

## Les diagrammes énergie - quantité de mouvement en Relativité restreinte \*

Ce court exposé se propose de montrer comment l'utilisation des diagrammes représentant l'énergie  $E$  d'une particule en fonction de sa quantité de mouvement  $p$ , permet une approche qualitative des conséquences de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totales (effet Compton, rayonnement de freinage, rayonnement Čerenkov, création de paires...). Cette approche, dans les cas les plus simples, me paraît pouvoir être proposée, sous forme d'exercices par exemple, dans une classe de Terminale. Elle pourrait être utile également aux collègues enseignant en classe de Mathématiques spéciales.

### I. LE DIAGRAMME $E(p)$ .

La fig. 1 représente la fonction :

$$E(p) = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} \quad (1)$$

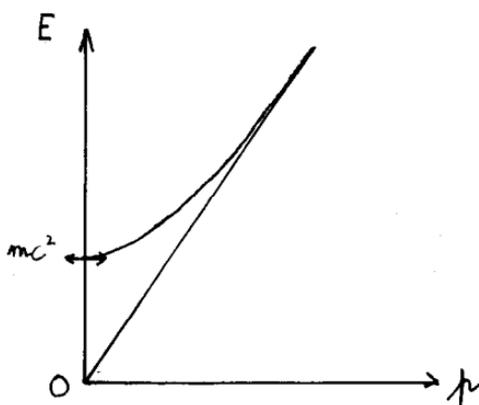


Fig. 1

où  $p = \|\vec{p}\|$  est le module de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  de la particule. Il s'agit d'une branche d'hyperbole dont l'asymptote a pour équation :

$$E(p) = pc. \quad (2)$$

(\*) Exposé présenté aux Journées U.d.P. de Rennes le 2 novembre 1980.

Cette asymptote correspond au cas d'une particule de masse nulle (le photon, par exemple) et, pour la particule massive considérée, au domaine *ultrarelativiste* ( $E \approx pc$ , pour lequel on néglige l'énergie de masse).

L'énergie cinétique  $E_c$  de la particule est :

$$E_c = E - m c^2. \quad (3)$$

La fig. 2 donne la représentation graphique de  $E_c(p)$ ; la courbe est obtenue à partir de la précédente par la translation de  $-m c^2$  parallèlement à l'axe des ordonnées.

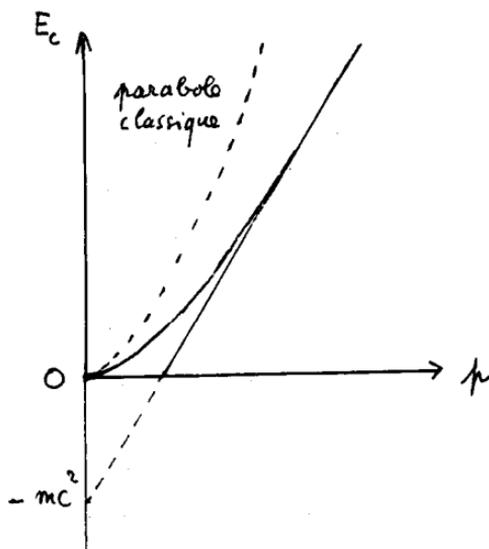


Fig. 2

La courbe en pointillés (fig. 2) correspond à la parabole classique, soit :

$$E_c = \frac{p^2}{2m}. \quad (4)$$

La dérivée  $\frac{dE}{dp} = \frac{dE_c}{dp}$  a pour valeur la vitesse  $v$  de la particule :

$$\frac{dE}{dp} = \frac{dE_c}{dp} = \frac{pc^2}{(m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}} = \frac{pc^2}{E} = v. \quad (5)$$

La pente en un point est donc égale à  $v$  et tend asymptotiquement vers la limite  $c$ .

Pour la particule classique, la même propriété se vérifie de manière évidente :

$$\frac{dE_c}{dp} = \frac{p}{m} = v. \quad (6)$$

Dans ce cas, comme on doit s'y attendre, aucune limite n'existe puisque la pente de la tangente à la parabole tend vers l'infini lorsque  $p$  croît indéfiniment.

