Introduction aux notions fondamentales de la Relativité générale

AVANT-PROPOS.

Quelques mots d'introduction sont nécessaires avant de présenter aux lecteurs du Bulletin l'article qui suit intitulé « Introduction aux notions fondamentales de la Relativité générale »

Il s'agit d'un article de documentation portant sur un sujet dont l'enseignement systématique est nécessairement réservé à des spécialistes. Il arrive cependant que l'on évoque la Relativité générale dans les cours de physique « de base » lorsque l'on aborde certains sujets. Il en est ainsi lorsque l'on étudie l'identité masse gravitationnelle - masse inerte, la définition des référentiels d'inertie (principe de Mach), le paradoxe de Langevin, les limites de la théorie newtonienne de la gravitation, le problème cosmologique. Cet article vise à combler une certaine lacune qui existe entre les exposés de la Relativité générale qui restent dans le domaine purement verbal et les ouvrages de spécialistes, difficilement accessibles.

La méthode d'exposition utilisée ici est la méthode « géométrique », qui est la plus courante, et qui assimile d'emblée la gravitation à une « déformation » du cadre spatio-temporel.

Il convient cependant de noter qu'une autre approche est possible qui décrit le champ de gravitation par un tenseur dans l'espace-temps de Minkowsky, le raccord avec la « géométrie » ne se faisant qu'ultérieurement. L'avantage de cette seconde méthode est net du point de vue de la conception générale du lien entre la description des interactions fondamentales et la structure de l'espace-temps. Ces avantages sont en particulier analysés avec une clarté remarquable dans différentes publications de M. J.-M. LÉVY-LEBLOND (*). Malheureusement, cette seconde méthode est encore plus abstraite que la méthode géométrique. Aussi peut-on penser que cette dernière, qui suit la voie historique, présente encore un grand intérêt.

(*) J.-M. LÉVY-LEBLOND, Les Cahiers de Fontenay n° 8, chapitre 4. Deux points de vue différents sur la Relativité générale ; J.-M. LÉVY-LEBLOND, La Recherche n° 96 (janv. 1979), pages 29 et 30.

INTRODUCTION.

La théorie de la Relativité générale, due à EINSTEIN, a pour but d'écrire les lois physiques sous une forme invariante vis-à-vis de tout changement de coordonnées, aussi bien d'espace que de temps. Cette idée constitue le « Principe de Relativité générale ».

Par un cheminement de pensée dont nous allons indiquer les grandes étapes, cette exigence fondamentale, jointe au « Principe d'équivalence » aboutit à une théorie de la gravitation plus précise que celle de NEWTON.

Englobant la géométrie dans la physique, la Relativité générale a opéré l'une des grandes révolutions de la physique moderne, révolution dont l'originalité se manifeste, en particulier, dans la façon d'aborder le problème cosmologique.

1. LE PRINCIPE DE RELATIVITE GENERALE.

1.1. Invariance des lois physiques et principes de relativité.

Une des premières notions de la physique est celle d'observateur décrivant le cadre des phénomènes qu'il étudie à l'aide de trois coordonnées spatiales et d'une coordonnée temporelle t.

Les descriptions ainsi obtenues dépendent en général de l'observateur : il en est ainsi de la notion de trajectoire ; en ce sens, on peut parler du caractère *relatif* de ces descriptions. Cependant, une longue suite de tâtonnements a montré qu'au-delà de ces descriptions relatives, on pouvait dégager des lois physiques communes à différents observateurs. On considère alors, tout naturellement, que cette forme commune — ou invariante — des lois physiques représente la « *réalité objective* ».

Les principes de relativité ont consisté à définir les conditions de plus en plus larges dans lesquelles une telle invariance des lois physiques peut être obtenue.

Les problèmes sont au nombre de trois :

1) Définir une classe d'observateurs qui parviendront à s'accorder sur une telle formulation invariante des lois physiques.

2) Définir l'étendue des phénomènes auxquels cette invariance s'applique ; ainsi, le principe de relativité de GALILÉE stipule l'invariance des lois de la mécanique vis-à-vis d'un changement de référentiel galiléen, alors que le principe de relativité restreinte d'EINSTEIN étend cette invariance à toutes les lois physiques.

3) Exprimer mathématiquement cette invariance. Ceci suppose d'une part une certaine conception de l'espace et du temps

(cadre spatio-temporel) et, d'autre part, un « outil » mathématique permettant d'exprimer cette invariance. Nous verrons que l'outil mathématique est commun à toutes les relativités : c'est le calcul vectoriel ou plus généralement le calcul tensoriel ; une autre façon d'exprimer cette invariance des lois physiques consiste à leur donner une expression intrinsèque, c'est-à-dire une expression qui ne fait pas appel explicitement à un système particuler de coordonnées.

Nous allons passer rapidement en revue les différents sens que l'on a donné au principe de relativité, cette évolution correspondant à une généralisation de plus en plus poussée de la portée de ce principe.

1.2. La relativité spatiale (invariance des lois par translations et rotations)

L'expérience montre que l'espace est homogène et isotrope. En d'autres termes, les lois physiques ne doivent pas dépendre de l'origine ou de l'orientation des trièdres de référence (invariance par translation et rotation).

Montrons comment ceci s'exprime mathématiquement. Soit M_1 et M_2 deux points en interaction repérés dans un trièdre d'origine O par :

$$\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1} \qquad \text{et} \qquad \vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$$

et supposons que l'on puisse définir un potentiel d'interaction U. Pour exprimer l'invariance de U vis-à-vis d'une translation d'origine, il faut supposer que U ne dépend des positions de M_1 et M_2 que par l'intermédiaire de :

$$\vec{r_{12}} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

et, pour exprimer l'invariance de U vis-à-vis d'une rotation du trièdre de référence, il faut supposer que U ne dépend, en fait, que de :

$$r_{12} = \|\vec{r_{12}}\| = \|\vec{r_2} - \vec{r_1}\|.$$

Plus généralement, les lois physiques devront se traduire par des relations exprimant l'égalité de deux grandeurs géométriques de même nature dans l'espace ordinaire (égalité de deux scalaires invariants, de deux vecteurs, de deux tenseurs) ; ainsi sera automatiquement assurée l'invariance de ces lois vis-à-vis des translations et rotations. Citons par exemple la formule de COULOMB :

$$\vec{f_{12}} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{(r_{12})^2}\,\vec{u_{12}}$$

où chaque membre est un vecteur.

1.3. La relativité de Galilée.

L'étude de la mécanique classique fait apparaître, à côté des translations et rotations, une autre transformation entre observateurs équivalents : les changements de référentiel galiléen ($\mathcal{R}$) à un référentiel galiléen ($\mathcal{R}'$) se traduit par les formules de transformation :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t \quad \text{et} \quad t' = t \quad \text{avec} \quad \vec{v}_e = \vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \tag{1}$$

Ces formules définissent la « transformation de GALILÉE » qui laisse invariantes les lois de la mécanique classique : ce résultat constitue le « principe de relativité de GALILÉE ».

