine BN , sous la forme

$$Y_N = AN \sin (2 \pi NfX + BN).$$

La période du fondamental est prise égale à la longueur d'une ligne de l'écran (40 caractères).

Il nous a paru intéressant de représenter simultanément à la somme, le graphe du dernier harmonique ajouté. 8 lignes (sur 25) lui sont donc réservées en haut de l'écran (amplitude permise : 4 lignes), 17 restant au graphe de la somme (amplitude : 8 lignes). Quelques dépassements hors d'écran, ou des empiètements des deux tracés ne sont pas graves pour la représentation visuelle des courbes, pour lesquelles on choisit, de préférence, des caractères d'impression différents ($\times$ et $*$ par exemple).

Matériel.

Micro-ordinateur PET COMMODORE.

Langage BASIC.

Enregistreur-lecteur sur bande magnétique, couplé.

Ecran de 25 lignes $\times$ 40 caractères.

Chaque « point » de l'écran est repéré par un numéro adresse.

ADDITIFS AU PROGRAMME.

Le programme peut être assorti d'un FICHIER, ou collection de séries de Fourier de fonctions périodiques diverses.

Les amplitudes et les phases à l'origine des termes d'une série, conservés dans le FICHIER, peuvent être envoyés dans le programme pour utilisation. Inversement, toute série testée en programme peut être stockée dans le FICHIER.

L'utilisation d'une IMPRIMANTE couplée au micro-ordinateur permet de fixer tout ou partie des divers stades d'évolution de la somme.

Remarque.

L'utilisation de consoles graphiques ou de tables traçantes dont on peut espérer la diffusion dans les établissements scolaires donnerait une dimension nouvelle à ce type de logiciels.

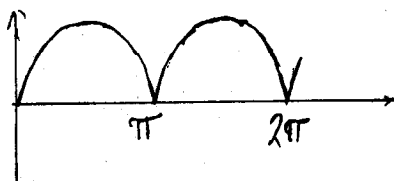
FONCTION : $Y = X^2$ entre $X = -\pi$ et $X = +\pi$

$$Y = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2} \cos X + \frac{4}{2^2} \cos 2X \dots (-1)^N \frac{4}{N^2} \cos NX$$



N	0	1	2	3	4	5
A_N	3,29	-4	1	-0,444	0,25	-0,16
B_N		1,57	1,57	1,57	1,57	1,57
N	6	7	8	9	10	
A_N	0,111	-0,816	0,625	-0,49	0,40	
B_N	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57	

FONCTION PAIRE : $Y = X(\pi - X)$ entre $X = 0$ et π

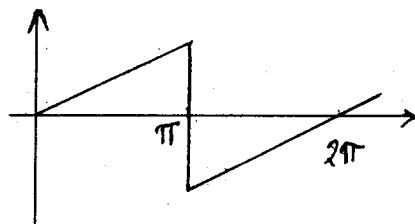


$$Y = \frac{\pi^2}{6} - 4 \left(\frac{\cos 2X}{2^2} + \frac{\cos 4X}{4^2} + \dots \frac{\cos 2NX}{(2N)^2} \right)$$

(les coefficients A_N sont calculés pour une fonction $F = 4Y$).

N	0	1	2	3	4	5	6	7
A_N	6,58	0	-4	0	-1	0	0,444	0
B_N		0	1,57	0	1,57	0	1,57	0
N	8	9	10	11	12	13	14	
A_N	-0,25	0	-0,16	0	-0,111	0	-0,081	
B_N	1,57	0	1,57	0	1,57	0	1,57	

FONCTION :
$$\begin{cases} F = \frac{X}{2} & \text{pour } X = 0 \text{ à } X = \pi \\ F = -\frac{X}{2} + \pi & \text{pour } X = \pi \text{ à } X = 2\pi \end{cases}$$



$$Y = \sin X - \frac{1}{2} \sin 2X + \dots (-1)^{N-1} \times \frac{\sin NX}{N}$$

(les coefficients A_N sont calculés pour une fonction $F = 5Y$).

N	0	1	2	3	4	5	6	7
A_N	0	5	-2,5	1,666	-1,25	1	-0,833	0,714
B_N		0	0	0	0	0	0	0
N	8	9	10	11	12	13	14	15
A_N	0,625	0,555	-0,5	0,454	-0,416	0,384	-0,357	0,333
B_N	0	0	0	0	0	0	0	0

J. HUGON,
(Lycée Charles-Poncet - Cluses).

Analyse du problème

ADDITION GRAPHIQUE D'HARMONIQUES