Pour une même valeur de  $p$ , c'est évidemment la vitesse de la particule classique qui est la plus grande.

### Remarques.

1) Lorsque la masse  $m$  augmente, il est aisé de voir que les courbes  $E(p)$  et  $E_c(p)$  s'aplatissent au voisinage de l'origine. Dans ce domaine, la particule (sous l'effet d'un choc par exemple) voit varier sa quantité de mouvement  $p$  alors que son énergie ne varie que très peu : la particule lourde « encaisse » de la quantité de mouvement. C'est une propriété bien connue (voir [1]); nous en verrons plus loin une application à propos du rayonnement de freinage.

2) Comparons les quantités de mouvement d'un photon d'énergie  $E$  et d'une particule (de masse  $m$ ) d'énergie cinétique  $E_c = E$ . Sur la fig. 3, on note que pour une vitesse  $v$  suffisamment faible

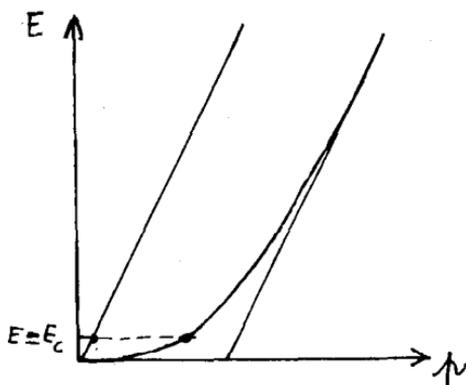


Fig. 3

de la particule, la quantité de mouvement du photon est négligeable devant celle de la particule. Un calcul immédiat montre

d'ailleurs que pour  $E = E_c$  :

$$\frac{p_{\text{photon}}}{p_{\text{part.}}} = \frac{v}{2c} \ll 1.$$

L'inégalité subsiste même si  $E_c$  est nettement inférieure à  $E$  (sauf évidemment pour  $E_c \approx 0$ ).

Ainsi dans le cas de l'effet photoélectrique, l'électron extrait du métal a une énergie cinétique comparable à celle du photon incident ( $E_c = E - W_0$ ). La quantité de mouvement du photon est ainsi pratiquement toujours négligeable devant celle de l'électron extrait. C'est donc nécessairement que le réseau métallique encaisse une quantité de mouvement peu différente (en module) de celle de l'électron (en fait, légèrement supérieure) (fig. 4).

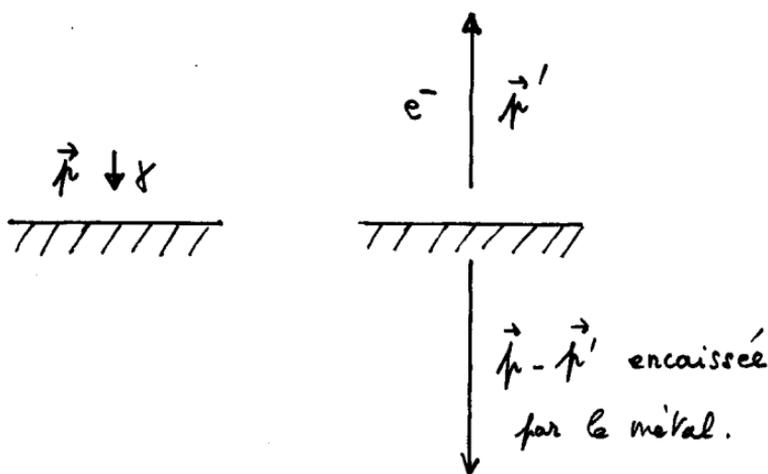


Fig. 4

## II. EFFET COMPTON.

Rappelons que l'effet Compton consiste dans le fait qu'un électron atomique (supposé pratiquement libre) absorbe un photon  $\gamma_1$  et réémet un photon  $\gamma_2$  d'énergie moindre. La différence d'énergie des photons se retrouve sous forme d'une augmentation de l'énergie cinétique de l'électron :

$$\gamma_1 + e^- \rightarrow \gamma_2 + e^- \quad [E(\gamma_2) < E(\gamma_1)].$$

Pour simplifier, considérons le cas unidimensionnel, les particules ayant avant et après l'interaction, des vitesses parallèles à l'axe  $Ox$ . Représentons le diagramme  $E(p_x)$ ,  $p_x$  pouvant être positif ou négatif selon le sens du mouvement des particules.

$$\text{On a :} \quad E = (m^2 c^4 + p_x^2 c^2)^{1/2}$$

d'où le diagramme de la fig. 5.