Comme on le vérifie immédiatement, les longueurs de segments et les intervalles de temps sont invariants vis-à-vis de la transformation de GALILÉE ; en d'autres termes, le cadre spatio-temporel de la relativité de GALILÉE fait apparaître les deux invariants :

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad \text{et} \quad \Delta t^2.$$

1.4. La relativité restreinte d'Einstein.

EINSTEIN a étendu le principe de relativité de GALILÉE en postulant l'invariance de toutes les lois physiques — et non plus seulement l'invariance des seules lois de la mécanique — vis-à-vis d'un changement de référentiel galiléen.

On doit alors abandonner les formules de transformation (1) pour les remplacer par les formules exprimant la transformation de LORENTZ. Dans le cas où les directions des axes Ox et O'x' coïncident ainsi que les événements origine, ces formules de transformation s'écrivent :

$$x' = \gamma_e(x - v_e t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma_e(t - v_e x/c^2)$$

avec :

$$\gamma_e = 1/\sqrt{1 - v_e^2/c^2}. \tag{2}$$

Cette extension du principe de relativité conduit à la relativité restreinte ; la transformation de LORENTZ fait apparaître un invariant :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{3}$$

invariant qui représente le carré de l'intervalle dans l'espace-temps (espace à quatre dimensions où les coordonnées sont x, y, z et ct). Cet invariant s'appelle le *ds^2 de Minkowsky* ou encore la *métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte;* il joue un rôle analogue à celui de la norme dans les espaces euclidiens.

Ce ds^2 caractérise la structure de l'espace-temps de la relativité restreinte : il définit une métrique pseudo-euclidienne en ce sens que les coefficients apparaissant dans l'expression du ds^2 valent $+1$ ou -1 et non pas seulement $+1$ comme dans un espace euclidien.

Si l'on inverse le problème et que l'on cherche systématiquement les transformations laissant ce ds^2 invariant on trouve les translations d'espace, les changements d'origine du temps, les symétries et rotations spatiales et les changements de référentiels galiléens. En fait, toutes ces opérations correspondent à un même type de transformation dans l'espace-temps : ce sont des transformations linéaires des coordonnées.

En résumé, l'espace-temps de la relativité restreinte est caractérisé par le ds^2 de MINKOWSKY (3) qui fait jouer un rôle particulier aux transformations linéaires des coordonnées. Le principe de relativité restreinte d'EINSTEIN stipule que les lois physiques sont invariantes vis-à-vis de ce type de transformation. On satisfait à cette exigence en exprimant ces lois sous la forme d'égalité de deux tenseurs de l'espace-temps (scalaires invariants, vecteurs, tenseurs de même rang).

1.5. **Le principe de relativité générale.**

Le principe de relativité générale se présente comme une extension naturelle de cette invariance des lois physiques, lorsque l'on ne se limite plus à des transformations linéaires des coordonnées.

Le principe de relativité générale revient à imposer l'invariance des lois physiques vis-à-vis de tout changement des coordonnées.

Mathématiquement, une telle exigence s'exprime facilement en faisant appel au calcul tensoriel. Le point de départ consiste à postuler l'invariance d'une expression du type :

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad i, j = (1, 2, 3, 4) \tag{4}$$

qui définit une structure de l'espace-temps plus générale que (3). Les g_{ij} sont des fonctions « *a priori* » quelconques des coordonnées x^i ; ce ds^2 est la *métrique de l'espace-temps de la relativité générale,* et les coefficients g_{ij} sont les composantes du *champ métrique* ou *tenseur fondamental.*

Dans le cas le plus général, on ne peut pas ramener par simple changement de variables l'expression (4) au ds^2 de MINKOWSKY (3). Un espace muni d'une métrique définie par (4) porte le nom d'espace de RIEMANN.

Afin d'alléger les expressions, nous adopterons dans ce qui suit la convention de sommation d'EINSTEIN : lorsque dans une expression monôme le même indice apparaît répété deux fois, une fois en haut, une fois en bas, on suppose la sommation automatiquement effectuée sur cet indice.

Ainsi le ds^2 défini par (4) sera noté sous la forme plus condensée :

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (4^{bis} = 4).$$

En résumé, le principe de relativité générale consiste à postuler l'invariance des lois physiques vis-à-vis de toute transformation des coordonnées. Pour exprimer ce principe de la façon la plus large possible, on doit supposer que l'espace-temps est un espace de RIEMANN, c'est-à-dire qu'il est muni d'une métrique définie par l'expression (4). L'expression mathématique du principe de relativité générale est alors très simple : les lois physiques doivent se traduire par l'égalité de deux tenseurs de même nature dans cet espace-temps ; des exemples seront donnés au § 4.

Il est à noter que la grande liberté laissée par cet énoncé quant au choix des coordonnées est à l'origine de quelques difficultés qui seront signalées au § 5-3.

2. LE PRINCIPE D'EQUIVALENCE.

La mécanique classique (ou newtonienne) constate l'identité de deux masses : m_i et m_g ; la masse inerte m_i est celle qui intervient dans le principe fondamental :

$$\vec{f} = m_i \vec{\gamma}$$

et la masse gravitationnelle m_g est celle qui intervient dans l'expression de la loi de NEWTON :

$$\vec{f} = -G \frac{m_g\, m'_g}{r^2} \vec{u}.$$

De façon plus générale, nous écrirons — dans la théorie newtonienne — l'action d'un champ de gravitation $\vec{a}$ sur une masse ponctuelle m_g :

$$\vec{f} = m_g \vec{a}.$$

L'expérience montre que l'on peut confondre ces deux masses, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$m_i = m_g$$

cette identité étant vérifiée avec une précision qui dépasse aujourd'hui 10^{-11} en valeur relative.

Cette identité est une constatation expérimentale dans le cadre de la mécanique newtonienne. Pour en dégager la signification, restons encore dans le cadre de la mécanique classique, et considérons le mouvement d'un point M sous l'action d'un champ de gravitation $\vec{a}$ dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}_0$). L'équation du mouvement s'écrit :

$$m_i \vec{\gamma} = m_g \vec{a}. \tag{5}$$

Si nous considérons un référentiel quelconque ($\mathcal{R}$), la loi classique de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \qquad \text{avec} \qquad \vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$$

de sorte que l'équation du mouvement (5) devient :

$$m_i \vec{\gamma}_r = m_g \vec{a} - m_i \vec{\gamma}_e - 2\,m_i \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r. \tag{6}$$

L'équation (6) peut, comme chacun sait, être interprétée comme l'équation du mouvement de M dans ($\mathcal{R}$) ; l'identité $m_i = m_g$ permet d'écrire cette équation sous la forme :

$$\vec{\gamma}_r = \vec{a} - \vec{\gamma}_e - 2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r \tag{7}$$

où nous voyons que, pour M, il n'y a pas de différence essentielle entre les termes venant du champ de gravitation $\vec{a}$ et ceux venant du changement de référentiel, et qui se traduisent par les termes $-\vec{\gamma}_e$ et $-2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$; ces derniers termes correspondent, bien entendu, aux forces d'inertie.

