Le calcul matriciel appliqué aux quadripôles

Applications

En électronique linéaire, de nombreux circuits peuvent être traités à l'aide des résultats de la théorie matricielle des quadripôles. Après avoir rappelé les principaux résultats de cette théorie, nous donnons quelques applications permettant de dégager les avantages du calcul matriciel appliqué aux quadripôles.

I. NOTIONS SUR LES QUADRIPOLES.

I.1. Définitions.

Un quadripôle (fig. 1) est une partie de circuit électrique utilisée entre deux paires de bornes (($A_1 B_1$ et $A_2 B_2$) et qui n'est en relation avec les circuits extérieurs que par l'intermédiaire de ces bornes.

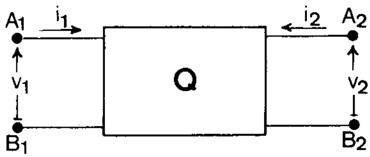


Fig. 1. — Quadripôle.

Le fait de distinguer deux paires de bornes entraîne qu'aucune connection extérieure ne se fait entre une borne d'une paire et une borne de l'autre paire. L'ensemble du circuit électronique se présente sous la forme représentée à la fig. 2.

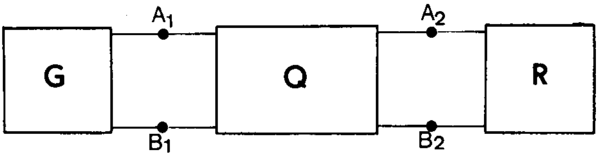


Fig. 2. — Quadripôle dans un circuit électrique.

Le plus souvent, un quadripôle a pour rôle de transmettre vers les bornes $A_2 B_2$, l'énergie prélevée aux bornes $A_1 B_1$. Les bornes $A_1 B_1$ sont ainsi appelées *bornes d'entrées* et les bornes $A_2 B_2$, *bornes de sortie.*

Le schéma de la fig. 1 sous-entend que le courant i_1 (ou i_2) qui entre par la borne A_1 (ou A_2) ressort par la borne B_1 (ou B_2) ; ce fait résulte de l'utilisation du quadripôle (fig. 2). Par convention, nous adopterons comme sens positifs des tensions et courants, ceux indiqués sur la fig. 1.

Dans le cas où le quadripôle comporte des sources d'énergie, le quadripôle est dit *actif*. Il est à noter que ces sources ne peuvent être liées qu'à des grandeurs propres au quadripôle, y compris les grandeurs i_1, i_2, v_1, v_2. Dans le cas contraire ((cas où le quadripôle n'est constitué que d'éléments R, C, L et M), le quadripôle est dit *passif*.

I.2. Matrices des quadripôles.

Pour des quadripôles linéaires, il existe deux relations indépendantes entre les amplitudes complexes (ou transformées de Laplace), des grandeurs i_1, i_2, v_1 et v_2, ce qui conduit à six matrices caractéristiques d'un quadripôle.

I.2.1. Matrice impédance.

Si l'on choisit comme variables indépendantes, les courants i_1 et i_2, les amplitudes complexes (ou transformées de Laplace) des tensions v_1 et v_2 s'expriment par les relations :

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \mathcal{Z}_{11}\,\mathcal{I}_1 + \mathcal{Z}_{12}\,\mathcal{I}_2 \\ \mathcal{V}_2 &= \mathcal{Z}_{21}\,\mathcal{I}_1 + \mathcal{Z}_{22}\,\mathcal{I}_2 \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

La matrice $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_{ij})$ est appelée *matrice impédance* du quadripôle. Les paramètres $\mathcal{Z}_{ij}$ appelés *paramètres impédances* sont soient des fonctions de $j\omega$ (notation complexe), soient des fonctions de p (notation symbolique).

I.2.2. Matrice admittance.

Si les tensions sont les variables indépendantes, nous pouvons écrire :

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \mathcal{Y}_{11}\,\mathcal{V}_1 + \mathcal{Y}_{12}\,\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{I}_2 &= \mathcal{Y}_{21}\,\mathcal{V}_1 + \mathcal{Y}_{22}\,\mathcal{V}_2 \end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

La matrice $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_{ij})$ est la *matrice admittance ;* c'est la matrice inverse de la matrice impédance. Dans le cas où la matrice impédance est singulière, la matrice admittance n'existe pas et réciproquement.

I.2.3. Matrices de transfert.

Si les variables indépendantes sont les paramètres d'entrée : v_1 et $-i_1$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{V}_2 = \mathcal{T}_{11}\mathcal{V}_1 + \mathcal{T}_{12}(-\mathcal{I}_1) \\ \mathcal{I}_2 = \mathcal{T}_{21}\mathcal{V}_1 + \mathcal{T}_{22}(-\mathcal{I}_1) \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ -\mathcal{I}_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

La matrice $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_{ij})$ est la *matrice de transfert.*

Note. — Il est possible de définir une *matrice de transfert inverse* par la relation :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}'_{11} & \mathcal{T}'_{12} \\ \mathcal{T}'_{21} & \mathcal{T}'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_2 \\ -\mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Les deux matrices de transfert ne sont cependant pas inverses l'une de l'autre au sens mathématique.

I.2.4. Matrices hybrides.

Lorsque les variables indépendantes sont i_1 et v_2, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{V}_1 = \mathcal{H}_{11}\mathcal{I}_1 + \mathcal{H}_{12}\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{I}_2 = \mathcal{H}_{21}\mathcal{I}_1 + \mathcal{H}_{22}\mathcal{V}_2 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \left(= \right) \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

La matrice $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{ij})$ est la *matrice hybride* en « H » ou la *matrice hybride.*

Si, par contre, nous prenons comme variables indépendantes i_1 et v_2, nous définissons une matrice inverse de la précédente (*matrice hybride* en « G ») :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

I.3. Significations physiques des paramètres.

Chaque élément des diverses matrices peut être soit calculé si la structure du quadripôle est connue, soit déterminé expérimentalement.

I.3.1. Matrices impédance.

Par exemple, la première relation du système (1) montre que :

$$\mathcal{Z}_{11} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{I}_1} \qquad \text{lorsque} \qquad i_2 = 0.$$

$\mathcal{Z}_{11}$ est l'impédance d'entrée du quadripôle lorsque sa sortie est en circuit ouvert.

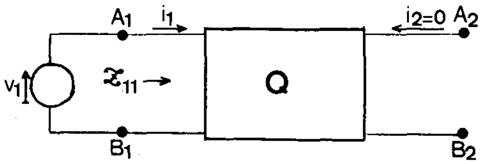


Fig. 3. — Détermination du paramètre $\mathcal{Z}_{11}$.

Sa détermination expérimentale peut se faire conformément au schéma de la fig. 3.

De même, nous avons :

* $\mathcal{Z}_{21} = \mathcal{V}_2/\mathcal{I}_1$ lorsque $i_2 = 0$; $\mathcal{Z}_{21}$ est l'*impédance de transfert lorsque la sortie est en circuit ouvert.*

* $\mathcal{Z}_{22} = \mathcal{V}_2/\mathcal{I}_2$ lorsque $i_1 = 0$; $\mathcal{Z}_{22}$ est l'*impédance de sortie lorsque l'entrée est en circuit ouvert.*

* $\mathcal{Z}_{12} = \mathcal{V}_1/\mathcal{I}_2$ lorsque $i_1 = 0$; $\mathcal{Z}_{12}$ est l'*impédance de transfert inverse lorsque l'entrée est en circuit ouvert.*

NOTE. — Pour les paramètres $\mathcal{Y}_{ij}$, nous avons une situation analogue, les circuits ouverts étant remplacés par des courts-circuits.