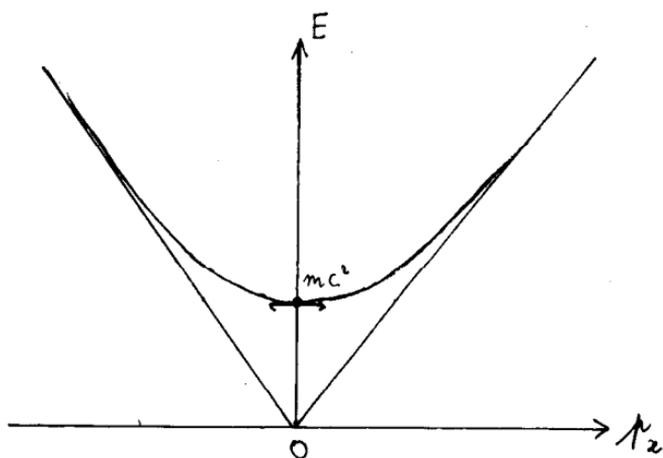


Fig. 5

Supposons l'électron pratiquement au repos avant l'interaction (point représentatif  $A_1$  de la fig. 6). Si ce photon incident a

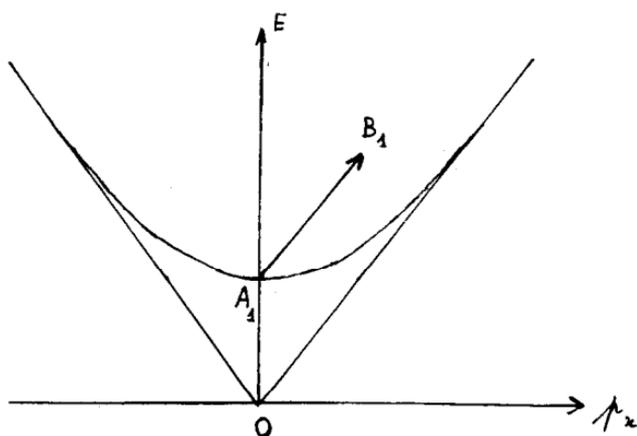


Fig. 6

l'énergie  $E$  et la quantité de mouvement  $p_x$  ( $p_x > 0$ , par exemple),

le point  $B_1$  tel que  $\overrightarrow{A_1 B_1}$  ( $p_x, E$ ) ( $\overrightarrow{A_1 B_1}$  est parallèle à l'asymptote :  $E = c p_x$ ) a pour abscisse  $p_x$  et pour ordonnée  $E + m c^2$  c'est-à-dire la quantité de mouvement et d'énergie du système  $\gamma_1 + e^-$ . La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du système  $e^- + \gamma$  supposé pratiquement isolé (on néglige l'interaction de l'électron atomique avec le noyau, ce qui est légi-

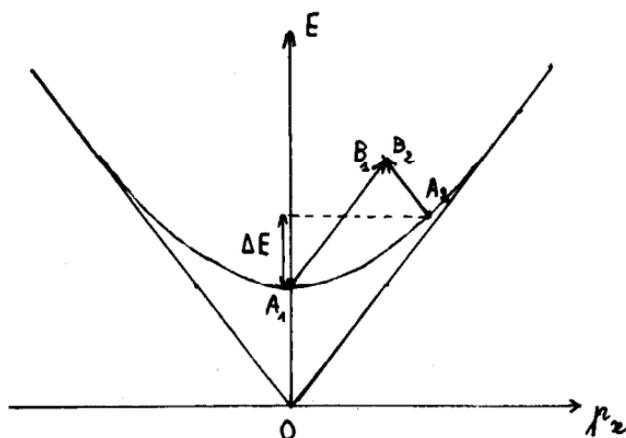


Fig. 7 a. — Effet Compton : retrodiffusion ( $\phi = \pi$ ),  
 $\Delta E$  : transfert d'énergie à l'électron.