Deux cas particuliers sont à envisager :

1) Si $\vec{a} = \vec{0}$, (6) s'écrit :

$$\vec{\gamma}_r = -\vec{\gamma}_e - 2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$$

on peut considérer que ce changement de coordonnées (*i. e.* de référentiel) engendre un champ de gravitation :

$$\vec{a}' = -\vec{\gamma}_e - 2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$$

ce champ de forces n'est autre que le champ de forces d'inertie dont les effets sont bien connus.

2) Si $\vec{\omega}_e = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_e = \vec{a}$, l'équation du mouvement (6) devient :

$$\vec{\gamma}_r = \vec{0}.$$

Le résultat s'interprète de la façon suivante : dans le référentiel ($\mathcal{R}$), le point considéré est libre : on a localement supprimé le champ de gravitation.

Cet exemple est d'ailleurs très facile à interpréter ; les conditions :

$$\vec{\omega}_e = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_e = \vec{a}$$

signifient que $(\mathcal{R})$ est, par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, animé d'un mouvement de chute libre. On sait que dans une cabine en chute libre, la pesanteur est supprimée.

L'identité $m_i = m_g$ montre donc que, localement, il y a équivalence entre un champ de gravitation et un champ d'inertie lié à un changement de coordonnées. Nous venons de voir, en effet, que l'on peut soit « créer » un champ de gravitation par changement de coordonnées, soit annuler localement un champ de gravitation par un changement de référentiel approprié.

C'est ce résultat qui constitue le « principe d'équivalence ».

Le principe de relativité générale envisage tous les changements de coordonnées ; le principe d'équivalence postule l'identité d'un champ d'inertie provenant d'un changement de coordonnées et d'un champ de gravitation. La juxtaposition de ces deux principes doit donc, d'une façon ou d'une autre, aboutir à une théorie de la gravitation : ces deux principes sont les principes de base de la relativité générale.

Arrêtons-nous un instant dans le cheminement des idées pour bien faire saisir le caractère local du principe d'équivalence.

Le principe d'équivalence n'a qu'un caractère local : à grande échelle, on ne peut pas systématiquement assimiler un champ de gravitation et un champ d'inertie ; ainsi, il n'est pas possible d'engendrer par changement de coordonnées (donc changement de référentiel) un champ d'inertie ayant la symétrie sphérique du champ de gravitation d'un astre.

De même on ne peut pas, en général, annuler un champ de gravitation dans un volume *fini* par changement de référentiel ; cette annulation n'est possible que localement, en un point donné.

Physiquement, il est facile de faire comprendre cette idée sur un exemple. Dans un référentiel $(\mathcal{R})$ animé d'un mouvement rectiligne d'accélération $-\vec{g}$ par rapport à un référentiel galiléen, règne un champ de force d'inertie très analogue au champ de pesanteur terrestre ; cependant si l'on abandonne deux points matériels sans vitesse initiale dans $(\mathcal{R})$, ces points tombent en suivant des trajectoires rigoureusement parallèles ; dans le champ de pesanteur terrestre, on noterait un rapprochement des deux trajectoires, dû au caractère radial du champ de gravitation. Cet exemple montre bien que l'équivalence entre un champ d'inertie et un champ de gravitation a un caractère local et ne peut pas être étendu, en général, à un volume fini (1).

3. APPROCHE GEOMETRIQUE DE LA THEORIE DE LA GRAVITATION.

Le principe d'équivalence fait entrevoir le lien qui peut exister entre les changements de coordonnées envisagés par le principe de relativité générale et une théorie de la gravitation.

Précisons la façon dont se traduit cette idée sur un exemple très classique.

Soit un référentiel galiléen (R_0) dans lequel l'espace-temps correspond à la métrique de MINKOWSKY :

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Dans ce référentiel (R_0), un point isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, ce qui se traduit, pour les quatre coordonnées représentant ce point dans l'espace-temps, par les relations :

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = v_x\,t, \qquad x^2 = v_y\,t, \qquad x^3 = v_z\,t.$$

Les quatre coordonnées étant fonctions linéaires du paramètre (t), ce point décrit une droite dans l'espace-temps. On montre que, tout comme en géométrie euclidienne dans l'espace à trois dimensions, cette droite correspond à une extrémale de l'intégrale :

$$\int_{M_1}^{M_2} ds$$

ce qui s'écrit :

$$\delta\left(\int_{M_1}^{M_2} ds\right) = 0 \tag{8}$$

---

(1) Donnons la formulation mathématique de cette distinction en supposant connues les notions du § 4.

Dans un espace vide, les champs g_{ij} engendrés par changements de coordonnées satisfont toujours aux conditions :

$$R^i{}_{klm} = 0$$

où $R^i{}_{klm}$ est le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL (cf. [4] ; § 91 relation 91-4 et § 95, relation 95-9 et son commentaire), alors qu'en dehors de la matière (et pour $\Lambda = 0$), les g_{ij} satisfont aux conditions *moins restrictives :*

$$R_{km} = \sum_i R^i{}_{kim} = 0.$$

Signalons encore que les relations $R^i{}_{klm} = 0$ constituent l'ensemble des conditions auxquelles les g_{ij} doivent satisfaire pour que, par changement de variables, on puisse ramener le ds^2 à la forme de MINKOWSKY (forme pseudo-euclidienne).

Cette expression possède un caractère intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas appel explicitement à un système de coordonnées ; ce faisant, elle satisfait automatiquement au principe de relativité générale. Nous donnerons au § 4.1., relation (10), une expression équivalente à (8) qui permet d'effectuer les calculs pratiques.

Dans (R_0), le ds^2 peut s'écrire, en adoptant les coordonnées cylindriques :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - (dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2).$$

Considérons alors un référentiel (R') animé par rapport à (R_0) d'un mouvement de rotation autour de Oz s'effectuant à la vitesse angulaire constante ω. La transformation faisant passer de (R_0) à (R') s'écrit :

$$\varphi = \varphi' + \omega t, \qquad r = r', \qquad z = z'$$

soit, en reportant dans le ds^2 :

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r'^2)\, dt^2 - dr'^2 - r'^2\, d\varphi'^2 - dz'^2 - 2\, r'^2\, \omega\, d\varphi'\, dt. \qquad (9)$$

Quelle que soit la loi de transformation $t \to t'$ que l'on envisage, on ne peut ramener cette expression à une somme de carrés indépendants des coordonnées de (R').