I.3.2. MATRICE HYBRIDE.

Les paramètres hybrides sont principalement utilisés pour les quadripôles actifs et en particulier pour les transistors. Ils présentent l'avantage de conduire à des déterminations expérimentales simples.

* $\mathcal{H}_{11} = \mathcal{V}_1/\mathcal{I}_1$ pur $v_2 = 0$ est l'*impédance d'entrée, lorsque la sortie est en court-circuit.*

* $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2$ pour $i_1 = 0$ est le *gain inverse en tension* (ou *réaction de la sortie sur l'entrée*), *lorsque l'entrée est en circuit ouvert.*

* $\mathcal{H}_{21} = \mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1$ pour $v_2 = 0$ est *le gain en courant, lorsque la sortie est en court-circuit.*

* $\mathcal{H}_{22} = \mathcal{I}_2/\mathcal{V}_2$ pour $i_1 = 0$ est l'*admittance de sortie, lorsque l'entrée est en circuit ouvert.*

I.4. Quadripôles passifs.

D'une manière générale, les quadripôles actifs sont caractérisés par quatre paramètres indépendants, alors que trois paramètres suffisent à caractériser les quadripôles passifs. Pour ceux-ci, il est en effet possible d'établir les relations suivantes :

$\mathcal{Z}_{12} = \mathcal{Z}_{21}$	$\mathcal{Y}_{12} = \mathcal{Y}_{21}$	
$\mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22} - \mathcal{C}_{12}\mathcal{C}_{21} = 1$	$\mathcal{C}'_{11}\mathcal{C}'_{22} - \mathcal{C}'_{12}\mathcal{C}'_{21} = 1$	(8)
$\mathcal{H}_{12} = -\mathcal{H}_{21}$	$\mathcal{G}_{12} = -\mathcal{G}_{21}$	

I.5. **Relation entre les divers paramètres.**

Suivant les problèmes traités, il est plus intéressant d'utiliser telle ou telle matrice. Les relations qui existent entre les matrices caractéristiques s'établissent sans difficultés et sont données dans le tableau 1.

I.6. **Associations de quadripôles.**

L'analyse d'un quadripôle de structure complexe peut être simplifiée en le considérant, lorsque cela est possible, comme une association de quadripôles plus simples. Dans ce paragraphe, nous donnons les résultats relatifs à l'association de deux quadripôles. L'établissement de ces résultats ne présente pas de difficultés. Nous affecterons d'un indice (haut) 1 et 2 les matrices relatives aux deux quadripôles élémentaires, alors que la matrice du quadripôle résultant de leur association sera sans indice.

I.6.1. Association en série.

Les entrées et les sorties des quadripôles 1 et 2 sont associées en série (fig. 4).

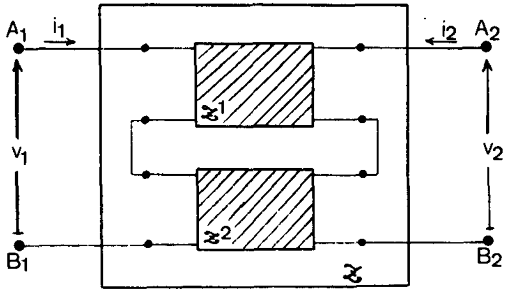


Fig. 4. — Association en série de deux quadripôles.

Tableau 1 : TABLEAU DE CORRESPONDANCE DES MATRICES DES QUADRIPOLES

	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Y}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{H}$
	$\Delta\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{11}\mathcal{Z}_{22} - \mathcal{Z}_{12}\mathcal{Z}_{21}$	$\Delta\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{11}\mathcal{Y}_{22} - \mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{21}$	$\Delta\mathcal{C} = \mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22} - \mathcal{C}_{12}\mathcal{C}_{21}$	$\Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_{11}\mathcal{G}_{22} - \mathcal{G}_{12}\mathcal{G}_{21}$	$\Delta\mathcal{H} = \mathcal{H}_{11}\mathcal{H}_{22} - \mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}$
$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{Z} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{Y}_{22}}{\Delta\mathcal{Y}} & -\frac{\mathcal{Y}_{12}}{\Delta\mathcal{Y}} \\ -\frac{\mathcal{Y}_{21}}{\Delta\mathcal{Y}} & \frac{\mathcal{Y}_{11}}{\Delta\mathcal{Y}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{C}_{22}}{\mathcal{C}_{21}} & \frac{1}{\mathcal{C}_{21}} \\ \frac{\Delta\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{21}} & \frac{\mathcal{C}_{11}}{\mathcal{C}_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\mathcal{G}_{11}} & -\frac{\mathcal{G}_{12}}{\mathcal{G}_{11}} \\ \frac{\mathcal{G}_{21}}{\mathcal{G}_{11}} & \frac{\Delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathcal{H}}{\mathcal{H}_{22}} & \frac{\mathcal{H}_{12}}{\mathcal{H}_{22}} \\ -\frac{\mathcal{H}_{21}}{\mathcal{H}_{22}} & \frac{1}{\mathcal{H}_{22}} \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{Y} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{Z}_{22}}{\Delta\mathcal{Z}} & -\frac{\mathcal{Z}_{12}}{\Delta\mathcal{Z}} \\ -\frac{\mathcal{Z}_{21}}{\Delta\mathcal{Z}} & \frac{\mathcal{Z}_{11}}{\Delta\mathcal{Z}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{C}_{11}}{\mathcal{C}_{12}} & -\frac{1}{\mathcal{C}_{12}} \\ -\frac{\Delta\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{12}} & \frac{\mathcal{C}_{22}}{\mathcal{C}_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}_{22}} & \frac{\mathcal{G}_{12}}{\mathcal{G}_{22}} \\ -\frac{\mathcal{G}_{21}}{\mathcal{G}_{22}} & \frac{1}{\mathcal{G}_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\mathcal{H}_{11}} & -\frac{\mathcal{H}_{12}}{\mathcal{H}_{11}} \\ \frac{\mathcal{H}_{21}}{\mathcal{H}_{11}} & \frac{\Delta\mathcal{H}}{\mathcal{H}_{11}} \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ -\mathcal{I}_1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{Z}_{22}}{\mathcal{Z}_{12}} & \frac{\Delta\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_{12}} \\ \frac{1}{\mathcal{Z}_{12}} & \frac{\mathcal{Z}_{11}}{\mathcal{Z}_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\mathcal{Y}_{11}}{\mathcal{Y}_{12}} & -\frac{1}{\mathcal{Y}_{12}} \\ -\frac{\Delta\mathcal{Y}}{\mathcal{Y}_{12}} & -\frac{\mathcal{Y}_{22}}{\mathcal{Y}_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}_{12}} & -\frac{\mathcal{G}_{22}}{\mathcal{G}_{12}} \\ -\frac{\mathcal{G}_{11}}{\mathcal{G}_{12}} & -\frac{1}{\mathcal{G}_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\mathcal{H}_{12}} & \frac{\mathcal{H}_{11}}{\mathcal{H}_{12}} \\ \frac{\mathcal{H}_{22}}{\mathcal{H}_{12}} & \frac{\Delta\mathcal{H}}{\mathcal{H}_{12}} \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\mathcal{Z}_{11}} & -\frac{\mathcal{Z}_{12}}{\mathcal{Z}_{11}} \\ \frac{\mathcal{Z}_{21}}{\mathcal{Z}_{11}} & \frac{\Delta\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathcal{Y}}{\mathcal{Y}_{22}} & \frac{\mathcal{Y}_{12}}{\mathcal{Y}_{22}} \\ -\frac{\mathcal{Y}_{21}}{\mathcal{Y}_{22}} & \frac{1}{\mathcal{Y}_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{C}_{21}}{\mathcal{C}_{22}} & -\frac{1}{\mathcal{C}_{22}} \\ \frac{\Delta\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{22}} & \frac{\mathcal{C}_{12}}{\mathcal{C}_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{H}_{22}}{\Delta\mathcal{H}} & -\frac{\mathcal{H}_{12}}{\Delta\mathcal{H}} \\ -\frac{\mathcal{H}_{21}}{\Delta\mathcal{H}} & \frac{\mathcal{H}_{11}}{\Delta\mathcal{H}} \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_{22}} & \frac{\mathcal{Z}_{12}}{\mathcal{Z}_{22}} \\ -\frac{\mathcal{Z}_{21}}{\mathcal{Z}_{22}} & \frac{1}{\mathcal{Z}_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\mathcal{Y}_{11}} & -\frac{\mathcal{Y}_{12}}{\mathcal{Y}_{11}} \\ \frac{\mathcal{Y}_{21}}{\mathcal{Y}_{11}} & \frac{\Delta\mathcal{Y}}{\mathcal{Y}_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{C}_{12}}{\mathcal{C}_{11}} & \frac{1}{\mathcal{C}_{11}} \\ -\frac{\Delta\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{11}} & \frac{\mathcal{C}_{21}}{\mathcal{C}_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathcal{G}_{22}}{\Delta\mathcal{G}} & -\frac{\mathcal{G}_{12}}{\Delta\mathcal{G}} \\ -\frac{\mathcal{G}_{21}}{\Delta\mathcal{G}} & \frac{\mathcal{G}_{11}}{\Delta\mathcal{G}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} \end{matrix}$