time pour un électron peu lié) implique que le point représentatif  $B_2$  du système  $\gamma_2 + e^-$  coïncide avec  $B_1$ . Deux cas sont, *a priori*, possibles :

- le photon émis  $\gamma_2$  se dirige suivant  $Ox < 0$  (rétrodiffusion) ; ce cas est représenté sur la fig. 7 a. Le point  $A_2$  représente l'état final de l'électron. On lit directement sur la figure les transferts d'énergie et de quantité de mouvement ( $\overrightarrow{A_2 B_2} //$  à l'asymptote  $E = -c p_x$ ) ;

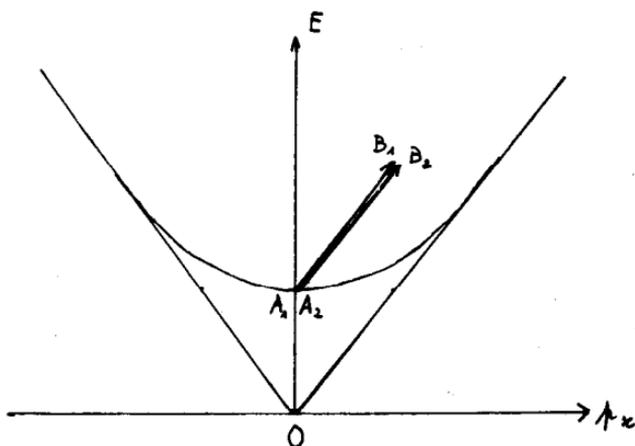


Fig. 7 b. — Effet Compton :  $\phi = 0$ . Aucun transfert.

— le photon émis  $\gamma_2$  se dirige suivant  $Ox > 0$  (même sens que le photon incident);  $A_2$  est nécessairement confondu avec  $A_1$ : il ne peut y avoir dans ce cas aucun transfert d'énergie et de quantité de mouvement (fig. 7 b).

Une telle présentation qualitative peut être faite, à notre avis, au niveau d'une classe de Terminale.

On peut traiter de manière analogue le cas où l'électron n'est pas initialement au repos (fig. 8 a, b). En particulier, dans le référentiel du centre des masses il y a simple échange de quantité de mouvement entre l'électron et le photon et aucun transfert d'énergie.

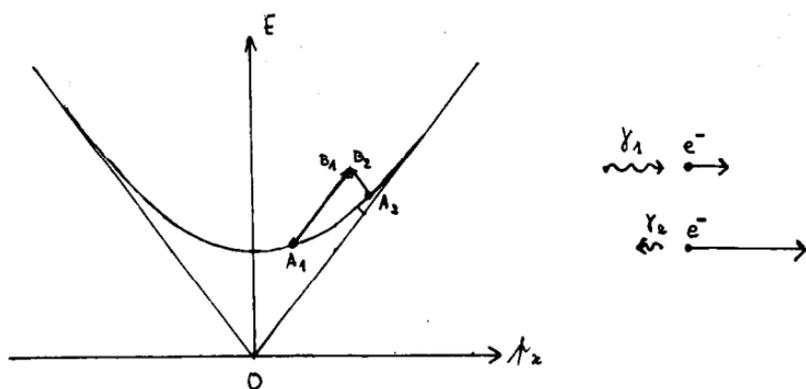


Fig. 8 a. — Effet Compton : électron initialement non au repos.

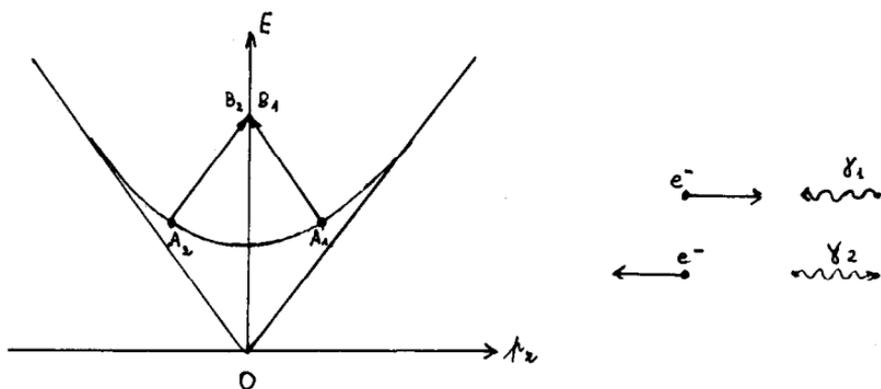


Fig. 8 b. — Effet Compton : dans le référentiel du centre des masses, il y a simplement échange des quantités de mouvement entre l'électron et le photon et aucun transfert d'énergie.