Il est évident que, dans (R'), le point M envisagé précédemment n'est pas animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme. Ceci peut s'interpréter classiquement en faisant intervenir les forces d'inertie. Conformément au principe d'équivalence, on peut dire également que cette modification du mouvement est due à un champ de gravitation. Signalons aussi que l'on peut obtenir directement les équations du mouvement de M dans (R') en appliquant l'équation (8) au ds^2 donné par (9) (2).

Techniquement, c'est le fait que les g_{ij} dans (9) sont fonction des coordonnées qui fait que, dans (R'), le mouvement de M n'est pas rectiligne uniforme.

Ainsi, voyons-nous apparaître l'idée suivante : alors que le ds^2 de MINKOWSKY correspond à un espace sans gravitation (puisque le mouvement d'un point isolé y est rectiligne uniforme), la forme plus générale :

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

où les g_{ij} s'écartent des valeurs ± 1, peut traduire l'existence d'un champ de gravitation (au sens le plus général que lui donne le principe d'équivalence).

---

(2) Le calcul est développé dans [6], chap. 4, § 2. Une façon évidente d'obtenir la trajectoire dans (R') consiste à effectuer la transformation $r' = r$, $z' = z$, $\varphi = \varphi' + \omega t$ sur l'expression de la trajectoire dans (R_0).

Le problème consiste donc d'une part, à trouver les équations qui déterminent les g_{ij} (équations du champ), d'autre part à trouver l'équation du mouvement d'un point dans ce champ de gravitation (3).

Ces équations doivent satisfaire au principe de relativité générale, c'est-à-dire s'écrire soit sous forme intrinsèque, soit sous forme d'égalité des composantes de deux tenseurs de même nature.

Clairement, l'équation (8) satisfait à cette exigence, et c'est elle que retient la relativité générale.

4. LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA RELATIVITE GENERALE.

4.1. L'équation du mouvement.

L'analyse qui précède montre que le champ de gravitation (au sens le plus large) est représenté par les g_{ij} qui sont les composantes du *champ métrique* ou *tenseur fondamental*.

Les équations du mouvement doivent avoir une forme invariante vis-à-vis des changements de coordonnées (principe de relativité générale), ce qui est manifestement le cas pour l'équation des géodésiques :

$$\delta \int ds = 0 \tag{8}$$

ce qui s'exprime en fonction des coordonnées par :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \\ \text{avec :}\quad &\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

où les g^{il} sont les éléments de la matrice inverse de celle des g_{ij}.

Nous avons vu que les g_{ij} dépendent en particulier du choix des coordonnées (§ 3) ; si nous parvenons d'autre part à relier d'une façon ou d'une autre les g_{ij} à la répartition de matière (source « classique » du champ de gravitation), l'équation (8) — ou le système d'équations (10) qui lui est équivalent — satisfera non seulement au principe de relativité générale mais aussi au principe d'équivalence.

---

(3) Les deux problèmes ne sont pas indépendants : la non linéarité des équations du champ de la Relativité générale fait que l'on peut en déduire l'équation du mouvement (cf. [6], chap. 11, § 1).

Reste à relier les g_{ij} aux sources : ce lien est exprimé par les équations du champ.

4.2. Les équations du champ.

Ces équations doivent relier sous forme tensorielle (principe de relativité générale) les g_{ij} aux sources ; ces équations doivent de plus généraliser l'équation de POISSON :

$$\Delta V = 4 \pi G \varrho$$

donc apparaître sous forme d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Enfin, elles doivent satisfaire à certaines règles traduisant de façon générale les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

On montre que les équations les plus générales qui satisfont à toutes ces conditions sont :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R\, g_{ij} + \Lambda\, g_{ij} = \frac{8 \pi G}{c^4} T_{ij} \qquad (11)$$

où G est la constante de gravitation de la théorie newtonienne ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI), Λ une constante — dite constante cosmologique — et que l'on prend nulle en général (sauf dans certaines discussions particulières, cf. § 7), T_{ij} est le tenseur impulsion-énergie de la matière qui, en l'absence de champ électromagnétique s'écrit, pour un milieu de masse volumique ϱ_0 et de pression p, en un point de coordonnées $x_i = g_{il} x^l$ et $x_j = g_{jm} x^m$:

$$T_{ij} = (p + \varrho_0 c^2) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} - p\, g_{ij} \qquad (12)$$

R_{ij} est le tenseur de RICCI :

$$R_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma^l{}_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma^l{}_{il}) + \Gamma^l{}_{ij}\, \Gamma^m{}_{lm} - \Gamma^m{}_{il}\, \Gamma^l{}_{jm} \qquad (13)$$

et R est la « courbure scalaire » de l'espace-temps :

$$R = g^{ij} R_{ij}.$$

4.3. Cas d'un champ faible, approximation newtonienne.

Un champ de gravitation faible est caractérisé par des valeurs des g_{ij} qui s'écartent peu des valeurs de MINKOWSKY $\pm \delta_{ij}$; on montre alors que les équations du champ se réduisent à l'expression approchée (avec $\Lambda = 0$) :

$$\Delta g_{00} = \frac{8 \pi G}{c^2} \varrho_0$$

alors que les équations du mouvement (10) s'écrivent, au même ordre d'approximation pour une particule de vitesse faible devant c :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{g_{00}}{2} c^2\right)$$

où les x^α avec $\alpha = 1, 2, 3$ sont les coordonnées cartésiennes spatiales.

Il est facile de voir que la première équation n'est autre que l'équation de POISSON, et que la seconde traduit le principe fondamental de la mécanique newtonienne, $g_{00}\, c^2/2$ jouant — à cet ordre d'approximation — le rôle de potentiel de gravitation.

Remarques.

1) Dans le cas général, ce sont les dix g_{ij} indépendants qui jouent le rôle de potentiels de gravitation comme cela se voit dans l'équation (10).

2) On a développé systématiquement les équations de la relativité générale au degré d'approximation suivant (approximation post-newtonienne) ; cependant, les résultats ne sont pas faciles à exprimer à cause de l'arbitraire lié au choix des coordonnées (cf. § 5.3.).

5. QUELQUES ASPECTS CARACTERISTIQUES DE LA RELATIVITE GENERALE.

5.1. Introduction.

La relativité générale se présentant comme une théorie de la gravitation doit englober la théorie newtonienne (cf. § 4.3.) et permettre, au degré d'approximation suivant, de trouver des corrections par rapport à celle-ci. Aussi le premier problème qui se présente à l'esprit est-il le problème de KEPLER (mouvement d'une planète sous l'action d'un astre central sphérique). Ce problème correspond, en relativité générale, à la « solution extérieure de SCHWARZCHILD » (cf. § 6.).