La matrice impédance du quadripôle résultant de l'association en série de deux quadripôles est égale à la somme des matrices impédances de ces deux quadripôles :

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^1 + \mathcal{Z}^2. \qquad (9)$$

I.6.2. Association en parallèle.

Les entrées et les sorties des quadripôles sont associées en parallèle (fig. 5).

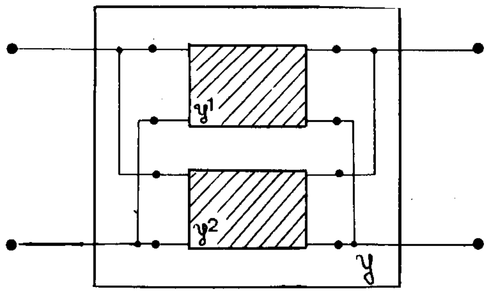


Fig. 5. — Association en parallèle de deux quadripôles.

La matrice admittance du quadripôle résultant de l'association en parallèle de deux quadripôles est égale à la somme des matrices admittances de ces deux quadripôles :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^1 + \mathcal{Y}^2. \qquad (10)$$

I.6.3. Association en cascade.

Les bornes de sortie d'un des quadripôles sont associées aux bornes d'entrée de l'autre (fig. 6).

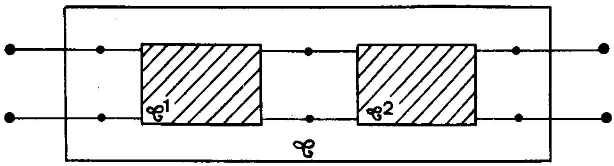


Fig. 6. — Association en cascade de deux quadripôles.

La matrice de transfert du quadripôle résultant de l'association en cascade de deux quadripôles est égale au produit de la matrice de transfert du deuxième quadripôle et de celle du premier :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^2 \mathcal{T}^1. \qquad (11)$$

I.6.4. ASSOCIATIONS MIXTES.

Il est possible de combiner les associations série et parallèle, l'une à l'entrée et l'autre à la sortie, nous obtenons les associations des figures 7 et 8.

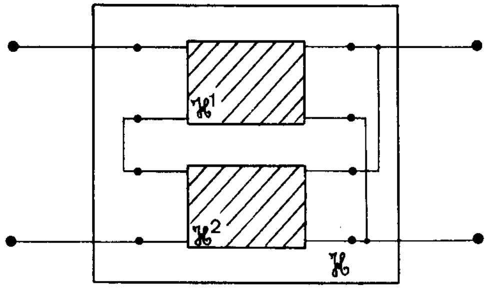


Fig. 7. — Association série-parallèle.

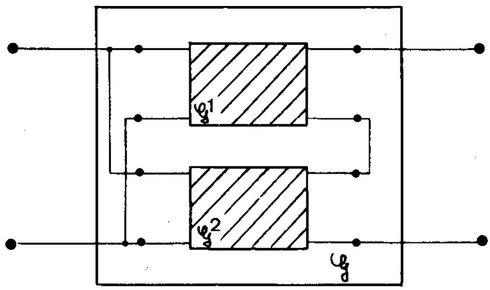


Fig. 8. — Association parallèle-série.

Dans l'association série-parallèle, ce sont les matrices en « H » qui s'ajoutent :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 + \mathcal{H}^2. \qquad (12)$$

Dans l'association parallèle-série, les matrices en « G » s'ajoutent :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 + \mathcal{G}^2. \qquad (13)$$

NOTE. — Les relations établies dans le paragraphe I.6. supposent l'égalité des courants pour chacune des deux paires de bornes des quadripôles élémentaires. Ce problème est traité en détail dans [1].

I.7. Quadripôles élémentaires.

I.7.1. QUADRIPÔLE A UNE IMPÉDANCE SÉRIE (fig. 9).

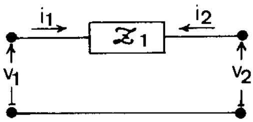


Fig. 9. — Quadripôle à une impédance série.

Nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 - \mathcal{Z}_1 \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1. \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (14)

I.7.2. QUADRIPÔLE A UNE IMPÉDANCE PARALLÈLE (fig. 10).

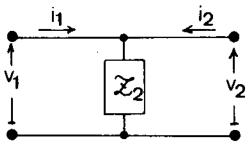


Fig. 10. — Quadripôle à une impédance parallèle.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{I}_2 = \dfrac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{Z}_2} - \mathcal{I}_1 \end{cases}$$

Il en résulte que $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\mathcal{Z}_2} & 1 \end{pmatrix}$ (15)

I.7.3. QUADRIPÔLE A DEUX IMPÉDANCES (fig. 11).

Il résulte de l'association en cascade des quadripôles I.7.1. et I.7.2. Des relations (11), (14) et (15), nous tirons :

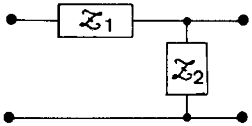


Fig. 11. — Quadripôle à 2 impédances.

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\mathcal{Z}_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{Z}_1 \\ \dfrac{1}{\mathcal{Z}_2} & \dfrac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2} + 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

I.7.4. Quadripôle en T (fig. 12).

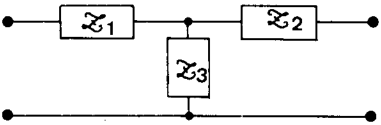


Fig. 12. — Quadripôle en T.