**Remarque.**

Si on veut généraliser au cas général non unidimensionnel, il faut introduire les composantes  $p_x$  et  $p_y$  de  $\vec{p}$  (interaction coplanaire). La courbe  $E(p_x)$  relative à l'électron engendre un hyperboloïde de révolution. Le vecteur  $\vec{AB}$  relatif au photon  $\gamma_2$  engendre une nappe conique dont les vecteurs  $\vec{A_1B_1}$  et  $\vec{A_2B_2}$  introduits plus haut sont des génératrices particulières (on suppose la quantité de mouvement du photon incident parallèle à  $Ox$ ). Cette nappe conique intersecte l'hyperboloïde de révolution relatif à l'électron selon une courbe fermée et il est facile de constater que le transfert d'énergie maximal correspond à la rétrodiffusion ( $\vec{A_2B_2}$ ) (fig. 9).

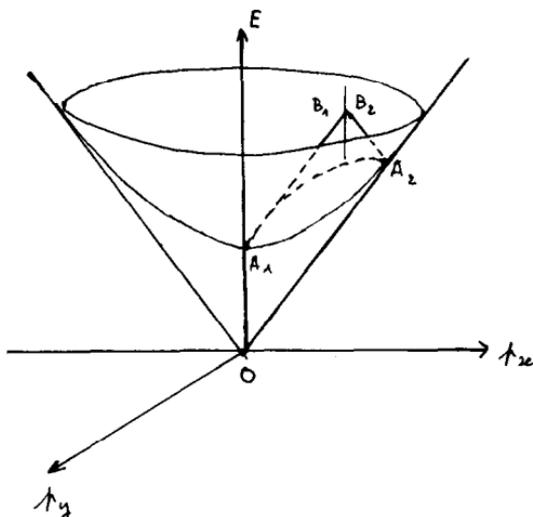


Fig. 9. — Effet Compton : le photon diffusé  $\gamma_2$  est émis dans une direction quelconque. Le vecteur  $\vec{AB}$  correspondant engendre une nappe conique de révolution autour de l'axe parallèle à  $OE$  passant par  $B_1$ . ( $A_1B_1$  est dans le plan  $O p_x E$ ). Les points  $A$  décrivant l'état final de l'électron sont sur la courbe fermée, intersection de la nappe conique avec l'hyperboloïde de révolution.

**III. RAYONNEMENT D'UN ELECTRON.**

1) La théorie électromagnétique classique indique, que pour qu'un électron (ou plus généralement une particule chargée) rayonne, il est nécessaire que son mouvement ait une accélération  $\vec{a}$ . On sait, par exemple, que les protons accélérés dans un synchrotron suivant une trajectoire moyenne circulaire émettent

un rayonnement (rayonnement synchrotron). Le rayonnement d'une antenne a pour origine le mouvement accéléré des électrons dans l'antenne (mouvement sinusoïdal, par exemple). Un électron passant au voisinage d'un atome peut être freiné par suite de son interaction électromagnétique avec l'atome; cette décélération est accompagnée de l'émission d'un rayonnement, appelé rayonnement de freinage ou *bremsstrahlung*. Par contre, un électron (ou plus généralement une particule chargée) en mouvement rectiligne et uniforme (électron libre) ne peut émettre ou absorber aucun rayonnement. Le processus :



est impossible. Il est facile de montrer à l'aide de diagrammes  $E(\vec{p})$  que de tels processus ne conservent pas l'énergie et la quantité de mouvement, le cône représentatif du transfert d'énergie et de quantité de mouvement du photon ne pouvant recouper l'hyperboloïde (fig. 10). Il faut nécessairement la réémission d'un