La relativité générale donne cependant une interprétation de la gravitation très différente de celle de NEWTON sur le plan des concepts ; la théorie newtonienne décrit la gravitation à l'aide d'un champ de force qui règne dans un cadre spatio-temporel rigide : le champ de force est l'acteur, et le cadre spatio-temporel est la scène, et cette scène est indifférente à la pièce qui s'y joue. La théorie d'EINSTEIN mêle étroitement l'acteur et la scène : en relativité générale, c'est une déformation du cadre spatio-temporel qui constitue l'essence même du phénomène de gravitation.

Aussi voit-on apparaître des effets totalement inconnus en théorie newtonienne ; le cas extrême est celui des trous noirs où la déformation du cadre spatio-temporel est si forte que la théorie newtonienne ne peut même plus être utilisée en guise d'approximation.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'esquisser à grands traits, les idées qui permettent de traiter quelques problèmes à partir des équations générales du § 4.

Le choix de ces problèmes est volontairement très limité : c'est à cette seule condition que l'on peut quitter les généralités pour saisir sur le vif quelques aspects précis de la théorie.

5.2. Comment se présentent plusieurs problèmes en relativité générale.

Dans la recherche de la solution de SCHWARZCHILD (cf. § 6) comme dans le problème cosmologique (cf. § 7), on se propose de déterminer les g_{ij} connaissant la répartition de matière, c'est-à-dire finalement les composantes du tenseur impulsion-énergie.

Les g_{ij} indépendants sont au nombre de 10, les $\Gamma^k{}_{ij}$ indépendants au nombre de 40 ; aussi est-il maladroit de se lancer « tête baissée » dans les calculs.

Il faut utiliser au mieux, pour commencer, la symétrie du problème afin de simplifier au maximum la forme de ds^2 ; on réduit ainsi le nombre de g_{ij} inconnus (4).

Ainsi, dans le problème de l'astre central sphérique, peut-on réduire le ds^2 à une expression de la forme :

$$ds^2 = e^\nu c^2\, dt^2 - e^\lambda\, dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2)$$

où ν et λ sont des fonctions de r seul ; (si l'on acceptait un mouvement radial de la matière à l'intérieur de l'astre, respectant par conséquent la symétrie sphérique, ν et λ seraient fonction de r et t).

A partir de cette expression, on calcule les $\Gamma^k{}_{ij}$ puis le membre de gauche des équations du champ (11). On obtient ainsi des équations différentielles portant, dans notre exemple, sur ν et λ (5).

---

(4) Pour le traitement rigoureux des symétries dans l'espace-temps, cf. [7], chap. 5.

(5) Les calculs sont développés dans tous les ouvrages de Relativité générale ; en particulier [3], chap. 8, § 2, [4], § 97 et [6], chap. 6 où le détail des calculs est très clair.

Des conditions supplémentaires (conditions aux limites dans le problème de SCHWARZCHILD, hypothèses sur l'homogénéité et l'isotropie de l'espace dans le problème cosmologique) permettent d'achever la détermination des g_{ij}.

Signalons ici que pour déterminer les $\Gamma^i{}_{jk}$, la méthode la plus simple consiste à utiliser la propriété (non triviale) suivante (6) : « les géodésiques correspondent également à la propriété d'extremum :

$$\delta\left(\int \mathrm{F}\, ds\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{F} = g_{ij}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^j}{ds} \text{ ».}$$

Or, cette condition s'exprime par les relations d'EULER-LAGRANGE :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{avec} \qquad x_i = dx^i/ds$$

par identification avec les équations des géodésiques écrites sous la forme :

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0$$

on obtient directement les $\Gamma^i{}_{jk}$.

5.3. **L'indétermination des coordonnées.**

Une des sources de perplexité (et de difficultés) les plus grandes lorsque l'on aborde la relativité générale est l'indétermination assez remarquable des systèmes de coordonnées. Cette « indétermination » est voulue par le principe de relativité générale, mais une interprétation naïve des coordonnées en termes géométriques peut conduire à des déboires profonds.

Que signifient les coordonnées x^i qui interviennent dans l'expression fondamentale :

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \,?$$

Les lois physiques consistent, en dernier ressort, à essayer de relier entre eux des événements. La notion d'événement repéré par quatre coordonnées est « issue » de la relativité restreinte (interprétation dans l'espace-temps de l'invariance du ds^2), mais on peut introduire cette notion, ainsi que celle de coïncidence de deux événements, indépendamment de toute idée de métrique. Montrons-le sur un exemple emprunté à la physique ordinaire.

---

(6) Cf. [6], chap. 2, § 3.

Sur une feuille de caoutchouc est tracé un quadrillage quelconque ; ce quadrillage, dûment numéroté, peut permettre de repérer les points de la feuille.

Si nous déformons la feuille, le repérage d'un point M donné reste le même. Si nous traçons sur la feuille une courbe (C), le repérage des différents points de (C) ne change absolument pas lors d'une déformation de la feuille ; ce repérage n'a pas d'interprétation immédiate en termes de longueur.

La situation se présente de façon un peu analogue en relativité générale où il n'existe pas de lien évident « *a priori* » entre les coordonnées x^i et des temps ou des longueurs. Il en résulte une indétermination sur la signification des coordonnées que nous allons illustrer sur deux exemples typiques.

Le problème du champ g_{ij} en présence d'un astre sphérique de masse M placé à l'origine des coordonnées conduit à la solution (extérieure) de SCHWARZCHILD :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2\,GM}{rc^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2\,GM}{rc^2}} - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\; d\varphi^2.$$

Si $GM/rc^2 \ll 1$, on retrouve le ds^2 de MINKOWSKY en coordonnées sphériques ; cependant, il ne faut pas en conclure trop hâtivement que r représente la distance du point considéré à l'origine des cordonnées. En effet, le changement de variable :

$$r = \rho\,(1 + m/2\,\rho)^2 \qquad \text{avec} \qquad m = GM/c^2$$

permet d'écrire le ds^2 précédent sous la forme :

$$ds^2 = \left(\frac{1 - m/2\,\rho}{1 + m/2\,\rho}\right)^2 c^2\, dt^2 - (1 + m/2\,\rho)^4\,[d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\vartheta\; d\varphi^2]$$

avec $m = GM/c^2$.

Pour $GM/\rho^2 \ll 1$, on retrouve le ds^2 de MINKOWSKY en coordonnées sphériques, mais avec cette fois ρ pour rayon vecteur. Les coordonnées r, ϑ, φ intervenant dans la première expression sont dites coordonnées de SCHWARZCHILD, les coordonnées ρ, ϑ, φ sont dites isotropes. On remarque en effet qu'en coordonnées isotropes, la partie spatiale de la métrique est proportionnelle à son expression euclidienne. Ce premier exemple montre qu'une définition précise des longueurs ou de la signification physique des coordonnées est indispensable (cf. § 5.4.).

Un autre exemple, encore plus saisissant, est fourni par l'étude de modèles cosmologiques.