Ce quadripôle est obtenu par association en cascade des quadripôles I.7.3. et I.7.1. Nous obtenons sans difficulté la matrice de transfert :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_3} & \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 \left(1 + \dfrac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_3}\right) \\ \dfrac{1}{\mathcal{Z}_3} & 1 + \dfrac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_3} \end{pmatrix} \tag{17}$$

A partir de ce résultat, il est possible à l'aide du tableau 1, de trouver la matrice impédance, soit :

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_3 & \mathcal{Z}_3 \\ \mathcal{Z}_3 & \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Remarque.

La théorie matricielle des quadripôles doit être utilisée avec discernement ; elle s'impose généralement dans le cas de problèmes complexes. Par exemple, le résultat (18) peut être obtenu simplement en écrivant les expressions reliant les tensions et courants du circuit de la fig. 12.

I.8. Schémas équivalents d'un quadripôle.

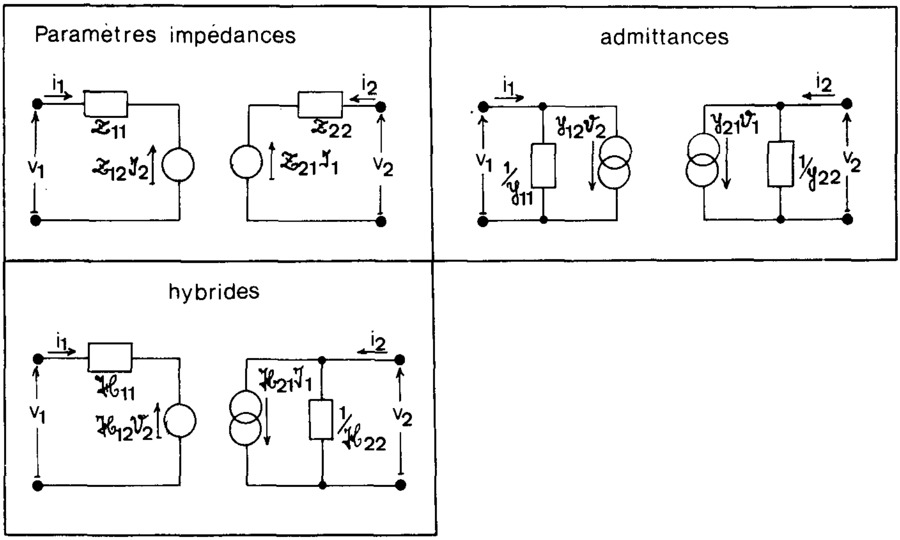
Dans certaines applications, il peut être intéressant de remplacer le quadripôle, défini par l'une de ses matrices, par un schéma électrique (appelé *schéma équivalent*) dont les éléments sont fonctions des éléments de la matrice considérée.

I.8.1. Quadripôles actifs.

Ces quadripôles sont décrits par quatre paramètres indépendants et leurs schémas équivalents comportent des sources d'énergie (tension ou courant). Le tableau 2 donne les schémas équivalents, obtenus à partir des relations définissant les paramètres $\mathcal{Z}_{ij}$, $\mathcal{Y}_{ij}$, $\mathcal{H}_{ij}$.

Tableau 2 :

SCHEMAS EQUIVALENTS AVEC DEUX SOURCES DE QUADRIPOLES ACTIFS



I.8.2. Quadripôles passifs.

Ces quadripôles sont déterminés par trois paramètres indépendants. Ils peuvent donc être représentés par un schéma comportant trois impédances : soit un quadripôle en T, soit un quadripôle en π. Les figures 13 donnent les représentations en T et en π, le quadripôle étant défini respectivement par ses paramètres impédances et ses paramètres admittances.

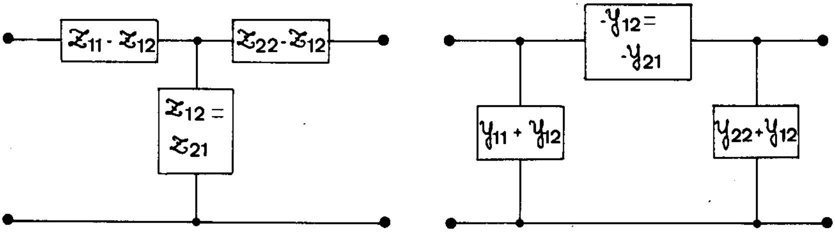


Fig. 13. — Schémas équivalents d'un quadripôle passif.

I.9. **Expression des paramètres d'amplification en fonction des paramètres d'un quadripôle.**

Si l'on s'intéresse à la fonction amplificatrice, un quadripôle peut être caractérisé dans le domaine d'amplification linéaire par les trois paramètres suivants :

* L'IMPÉDANCE D'ENTRÉE : $\mathcal{Z}_e = \mathcal{V}_1/\mathcal{I}_1$, lorsque la sortie est branchée sur une impédance de charge $\mathcal{Z}_L$ (fig. 14.1),

* L'IMPÉDANCE DE SORTIE : $\mathcal{Z}_s = \mathcal{V}_2/\mathcal{I}_2$, lorsque l'entrée est fermée sur une impédance $\mathcal{Z}_g$ (fig. 14.2),

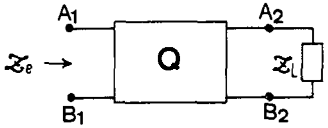
* LE GAIN COMPLEXE EN TENSION : $\mathcal{G}_v^{\infty} = \mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1$, lorsque la sortie est ouverte (fig. 14.3).

Les autres paramètres dans le domaine d'amplification linéaire (gain en courant, gain composite en tension, gain en puissance...) s'expriment en fonction des trois paramètres précédents. Le tableau 2 donne les expressions de $\mathcal{Z}_e$, $\mathcal{Z}_s$ et $\mathcal{G}_v^{\infty}$ en fonction des paramètres caractéristiques des quadripôles.

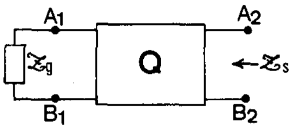
NOTE. — Lorsque la structure du quadripôle ne permet pas la mesure de $\mathcal{G}_v^{\infty}$, il est possible de mesurer le gain en tension $\mathcal{G}_v = \mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1$, lorsque la sortie du quadripôle est fermée sur une impédance particulière L (par exemple, une résistance). Entre $\mathcal{G}_v$ et $\mathcal{G}_v^{\infty}$, nous avons la relation :

$$\mathcal{G}_v = \mathcal{G}_v^{\infty} \frac{\mathcal{Z}_L}{\mathcal{Z}_L + \mathcal{Z}_S^o} \qquad (19)$$

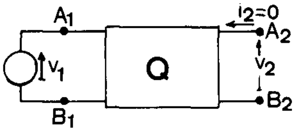
où $\mathcal{Z}_S^o$ est l'impédance de sortie du quadripôle, lorsque son entrée est court-circuitée.



1) Impédance d'entrée.



2) Impédance de sortie.



3) Gain en tension : sortie ouverte.

Fig. 14. — Paramètres d'amplification d'un quadripôle.