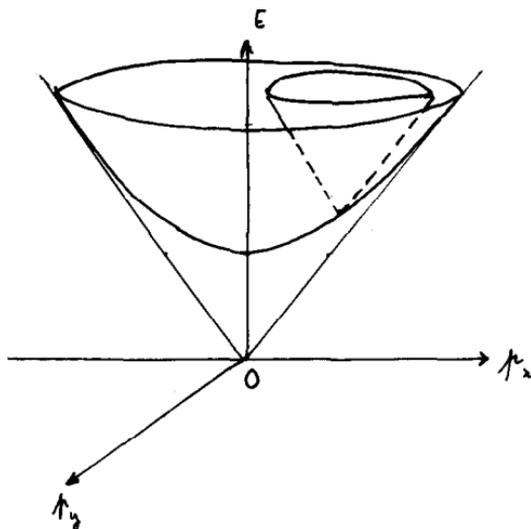


Fig. 10

photon (effet Compton). De même, l'émission ou l'absorption de deux ou plusieurs photons par un électron libre sont impossibles pour les mêmes raisons (fig. 11).

1) RAYONNEMENT DE FREINAGE. Comme il vient d'être dit, l'interaction d'un électron avec un atome  $A_0$  peut freiner l'électron, celui-ci émettant un rayonnement électromagnétique. Le noyau, très massif par rapport à l'électron encaisse de la quantité de

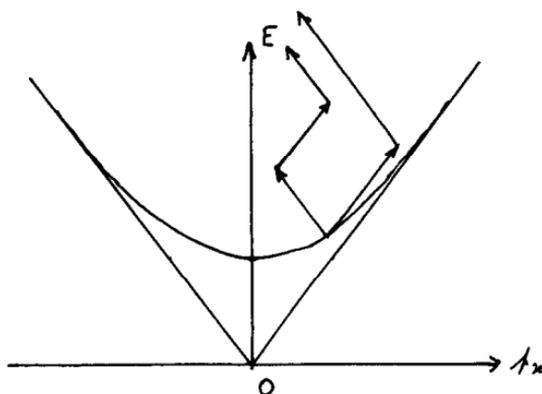


Fig. 11. — Impossibilité de l'émission ou de l'absorption de plusieurs photons par un électron libre (cas unidimensionnel).

mouvement sans que pratiquement son énergie cinétique varie. La fig. 12 schématise l'échange d'énergie et de quantité de mouvement dans le cas unidimensionnel. Le processus décrit est :

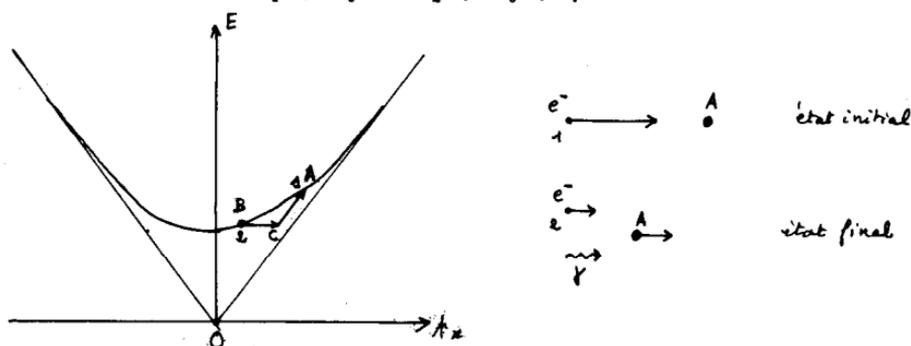
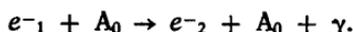


Fig. 12. — Rayonnement de freinage (unidimensionnel).

Le point A représente l'état initial ( $E, p_x$ ) de l'électron incident, le point B l'état de l'électron après freinage. Le vecteur  $\overrightarrow{BC}$  ( $\Delta p, 0$ ) représente le transfert de quantité de mouvement au noyau et  $\overrightarrow{CA}$  ( $p_{ph}, E$ ) la quantité de mouvement  $p_{ph}$  et l'énergie  $E$  du photon émis.