Pour un espace vide, ($\varrho_0 = 0$), on peut trouver une solution des équations du champ en conservant le terme en Λ : c'est le ds^2 de DE SITTER :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2$$

avec $1/R^2 = \Lambda/3$.

Cette solution est dite statique en ce sens que les g_{ij} ne dépendent pas du temps, et que la transformation $t \to -t$ laisse invariante l'expression du ds^2.

A partir de cette expression, effectuons le changement de variables :

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} \exp(-ct/R), \quad \vartheta' = \vartheta, \quad \varphi' = \varphi, \ldots$$

$$\ldots t' = t + \frac{R}{2c} \ln(1 - r^2/R^2)$$

après un calcul simple, on vérifie que le ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = c^2\, dt'^2 - \{\exp(2\,ct'/R)\}\ (dr'^2 + r'^2\, d\vartheta'^2 + r'^2 \sin^2 \vartheta'\, d\varphi'^2)$$

autrement dit, après ce changement de variables, le ds^2 a perdu son caractère statique.

5.4. Interprétation du ds² en termes d'espace et de temps.

Nous ne voulons pas terminer sur une note trop pessimiste, et renvoyons à l'ouvrage classique [4], § 84, où les notions de longueurs et de durées sont clairement analysées.

Bornons-nous à citer le résultat : caractérisons par l'indice $_0$ la coordonnée temporelle et par des indices grecs les coordonnées spatiales ($\alpha = 1, 2, 3$).

— Le temps propre est défini par :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}}\, dx^0.$$

— Les distances spatiales sont définies par :

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad \text{avec} \qquad \gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}\, g_{0\beta}}{g_{00}}.$$

En particulier, pour un champ statique (dont les g_{ij} ne dépendent pas de $t = x^0$ et pour lequel la transformation $t \to -t$

laisse invariante l'expression du ds^2), la métrique s'écrit localement :

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 - dl^2.$$

Remarques.

Ces quelques précautions sont en particulier utiles si l'on veut éviter des difficultés dans les deux cas suivants :

1) Dans le problème du disque tournant présenté au § 3, l'expression du ds^2 est trop souvent l'objet d'interprétations géométriques hasardeuses ; techniquement, la difficulté tient en partie au fait qu'à cause du terme en $d\varphi\, dt$, la métrique n'est pas statique mais simplement stationnaire. Le problème de la géométrie sur un disque tournant est examiné de façon rigoureuse dans [4], § 89 (problème).

2) La solution de SCHWARZCHILD est essentielle pour obtenir le développement du potentiel loin d'un système de masses ; cependant, aux difficultés classiques du développement du potentiel (telles qu'on les rencontre en électromagnétisme par exemple), s'ajoute ici une difficulté supplémentaire due au choix des coordonnées. Suivant que l'on utilise les coordonnées de SCHWARZCHILD ou les coordonnées isotropes, on n'obtient pas les mêmes expressions. Il importe, dans un même calcul, d'utiliser un même type de coordonnées. Si l'on se réfère à l'ouvrage classique de LANDAU et LIFCHITZ [4], on remarquera que les calculs du § 104 utilisent les coordonnées de SCHWARZCHILD alors que ceux du § 106 utilisent les coordonnées isotropes ; le passage des unes aux autres est mentionné par deux notes discrètes (p. 423 et 432).

6. LA SOLUTION DE SCHWARZCHILD.

Il s'agit de l'expression du ds^2 à l'extérieur d'un astre sphérique de masse M ; on résoud les équations du champ avec $\Lambda = 0$ en cherchant une solution à symétrie sphérique. En coordonnées de SCHWARZCHILD (cf. § 5.3), le ds^2 ainsi obtenu s'écrit :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

avec $m = \mathrm{G}M/c^2$.

A partir de cette expression du ds^2, on peut déterminer les équations du mouvement (formules 10, § 4.1.).

En appliquant ce calcul au mouvement des planètes, on obtient en particulier à une avance de périhélie $\delta\varphi$ par révolution donnée par :

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{12\pi^2 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

où a et e sont respectivement le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite de la planète, et T sa période de révolution.

D'autre part, la solution de SCHWARZCHILD permet de prévoir une déviation $\Delta\vartheta$ des rayons passant au voisinage du Soleil, déviation donnée par :

$$\Delta\vartheta = 4\,\mathrm{GM}/\mathrm{R}c^2$$

où M est la masse du Soleil et R son rayon.

De plus, la modification de l'espace-temps produite par la masse M se traduit par un « décalage vers le rouge » des sources placées dans le champ de gravitation ; la fréquence ν d'une source placée dans le champ de l'astre de masse M est reliée à sa fréquence ν_0 en l'absence de ce champ par :

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \dfrac{2\,\mathrm{GM}}{rc^2}}}.$$

Enfin, la durée du trajet d'ondes électromagnétiques est également affectée par cette modification de l'espace-temps.

Ces quatre conséquences ont fait l'objet de vérifications expérimentales toutes favorables à la théorie, vérifications qui sont largement décrites dans les traités classiques.

Remarques.

1) La grandeur homogène a une longueur :

$$r_S = 2\,\mathrm{GM}/c^2$$

est appelée « rayon de SCHWARZCHILD » de l'astre de masse M. Si un astre a un rayon inférieur à son rayon de SCHWARZCHILD, c'est un « trou noir », objet typique de la relativité générale.

Pour le soleil, $r_s = 3$ km, et à la distance Terre-Soleil $\mathrm{GM}/rc^2 \sim 10^{-8}$; ce résultat explique les difficultés des vérifications expérimentales.

2) Les calculs peuvent être menés à bien en coordonnées isotropes (cf. § 5.3.) et aboutissent aux mêmes résultats.

3) On peut également résoudre le problème de SCHWARZCHILD en conservant la constante cosmologique Λ dans les équations du champ ; la solution ainsi obtenue s'écrit, toujours en coordonnées de SCHWARZCHILD (7) :

---

(7) Cf. [3], p. 88.

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} - r^2 d\vartheta^2 \dots$$
$$\dots - r^2 \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2$$

avec $m = \mathrm{GM}/c^2$

ce qui provoque une avance supplémentaire du périhélie $\delta\overline{\varphi}$ qui est donnée, pour une révolution, par (8) :

$$\delta\overline{\varphi} = 2\pi \frac{\Lambda a^3 c^2 (1 - c^2)^3}{2\,\mathrm{GM}}.$$

On note que pour $m = 0$, on obtient le ds^2 de DE SITTER (cf. § 7.2.).

7. LE PROBLEME COSMOLOGIQUE.

7.1. Généralités.

Le problème cosmologique consiste à considérer l'Univers dans son ensemble et à essayer de le représenter, à très grande échelle, par un modèle convenable.

Bien qu'une théorie cosmologique soit concevable en théorie newtonienne, la relativité générale, qui relie la géométrie à la répartition de la matière, permet d'aborder le problème de façon beaucoup plus satisfaisante.