Tableau 3 :

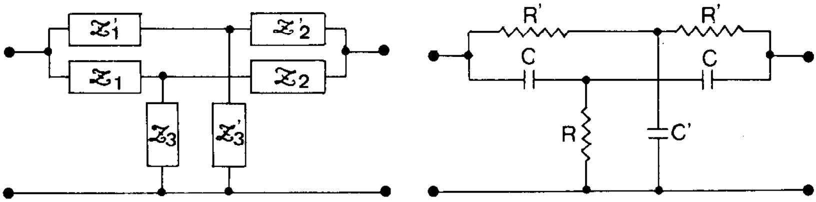
EXPRESSION DES PARAMETRES D'AMPLIFICATION EN FONCTION DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES D'UN QUADRIPOLE

paramètres d'amplification / Paramètres d'un quadripôle	Impédance d'entrée : $\mathcal{Z}_e = v_1/i_1$ sortie fermée sur $\mathcal{Z}_L$	Impédance de sortie $\mathcal{Z}_S = v_2/i_2$ entrée fermée sur $\mathcal{Z}_g$	gain en tension $\mathcal{G}_V = v_2/v_1$ sortie ouverte
$\mathcal{Z}_{ij}$	$\mathcal{Z}_e = \mathcal{Z}_{11} - \frac{\mathcal{Z}_{12}\mathcal{Z}_{21}}{\mathcal{Z}_{22}+\mathcal{Z}_L}$	$\mathcal{Z}_s = \mathcal{Z}_{22} - \frac{\mathcal{Z}_{12}\mathcal{Z}_{21}}{\mathcal{Z}_{11}+\mathcal{Z}_g}$	$\frac{\mathcal{Z}_{21}}{\mathcal{Z}_{11}}$
$\mathcal{Y}_{ij}$	$\mathcal{Y}_e = \frac{1}{\mathcal{Z}_e} = \mathcal{Y}_{11} - \frac{\mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{21}}{\mathcal{Y}_{22}+\frac{1}{\mathcal{Z}_L}}$	$\mathcal{Y}_s = \frac{1}{\mathcal{Z}_S} = \mathcal{Y}_{22} - \frac{\mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{21}}{\mathcal{Y}_{11}+\frac{1}{\mathcal{Z}_g}}$	$-\frac{\mathcal{Y}_{21}}{\mathcal{Y}_{22}}$
$\mathcal{C}_{ij}$	$\mathcal{Z}_e = \frac{\mathcal{C}_{12}+\mathcal{C}_{22}\mathcal{Z}_L}{\mathcal{C}_{11}+\mathcal{C}_{21}\mathcal{Z}_L}$	$\mathcal{Z}_s = \frac{\mathcal{C}_{12}+\mathcal{C}_{11}\mathcal{Z}_g}{\mathcal{C}_{22}+\mathcal{C}_{21}\mathcal{Z}_g}$	$\frac{\Delta\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{22}}$
$\mathcal{H}_{ij}$	$\mathcal{Z}_e = \mathcal{H}_{11} - \frac{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}\mathcal{Z}_L}{1+\mathcal{H}_{22}\mathcal{Z}_L}$	$\mathcal{Y}_s = \frac{1}{\mathcal{Z}_S} = \mathcal{H}_{22} - \frac{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}\frac{1}{\mathcal{Z}_g}}{1+\mathcal{H}_{11}\frac{1}{\mathcal{Z}_g}}$	$-\frac{\mathcal{H}_{21}}{\Delta\mathcal{H}}$

II. APPLICATIONS.

II.1. Cellule en double T.

Cette cellule est utilisée dans les filtres actifs, en association avec un amplificateur de type opérationnel. Suivant le type de réaction, il est possible d'obtenir soit un filtre coupe-bande, soit un filtre passe-bande, très sélectifs.



15 *a* 15 *b*

Fig. 15. — Cellules en double T.

II.1.1. CAS GÉNÉRAL (fig. 15 *a*).

Ce quadripôle est constitué du quadripôle en T : Q^1 ($\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$) associé en parallèle avec le quadripôle en T : Q^2 ($\mathcal{Z}'_1$, $\mathcal{Z}'_2$, $\mathcal{Z}'_3$). La matrice admittance du quadripôle en double T est : $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^1 + \mathcal{Y}^2$. De l'expression (18) et du tableau 1, nous déduisons :

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3}{\Delta\mathcal{Z}} + \dfrac{\mathcal{Z}'_2 + \mathcal{Z}'_3}{\Delta\mathcal{Z}'} & -\dfrac{\mathcal{Z}_3}{\Delta\mathcal{Z}} - \dfrac{\mathcal{Z}'_3}{\Delta\mathcal{Z}'} \\ -\dfrac{\mathcal{Z}_3}{\Delta\mathcal{Z}} - \dfrac{\mathcal{Z}'_3}{\Delta\mathcal{Z}'} & \dfrac{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_3}{\Delta\mathcal{Z}} + \dfrac{\mathcal{Z}'_1 + Z'_3}{\Delta\mathcal{Z}'} \end{pmatrix} \tag{20}$$

avec :

$$\Delta\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{11}\mathcal{Z}_{22} - \mathcal{Z}_{12}\mathcal{Z}_{21} \quad \text{et} \quad \Delta\mathcal{Z}' = \mathcal{Z}'_{11}\mathcal{Z}'_{22} - \mathcal{Z}'_{12}\mathcal{Z}'_{21}$$

Le gain en tension, sortie ouverte, est, compte tenu du tableau 2 :

$$\mathcal{G}_v^{\infty} = \frac{\mathcal{Z}_3\,\Delta\mathcal{Z}' + \mathcal{Z}'_3\,\Delta\mathcal{Z}}{(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_3)\,\Delta\mathcal{Z}' + (\mathcal{Z}'_1 + \mathcal{Z}'_3)\,\Delta\mathcal{Z}} \tag{21}$$

II.1.2. CAS PARTICULIER (fig. 15 *b*).

Dans le cas présent, l'expression (21) s'écrit :

$$= \frac{RR'^2 - \dfrac{2R}{CC'\omega^2} + j\left(\dfrac{1}{C^2C'\omega^3} - \dfrac{2RR'}{C'\omega}\right)}{RR'^2 - \dfrac{2R'}{CC'\omega^2} - \dfrac{R'}{C^2\omega^2} - \dfrac{2R}{CC'\omega^2} + j\left(\dfrac{1}{C^2C'\omega^3} - \dfrac{2RR'}{C'\omega} - \dfrac{2RR'}{C\omega} - \dfrac{R'^2}{C\omega}\right)} \qquad (22)$$

Cette cellule en double T est utilisée de manière à avoir $\mathcal{G}_{v^\infty} = 0$, pur une pulsation ω_o (les signaux de pulsation ω_o ne sont pas transmis). Ceci se produit :

$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ si l'égalité } R'C' = 4RC \text{ est réalisée} \\ * \text{ et pour } \omega_o = 1/C\sqrt{2RR'}. \end{array} \right.$

En posant $n = 2C/C'$; $Q = \sqrt{n/n+1}$ et $x = \omega/\omega_o$, l'expression de $\mathcal{G}_{v^\infty}$ s'écrit, dans le cas où $R'C' = 4RC$:

$$\mathcal{G}_{v^\infty} = \frac{1}{1 - j\dfrac{x}{x^2-1}\,\dfrac{2}{Q}}. \qquad (23)$$

II.2. **Amplificateurs à transistor.**

II.2.1. Cas général.

Dans le cas d'un amplificateur à transistor monté soit en émetteur-commun (EC), soit en base-commune (BC), soit en collecteur-commun (CC), le schéma d'étude dans le cas de faibles signaux est celui de la fig. 16. Le transistor est décrit par sa matrice hybride réelle (hij) correspondant au montage du transistor. Le générateur de tension (eg, Rg) représente le générateur équivalent à l'ensemble branché à l'entrée de l'amplificateur ; la résistance R_L est la résistance de charge du récepteur branché à la sortie.