3) RAYONNEMENT CERENKOV. Lorsqu'une particule chargée se déplace dans un milieu d'indice  $n$  avec une vitesse  $v > \frac{c}{n}$  (c'est-

à-dire supérieure à la vitesse de la lumière dans le milieu), l'interaction électromagnétique de la particule avec le milieu se traduit par un rayonnement électromagnétique appelé « rayonnement Čerenkov ».

Il est tentant d'attribuer à un photon se propageant dans un milieu transparent d'indice  $n$  la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \frac{E}{c/n} \vec{u} = \frac{nE}{c} \vec{u} \quad (7)$$

Mais la signification physique d'une telle expression n'est pas immédiatement évidente. Pour un tel « photon », on aurait :

$$E^2 - p^2 c^2 = E^2(1 - n^2) < 0!$$

ce qui montre bien le caractère fictif de ce « photon ».

Nous admettrons que ce photon fictif, noté  $\tilde{\gamma}$ , permet de prendre en compte *ipso facto* l'échange de quantité de mouvement et d'énergie avec le milieu comme s'il s'agissait de particules libres (les propriétés du milieu étant en fait contenues dans  $n$ ).

Le processus de Čerenkov peut ainsi, du point de vue bilan de quantité de mouvement et d'énergie, être représenté en supposant que la particule émettrice est un électron libre, soit :

$$e_1 \rightarrow e_2 + \tilde{\gamma}.$$

La fig. 13 a, b) permet de comprendre la condition  $v > \frac{c}{n}$

imposée par la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie pour que le rayonnement Čerenkov puisse se produire. La nappe conique (représentant l'échange dû au photon) est

engendrée par des droites de pente  $\frac{c}{n}$ , c'est-à-dire plus faible que dans le cas du vide. Cette nappe ne peut recouper l'hyper-

boloïde relatif à l'électron que si  $\frac{c}{n}$  est inférieur à la pente

en  $M_0$  de la tangente à l'hyperbole méridienne  $E(p)$ , soit  $v$  (voir § I).

On notera que l'intersection est nécessairement en dehors du plan défini par OE et  $M_0$ . Le calcul montre que les photons sont émis sur un cône d'angle de demi-ouverture  $\theta$  tel que

$\cos \theta \simeq \frac{c}{nv}$ , l'énergie des photons rayonnés étant faible devant l'énergie de l'électron émetteur.

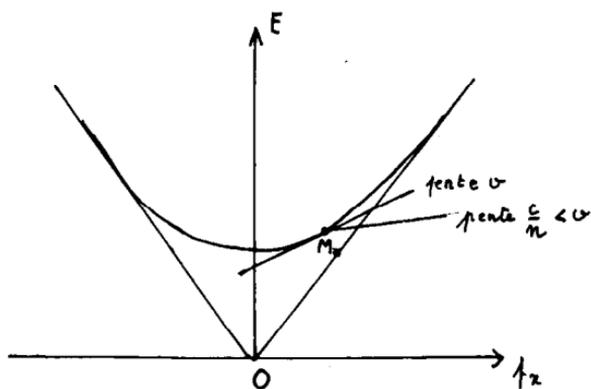


Fig. 13 a.

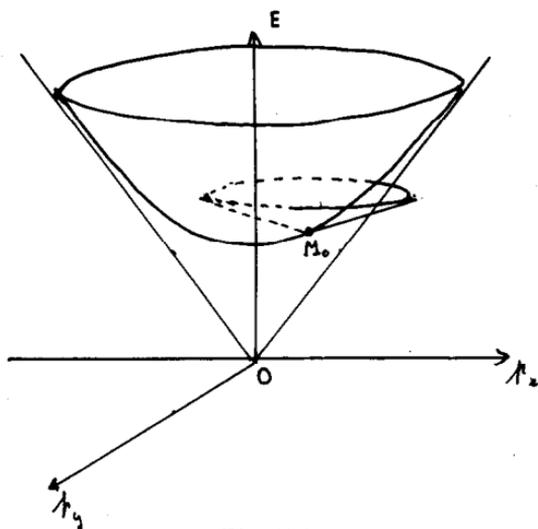


Fig. 13 b.

b) DÉMATÉRIALISATION ET MATÉRIALISATION. Dans les processus de ce type, il y a transformation de masse en énergie rayonnante et réciproquement. Examinons quelques cas :

- Un processus du type :  $a \rightleftharpoons \gamma$  (où  $a$  est une particule massive neutre) est impossible puisque la droite relative au photon  $\gamma$  est asymptote de l'hyperbole relative à la particule  $a$ .