Le modèle le plus simple d'Univers est le modèle homogène isotrope : on assimile l'Univers à un fluide homogène isotrope de masse volumique ϱ et de pression p uniformes ; on prend souvent comme équation d'état $p = 0$.

L'apparente permanence dans le temps du spectacle qu'offre la voute céleste fait que l'on a tout d'abord imaginé, au début du siècle, des modèles statiques d'Univers.

C'est pour cette raison qu'EINSTEIN a introduit dans les équations du champ la constante cosmologique Λ : cette constante est indispensable pour obtenir une solution statique dans un Univers non vide (cf. § 7.2.).

En 1922, le mathématicien FRIEDMANN a montré que des solutions non statiques peuvent être obtenues pour $\Lambda = 0$: on arrive ainsi à un modèle d'Univers en expansion. La découverte de la récession des galaxies par HUBBLE en 1930 a justifié l'intérêt de ces modèles, et aujourd'hui la plupart des spécialistes considèrent que la constante cosmologique n'a plus sa raison d'être.

---

(8) Cf. A.-S. EDDINGTON, *Mathematical theory relativity*, formule 45-5.

Le problème cosmologique débouche, en relativité générale, sur une question originale que la théorie newtonienne ignore complètement : l'Univers est-il fini ou infini, globalement euclidien ou non ?

7.2. **Les modèles statiques.**

Trois modèles statiques d'Univers homogènes isotrope sont possibles :

*a) Le modèle statique d'*EINSTEIN *:*

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

avec $R^2 = 1/\Lambda = c^2/(4\pi G\varrho)$.

C'est un modèle d'Univers fermé dont le volume est donné par :

$$V = 2\pi^2 R^3.$$

Le « rayon » R de l'Univers et sa masse M sont donc liés par :

$$M = \varrho V = \pi c^2 R/2G \quad \text{soit :} \quad GM/Rc^2 = \pi/2.$$

b) Le modèle de DE SITTER *:*

Pour $\varrho = 0$, on obtient comme solution des équations du champ :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r^2}{R^2}} - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

avec $1/R^2 = \Lambda/3$.

En fait, ce modèle n'est pas vraiment statique (cf. § 5.3.).

c) Le modèle de MINKOWSKY *:*

Pour $\Lambda = 0$, on constate que les expressions précédentes se confondent dans l'expression commune :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

qui n'est autre que le ds^2 de MINKOWSKY en coordonnées sphériques. L'espace de MINKOWSKY correspond donc à un Univers vide ($\varrho = 0$).

Remarque sur la valeur numérique de Λ *:* si l'on assimile l'Univers observé au modèle statique d'EINSTEIN et que l'on prend $\varrho \simeq 10^{-30}$ g/cm^{-3}, la relation :

$$\Lambda = 4\pi G\varrho/c^2$$

donne :

$$\Lambda \sim 9 \cdot 10^{-54}\ m^{-2}.$$

On peut vérifier (cf. [3], p. 120) qu'une constante de cet ordre serait sans effet décelable sur le mouvement des planètes.

7.3. Les modèles non statiques.

a) La métrique de ROBERTSON :

Une discussion générale montre que pour un modèle d'Univers homogène isotrope, le ds^2 se met sous la forme dite de ROBERTSON :

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - k\,r^2} + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2\right]$$

où k peut prendre trois valeurs (9) :

$$k = \begin{cases} -1 \text{ modèle hyperbolique} \\ \;\;0 \text{ modèle euclidien} \\ +1 \text{ modèle elliptique} \end{cases} \quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{modèles ouverts (volume infini)} \\ \text{modèle fermé} \end{matrix}$$

On peut encore écrire le ds^2 de ROBERTSON sous la forme :

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - \frac{R^2(t)}{1 + k\varrho^2/4}\left[d\varrho^2 + \varrho^2\,d\vartheta^2 + \varrho^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2\right]$$

avec :

$$r = \varrho/[1 + k\varrho^2/4].$$

Cette seconde expression correspond à des coordonnées isotropes (cf. § 5.3.). Attention : $R(t)$ a les dimensions d'une longueur, r et ϱ sont sans dimension. La signification de ce ds^2 est clair : il s'agit d'un espace en expansion avec une constante de HUBBLE : $H = \dot{R}/R$ accessible à la mesure.

b) Les équations des cosmologies :

A partir du ds^2 de ROBERTSON, on forme le tenseur de RICCI et on reporte ces expressions dans les équations du champ [§ 4, équations (11)] écrites pour un modèle homogène isotrope (p, ϱ). On obtient ainsi les équations des cosmologies :

$$\begin{cases} \dfrac{8\pi G}{c^4}\,p = -\dfrac{-k}{R^2} - \dfrac{\dot{R}^2}{c^2R^2} - \dfrac{2\,\ddot{R}}{c^2R} + \Lambda \\[2ex] \dfrac{8\pi G}{c^4}\,\dfrac{c^2\varrho}{3} = \dfrac{k}{R^2} + \dfrac{\dot{R}^2}{c^2R^2} - \dfrac{\Lambda}{3} \end{cases}$$

avec : $\dot{R} = dR/dt$ et $\ddot{R} = d^2R/dt^2$.

---

(9) On peut être surpris que k ne puisse prendre que trois valeurs. En fait, on peut physiquement considérer les trois possibilités $k < 0$, $k = 0$ et $k > 0$; par changement d'unité sur R, il est évident que l'on peut se ramener à $k = -1$, $k = 0$ ou $k = +1$.

Pour relier les différentes grandeurs R, p, ϱ, il manque donc une équation : l'équation d'état liant p et ϱ. Pour la matière seule (sans rayonnement), on prend généralement $p = 0$. On montre facilement qu'alors $\varrho R^3 =$ cte.

c) Les modèles de FRIEDMANN *:*

Ce sont des solutions des équations des cosmologies pour $p = 0$ et $\Lambda = 0$. Il y a trois possibilités suivant les valeurs de k :

— pour $k = 0$ (modèle euclidien) :

$$R(t) = (6\pi GA)^{1/3} t^{2/3} \qquad \text{avec} \qquad A = \varrho R^3$$

$$H = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\varrho}{3}} \Longleftrightarrow \varrho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

ce qui permet de relier simplement l'âge t de l'Univers (compté à partir du début de l'expansion) à la « constante » de HUBBLE H :

$$H = 2/3t$$

— pour $k = -1$ et $k = +1$, on peut obtenir des solutions paramétrées :

$k = -1$	$k = +1$
$\begin{cases} R = a(ch\,\omega - 1) \\ ct = a(sh\,\omega - \omega) \end{cases}$	$\begin{cases} R = a(1 - \cos\omega) \\ ct = a(\omega - \sin\omega) \end{cases}$
modèle hyperbolique (ouvert)	modèle elliptique (fermé)

avec : $a = \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi R^3 \varrho G}{c^2}$

Dans les deux cas ($k = -1$ et $k = +1$), on obtient pour ω petit (donc t petit) :

$$R \approx (G\pi R^3 \varrho G)^{1/3} t^{2/3}$$

comme dans le modèle euclidien ($k = 0$).

d) Le test de la densité ; le paramètre de décélération :

Sont accessibles à la mesure la « constante de HUBBLE » $H = \dot{R}/R$ et la densité volumique moyenne de matière ϱ, cette dernière grandeur étant entachée d'une grande imprécision.