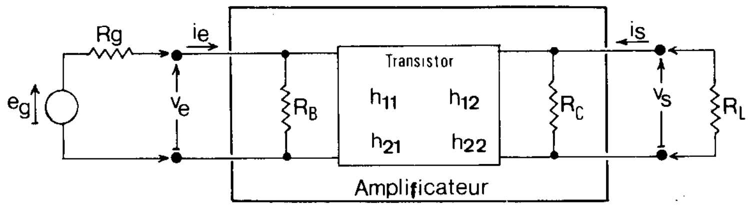


Fig. 16. — Schéma d'un amplificateur à transistor.

Nous cherchons les paramètres caractéristiques d'amplification.

a) *Résistance d'entrée* R_e, lorsque la sortie est fermée sur R_L.

C'est la résistance équivalente à R_B associée en parallèle avec la résistance d'entrée du transistor (R_{Te}) dont la sortie est fermée sur la résistance équivalente à R_C en parallèle avec R_L ; soit :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_{Te}} \tag{24}$$

et d'après le tableau 3 :

$$R_{Te} = h_{11} - \frac{h_{12}\,h_{21}}{h_{22} + \dfrac{1}{R_L} + \dfrac{1}{R_C}}. \tag{25}$$

b) Résistance de sortie R_s, lorsque l'entrée est fermée sur R_g.

C'est la résistance équivalente à R_C associée en parallèle avec la résistance de sortie du transistor (R_{TS}) dont l'entrée est fermée sur la résistance équivalente à R_g en parallèle avec R_B ; soit :

$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_{TS}} \tag{26}$$

et d'après le tableau 3 :

$$\frac{1}{R_{TS}} = h_{22} - \frac{h_{12}\,h_{21}}{R + h_{11}} \tag{27}$$

en posant :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_B}. \tag{28}$$

c) Gain en tension, sortie ouverte $\mathcal{G}_v^{\infty} = v_s/v_e$, lorsque $i_s = 0$.

C'est le gain en tension du transistor, lorsque sa sortie est fermée sur R_C. D'après l'expression (19) et le tableau 3, nous obtenons :

$$\mathcal{G}_v^{\infty} = -h_{21}\,\frac{R_C}{R_C\,\Delta h + h_{11}} \tag{29}$$

avec : $\Delta h = h_{11}\,h_{22} - h_{12}\,h_{21}$.

II.2.2. Cas ou le paramètre h_{12} est faible (montages EC et BC).

Dans le cas où le paramètre h_{12} est nul, nous obtenons :

* *Résistance d'entrée :*

R_{eo} telle que : $$\frac{1}{R_{eo}} = \frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_B}. \tag{30}$$

* *Résistance de sortie :*

R_{so} telle que : $$\frac{1}{R_{so}} = h_{22} + \frac{1}{R_c}. \tag{31}$$

* *Gain en tension, sortie ouverte :*

$$\mathcal{G}_v^{\infty} = -\frac{h_{21}}{h_{11}} R_{so}. \tag{32}$$

Les expressions (25), (26), et (29) peuvent être réécrites en fonction des paramètres précédents :

$$R_{Te} = h_{11}\left[1 - \frac{h_{12}\,h_{21}}{h_{11}\left(\dfrac{1}{R_{so}} + \dfrac{1}{R_L}\right)}\right] \tag{33}$$

$$R_s = \frac{R_{so}}{1 - \dfrac{h_{12}\,h_{21}}{R + h_{11}} R_{so}} \tag{34}$$

$$\mathcal{G}_v^{\infty} = \frac{\mathcal{G}_{vo}^{\infty}}{1 + h_{12}\,\mathcal{G}_{vo}^{\infty}}. \tag{35}$$

Ces expressions donnent, dans le cas où h_{12} est petit, les erreurs commises sur R_{Te}, R_s et $\mathcal{G}_v^{\infty}$ en prenant les relations obtenues pour $h_{12} = 0$, soit :

$$\frac{\Delta R_{Te}}{R_{Te}} = -\frac{h_{12}\,h_{21}}{h_{11}\left(\dfrac{1}{R_{so}} + \dfrac{1}{R_L}\right)};$$

$$\frac{\Delta R_s}{R_s} = \frac{h_{12}\,h_{21}}{R + h_{11}} R_{so}\,; \qquad \frac{\Delta \mathcal{G}_v^{\infty}}{\mathcal{G}_v^{\infty}} = -h_{12}\,\mathcal{G}_{vo}^{\infty}. \tag{36}$$

Exemple : Prenons le cas où :

$R_B = 5\ \text{k}\Omega$; $R_g = 1\ \text{k}\Omega$; $R_c = 2\ \text{k}\Omega$; $R_L = 10\ \text{k}\Omega$
$h_{11} = 1\ \text{k}\Omega$; $h_{12} = 10^{-4}$; $h_{21} = 100$; $h_{22} = 10^{-4}\ \Omega^{-1}$.

Nous trouvons :

$$\left\{\begin{array}{lll} R_{so} = 1{,}7\ \text{k}\Omega & \mathcal{G}_{vo}^{\infty} = -167 & R_{so} = 830\ \Omega \\[2ex] \dfrac{\Delta R_s}{R_s} = 1{,}4 \cdot 10^{-2} & \dfrac{\Delta \mathcal{G}_v^{\infty}}{\mathcal{G}_v^{\infty}} = 1{,}7 \cdot 10^{-2} & \dfrac{\Delta R_{Te}}{R_{Te}} = 8 \cdot 10^{-3} \end{array}\right.$$

L'approximation $h_{12} = 0$ est donc satisfaisante.

II.3. **Amplificateur à contre-réaction d'émetteur** ((fig. 17).

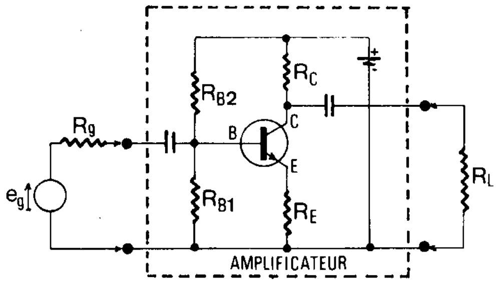


Fig. 17. — Amplificateur à contre-réaction d'émetteur.

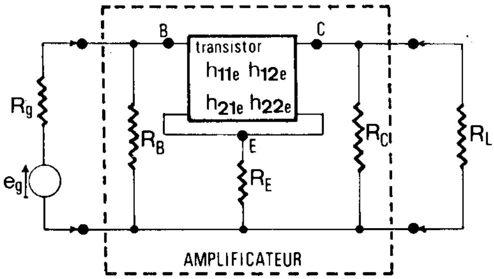


Fig. 18. — Schéma équivalent de l'amplificateur de la fig. 17

$$\left(\frac{1}{R_B} = \frac{1}{R_{B1}} + \frac{1}{R_{B2}}\right).$$

Aux fréquences moyennes où les impédances des capacités peuvent être négligées, le schéma équivalent à l'amplificateur est donné fig. 18 ; le transistor est décrit par la matrice hybride (h_{ije}) relative au montage EC. Si nous trouvons la matrice hybride H de l'ensemble transistor et résistance R_E, nous serons ramenés au problème traité au paragraphe II.2. Le quadripôle concerné est constitué du transistor associé en série avec la résistance d'émetteur R_E, d'où le procédé de calcul : transformer la matrice hybride du transistor en matrice impédance, l'additionner avec celle du quadripôle parallèle R_E, transformer la matrice obtenue en matrice hybride ; le résultat est :

$$H = \frac{1}{R_E + \dfrac{1}{h_{22\,e}}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{h_{22\,e}}\left[h_{11\,e} + (h_{21\,e} + 1 + \Delta h_e - h_{12\,e}) R_E\right] & \dfrac{h_{12\,e}}{h_{22\,e}} + R_E \\ \dfrac{h_{21\,e}}{h_{22\,e}} - R_E & 1 \end{pmatrix}$$