Dans le cas des modèles de FRIEDMANN ($p = 0$, $\Lambda = 0$), les équations des cosmologies s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{-k}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{2\ddot{R}}{c^2 R} \\ \frac{8\pi G}{c^4}\,\frac{c^2 \varrho}{3} &= \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2}. \end{aligned}\right.$$

La seconde équation s'écrit :

$$\frac{c^2 k}{R^2} = \left\{\frac{8\pi G}{3}\,\varrho - H^2\right\} \qquad \text{avec} \qquad H = \dot{R}/R$$

de sorte qu'une détermination expérimentale précise de H et ϱ permettrait de déterminer le signe de k, donc le type de modèle (elliptique, euclidien, hyperbolique).

Une autre façon d'étudier le problème consiste à introduire le paramètre de décélération q. Un calcul simple à partir de $H = \dot{R}/R$ donne :

$$dH/dt = -H^2\,(1 - R\ddot{R}/R^2) \qquad \text{soit} \qquad dH/dt = -H^2\,(1 + q)$$

avec :

$$q = -R\ddot{R}/\dot{R}^2 = -\ddot{R}/RH^2$$

où q est, par définition, le paramètre de décélération.

La première équation des cosmologies donne alors :

$$c^2 k/R^2 = H^2\,(2q - 1).$$

La détermination expérimentale de q par rapport à la valeur 1/2 permettrait également de détermner le signe de k, donc le type de modèle.

De nombreux tests expérimentaux sont décrits dans [7], chap. 9.

8. CONCLUSION.

Ce rapide survol ne peut donner qu'une image infidèle et très incomplète de la variété de problèmes abordés par la relativité générale. Pour corriger un peu cette impression, indiquons en quelques lignes les grandes étapes du développement de cette théorie.

Dans un premier temps de son histoire, la relativité générale s'est appliquée à reformuler une théorie de la gravitation destinée à remplacer celle de NEWTON. Ce but fut pratiquement atteint par EINSTEIN en 1915 ; une première discussion du problème cosmologique a suivi presque aussitôt (cf. [2]). Mais, en même temps, les recherches se sont orientées sur une nouvelle voie qui semblait s'ouvrir tout naturellement : une tentative d'unification des interactions dans un cadre « géométrique ». A l'époque — vers 1920 — seules l'interaction électromagnétique et l'interaction gravitationnelle étaient connues, et cette tentative pouvait paraître prometteuse. Cependant de nombreux efforts, auxquels EINSTEIN a contribué jusqu'à la fin de sa vie, n'ont pas permis d'aboutir à des résultats concluants. Cette orientation a sans doute contribué à donner, de la relativité générale, l'image d'une théorie abstraite assez éloignée des applications physiques.

Vers les années 1930, la découverte expérimentale de l'expansion de l'Univers a relancé l'intérêt de l'étude des modèles cosmologiques. Pour caractériser la suite de l'évolution de la relativité générale, on peut citer la préface de la seconde édition de l'ouvrage de MÖLLER (cf. [5]) :

« ... En 1952, la théorie de la relativité était généralement considérée comme un sujet clos qui n'offrait plus de problème neuf et intéressant, et le nombre de physiciens qui y travaillaient était assez restreint. Cependant, le développement (les années suivantes) a profondément modifié cette situation. En premier lieu, des investigations détaillées (...) ont permis de mieux saisir la structure mathématique et le contenu physique de la théorie. Secondement, le développement considérable des techniques expérimentales et la collaboration des astrophysiciens ont ouvert la possibilité d'applications nouvelles et intéressantes. »

On ne peut citer que rapidement les phénomènes auxquels MÖLLER fait allusion ; le rayonnement gravitationnel, l'identification des trous noirs constituent des sujets encore discutés, mais la position de la relativité générale a changé ; si des tests expérimentaux de plus en plus précis sont encore mis au point, la relativité générale est en passe de devenir un outil de recherche pour l'astrophysique.

Jacques RENAULT,
(*Lycée du Parc - Lyon*).

BIBLIOGRAPHIE

En français.

[1] D.-W. SCIAMA. — *Les bases physiques de la Relativité générale* (Dunod). Ouvrage d'introduction aux idées de la Relativité générale sans aucun calcul. On y trouve les résultats numériques très détaillés des principaux tests de la théorie.

[2] A. EINSTEIN. — *Quatre conférences sur la théorie de la Relativité* (Gauthier-Villars). Rédigées en 1921, ces quatre conférences ont été consacrées à la Relativité générale. En 96 pages, on obtient une vue d'ensemble de la théorie qui, si elle date un peu, reste cependant d'une clarté exceptionnelle. Les notions de base du calçul tensoriel sont indiquées.

[3] H. ANDRILLAT. — *Introduction à l'étude des cosmologies* (A. Colin). Comme son titre l'indique, cet ouvrage est essentiellement consacré à l'étude des cosmologies ; l'ouvrage s'ouvre par une soixantaine de pages d'introduction au calcul tensoriel et à la Relativité générale. L'auteur y fait preuve d'un grand talent de pédagogue, et n'hésite pas à donner toutes les étapes des calculs délicats.

[4] LANDAU et E. LIFCHITZ. — *Théorie des champs* (Moscou). Les deux cents dernières pages de ce livre donnent un exposé dense de la Relativité générale et de quelques-uns de ses développements. L'étendue des sujets couverts est importante, mais l'exposé est souvent très difficile à suivre. Malgré tout, il s'agit sans doute de l'ouvrage de référence le plus courant en français.

En anglais.

[5] C. MÖLLER. — *The theory of relativity,* Oxford University Press (2nde édition, 1972). Un grand classique ; tous les sujets exposés sont examinés avec un grand souci du détail. L'ensemble reste cependant très théorique et un seul chapitre (le dernier) est consacré aux applications.

[6] ADLER, BAZIN et SCHIEFFER. — *Introduction to General Relativity.* Mac Graw Hill (2nde édition, 1975). L'ouvrage est d'un niveau assez élevé tout en restant clair grâce aux efforts des auteurs pour donner les étapes des calculs. Un tel souci didactique est remarquable sur un tel sujet.

[7] J.-V. NARLIKAR. — *General Relativity and Cosmology,* Mac Millan Press, 1979. Ce livre possède les qualités de clarté du précédent et est davantage tourné vers les applications de la Relativité générale à l'astrophysique.