Les expressions littérales des paramètres d'amplification sont obtenues en remplaçant dans les expressions (24) à (36) les paramètres h_{ij}, par ces nouveaux paramètres H_{ij}. Cependant, dans le cas où les valeurs numériques sont de l'ordre de celles données dans le paragraphe II.2.2. et en prenant $R_E \sim 50\ \Omega$, nous trouvons :

$$H \simeq \begin{pmatrix} h_{11\,e} + (h_{21\,e} + 1) R_E & h_{12\,e} + h_{22\,e} R_E \\ h_{21\,e} & h_{22\,e} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, les paramètres d'amplification sont, en prenant l'hypothèse $h_{12\,e} = 0$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{h_{11\,e} + (h_{21\,e} + 1) R_E} + \frac{1}{R_B}\,; \qquad R_s = R_{so}\,;$$

$$\mathcal{G}_v'' = \frac{\mathcal{G}_{vo}''}{1 + (h_{21\,e} + 1)\dfrac{R_E}{h_{11\,e}}}. \tag{37}$$

Exemple : Reprenons l'exemple numérique du § II.2.2., en ajoutant $R_E = 50\ \Omega$; nous trouvons :

$$R_e = 2{,}7\ \mathrm{k}\Omega \qquad R_s = 1{,}7\ \mathrm{k}\Omega \qquad \mathcal{G}_v'' = -28$$

avec : $\dfrac{\Delta R_{Te}}{R_{Te}} = 7 \cdot 10^{-2}$ $\qquad \dfrac{\Delta R_s}{R_s} = 0{,}12$ $\qquad \dfrac{\mathcal{G}_v''}{\mathcal{G}_{vo}''} = 0{,}14$

II.4. Oscillateurs sinusoïdaux.

II.4.1. Cas général.

Généralement, un oscillateur sinusoïdal peut être considéré comme l'association en parallèle de deux quadripôles suivant le schéma de la fig. 19. L'un des quadripôles est constitué par l'élément actif : l'amplificateur ; l'autre par l'élément passif :

le circuit de réaction. L'oscillateur est fermé sur une impédance dont l'impédance complexe est $\mathcal{Z}_c = 1/\mathcal{Y}_c$. L'ensemble peut être considéré comme un quadripôle délivrant une tension de sortie v_2, mais dont le courant d'entrée est nul ($i_1 = 0$), fig. 20.

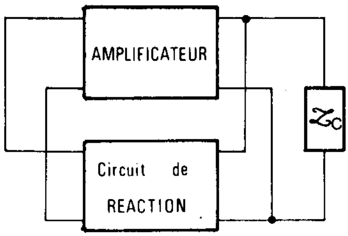


Fig. 19. — Schéma de principe d'un oscillateur à réaction.

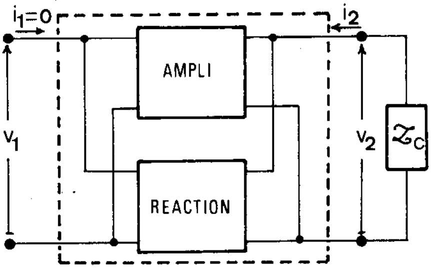


Fig. 20. — Oscillateur considéré comme quadripôle.

Soient : $\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{pmatrix}$ la matrice admittance de l'amplificateur

et : $\begin{pmatrix} \mathcal{Y}'_{11} & \mathcal{Y}'_{12} \\ \mathcal{Y}'_{21} & \mathcal{Y}'_{22} \end{pmatrix}$ celle du circuit de réaction.

Les équations caractéristiques de l'oscillateur sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= 0 = (\mathcal{Y}_{11} + \mathcal{Y}'_{11})\,\mathcal{V}_1 + (\mathcal{Y}_{12} + \mathcal{Y}'_{12})\,\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{I}_2 &= (\mathcal{Y}_{21} + \mathcal{Y}'_{21})\,\mathcal{V}_1 + (\mathcal{Y}_{22} + \mathcal{Y}'_{22})\,\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2 &= -\mathcal{Z}_c\,\mathcal{I}_2 \quad \text{ou} \quad \mathcal{I}_2 = -\mathcal{V}_2\,\mathcal{Y}_c. \end{aligned} \right. \tag{38}$$

De ce système, nous tirons l'équation caractéristique d'un oscillateur à réaction :

$$(\mathcal{Y}_{22} + \mathcal{Y}'_{22} + \mathcal{Y}_c)(\mathcal{Y}_{11} + \mathcal{Y}'_{11}) - (\mathcal{Y}_{21} + \mathcal{Y}'_{21})(\mathcal{Y}_{12} + \mathcal{Y}'_{12}) = 0 \tag{39}$$

Cette équation entre nombres complexes conduit à deux relations (partie réelle = 0 et partie imaginaire = 0) qui permettent de déterminer la fréquence d'oscillation et la condition d'oscillation.

II.4.2. EXEMPLE D'UN OSCILLATEUR A CIRCUIT DÉPHASEUR RC.

Nous allons appliquer la relation (39) à l'oscillateur de la fig. 21. Les résistances R_E, R_{B1}, R_{B2} et R_C fixent le point de polarisation. Les capacités C_1, C_E et C_2 doivent avoir des valeurs telles qu'à la fréquence d'oscillation leurs impédances puissent être négligées. Le circuit de réaction est constitué des résistances R et capacités C. La résistance R_u représente la résistance de charge du circuit d'utilisation.

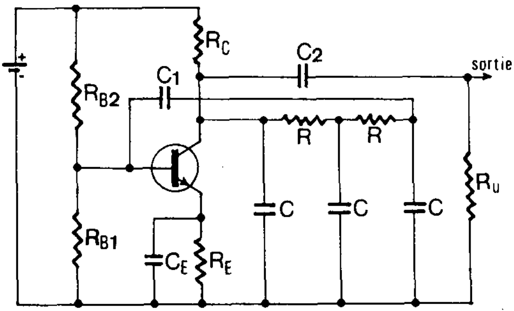


Fig. 21. — Oscillateur à circuit déphaseur RC.

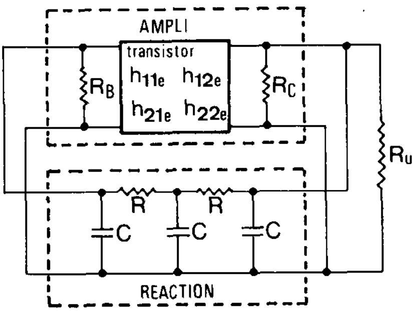


Fig. 22. — Schéma équivalent de l'oscillateur

$$\left(\frac{1}{R_B} = \frac{1}{R_{B1}} + \frac{1}{R_{B2}}\right).$$

Le schéma équivalent est donné à la fig. 22. En supposant que le paramètre h_{12e} du transistor est nul, nous trouvons sans difficulté que la matrice admittance du quadripôle amplificateur est :

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1/R_e & 0 \\ h_{21\,e}/h_{11\,e} & 1/R_s \end{pmatrix} \tag{40}$$

avec :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{B1}} + \frac{1}{R_{B2}} + \frac{1}{h_{11\,e}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_c} + h_{22\,e}. \tag{41}$$

Le calcul de la matrice admittance du quadripôle de réaction ne présente pas de difficultés particulières ; nous obtenons :

$$\mathcal{Y}' = \frac{1}{R(2+jx)} \begin{pmatrix} 1-x^2+3\,jx & -1 \\ -1 & 1-x^2+3\,jx \end{pmatrix} \tag{42}$$

en posant :

$$x = RC\omega. \tag{43}$$

La relation (39) s'écrit alors :

$$\left[1-x^2+2\frac{R}{R_{su}}+jx\left(3+\frac{R}{R_{su}}\right)\right]\left[1-x^2+2\frac{R}{R_e}+jx\left(3+\frac{R}{R_e}\right)\right]+$$
$$\ldots\ 2\,h_{21\,e}\frac{R}{h_{11\,e}}-1+h_{21\,e}\frac{R}{h_{11\,e}}jx=0$$

avec :

$$\frac{1}{R_{su}} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_u}. \tag{44}$$

Cette relation conduit, en annulant les parties réelle et imaginaire, aux deux équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[-6+R\left(\dfrac{1}{R_e}+\dfrac{1}{R_{su}}\right)\right]x^2+\left(3+\dfrac{R}{R_e}\right)\left(1+\dfrac{2R}{R_{su}}\right)+ \\ \qquad\ldots\left(1+\dfrac{2R}{R_e}\right)\left(3+\dfrac{R}{R_{su}}\right)+h_{21\,e}\dfrac{R}{h_{11\,e}}=0 \qquad (45) \\[2ex] x^4-\left[2+2R\left(\dfrac{1}{R_e}+\dfrac{1}{R_{su}}\right)+\left(3+\dfrac{R}{R_{su}}\right)\left(3+\dfrac{R}{R_e}\right)\right]x^2\ldots \\ \qquad\ldots\left(1+2\dfrac{R}{R_{su}}\right)\left(1+\dfrac{2R}{R_e}\right)+2\,h_{21\,e}\dfrac{R}{h_{11\,e}}-1=0 \qquad (46) \end{array}\right.$$

La condition d'oscillation s'obtient à partir de la première équation :

$$* \; h_{21\,e} \frac{R}{h_{11\,e}} = \left[6 + R\left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_{su}} \right) \right] x^2 \ldots$$

$$\ldots - \left(3 + \frac{R}{R_e} \right)\left(1 + 2\frac{R}{R_{su}} \right) - \left(1 + 2\frac{R}{R_e} \right)\left(3 + \frac{R}{R_{su}} \right) \quad (47)$$

et la fréquence d'oscillation est obtenue en reportant (47) dans (46) ;

$$* \; x^4 - \left[\left(3 + \frac{R}{R_{su}} \right)\left(3 + \frac{R}{R_e} \right) - 10 \right] x^2 - 5\left(1 + 2\frac{R}{R_{su}} \right) \ldots$$

$$\ldots - 2\left(1 + \frac{2R}{R_e} \right)\left(3 + \frac{R}{R_{su}} \right) - 1 = 0; \quad (48)$$

La résolution numérique de (48) ne présente pas de difficultés. Nous allons donner la résolution littérale de celle-ci, dans le cas pratique généralement utilisé $R_{su} = R$. L'équation (48) s'écrit dans ce cas :

$$x^4 - 2\left(\frac{R}{R_e} + 1 \right) x^2 - 8\left(3 + 2\frac{R}{R_e} \right) = 0$$

et a pour solution $x^2 = 6 \left(1 + \frac{2}{3}\frac{R}{R_e} \right)$. Compte tenu de la relation (43), nous trouvons comme fréquence d'oscillation :

$$f = \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC} \sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{R}{R_e}} \quad (49)$$

et en reportant la valeur de x^2 dans l'équation (47), nous obtenons la condition d'oscillation :

$$h_{21\,e} = 29 \frac{h_{11\,e}}{R} + \frac{h_{11\,e}}{R_e} \left(23 + 4 \frac{R}{R_c} \right). \quad (50)$$

NOTE. — Les oscillateurs à circuits accordés peuvent être traités suivant le même principe.

II.5. **Filtre actif.**

Une structure rencontrée dans la réalisation de filtres actifs est celle dont le schéma de principe est donné à la fig. 23. Le filtre actif est constitué de deux quadripôles passifs A et B et d'un convertisseur d'impédance négative, généralement appelé N.I.C. (negative impedance converter). Cet élément actif possède la propriété de présenter une impédance d'entrée de signe opposé à celui de l'impédance placée en sortie. Une réalisation pratique d'un N.I.C. est donnée à la fig. 24. En supposant que l'amplificateur opérationnel utilisé est idéal, les équations sont :

$$v_2 = v_1 \qquad R_2 i_2 = R_1 i_1.$$

La matrice de transfert d'un tel quadripôle est donc :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k = R_1/R_2. \tag{51}$$

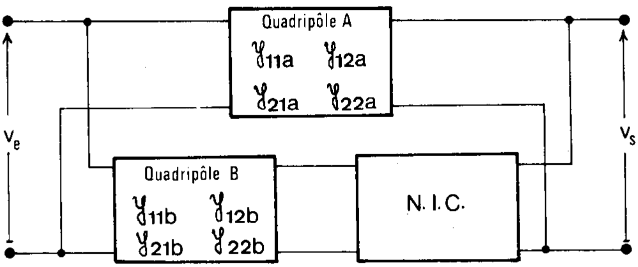


Fig. 23. — Schéma de principe d'un filtre actif avec convertisseur d'impédance négative.

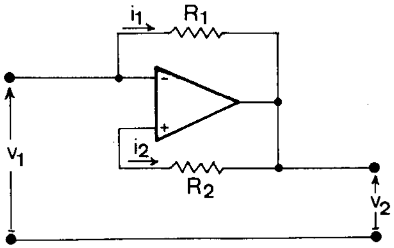


Fig. 24. — Réalisation pratique d'un convertisseur à impédance négative.

En utilisant les propriétés d'association des quadripôles, nous trouvons que la matrice admittance du filtre résultant est :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{11\,a} + \mathcal{Y}_{11\,b} & \mathcal{Y}_{12\,b} + \mathcal{Y}_{12\,a} \\ \mathcal{Y}_{21\,a} - k\mathcal{Y}_{21\,b} & \mathcal{Y}_{22\,a} - k\mathcal{Y}_{22\,b} \end{pmatrix}$$

Ce résultat nous permet de trouver l'expression du gain en tension, sortie ouverte, soit d'après le tableau 3 :

$$\mathcal{G}_v^{-} = \frac{\mathcal{V}_s}{\mathcal{V}_e} = -\frac{\mathcal{Y}_{21\,a} - k\mathcal{Y}_{21\,b}}{\mathcal{Y}_{22\,a} - k\mathcal{Y}_{22\,b}}. \qquad (52)$$

Un choix approprié des $\mathcal{Y}_{ij}$ permet d'obtenir le filtre désiré.

A travers les exemples précédents, nous avons montré l'intérêt du calcul matriciel appliqué aux quadripôles. Ce procédé de calcul permet toujours d'aboutir, de façon méthodique, à la solution exacte, soit sous forme littérale, soit sous forme numérique dans les cas les plus complexes. En outre, ce procédé permet de mettre en évidence les simplifications numériques qui peuvent être apportées.

J.-M. BERTHELOT,
(*I.U.T. Le Mans*).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. SORA. — *Le quadripôle électrique.* Masson et Cie. 1969.