- Par contre, un processus du type :  $a \rightleftharpoons \gamma_1 + \gamma_2$  est possible du point de vue de la conservation de l'énergie et de la

quantité de mouvement. La fig. 14 donne une représentation dans le cas unidimensionnel :  $\vec{OA}$  est relatif au photon  $\gamma_1$  et  $\vec{AB}$  au

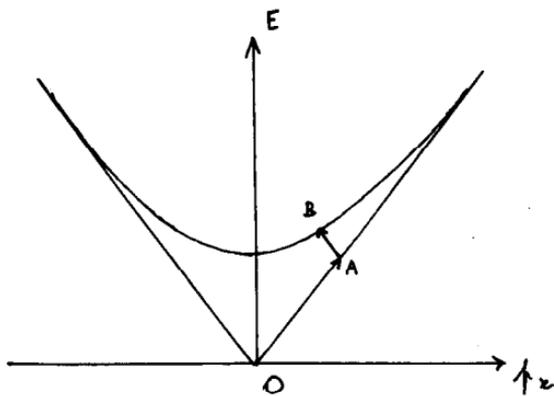


Fig. 14

photon  $\gamma_2$ . On notera que les deux photons ont nécessairement des directions de propagation opposées, quel que soit le mouvement de la particule  $a$  (point B). La généralisation au cas non unidimensionnel est immédiate : les deux photons sont nécessairement des directions de propagation différentes. Exemple : la désintégration du pion neutre selon le mode :  $\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ .

● **MATÉRIALISATION ET DÉMATÉRIALISATION DE PAIRES.** Il s'agit, par exemple, du processus :

$$e^+ + e^- \rightleftharpoons \text{photons.}$$

Pour comptabiliser l'énergie et la quantité de mouvement échangées, il est commode, par exemple, d'écrire :

$$e^- \rightleftharpoons \text{photon} - e^+.$$

Cela revient, pour le positron  $e^+$  à considérer le diaphragme symétrique par rapport à l'origine O ( $E \rightarrow -E$ ,  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ ) (fig. 15).

Un processus à un seul photon est impossible, le cône de sommet  $M_0$  ne pouvant recouper l'hyperboloïde relatif à l'électron  $e^-$  (fig. 16). (Le cas unidimensionnel est immédiat).

Par contre :  $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma_1 + \gamma_2$  est possible. Les deux photons ont nécessairement des directions de propagation différentes (opposées dans le cas unidimensionnel, fig. 17).

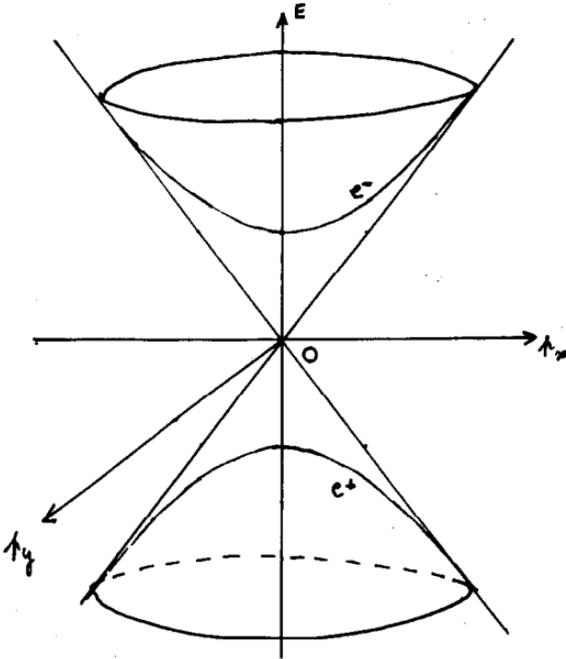


Fig. 15

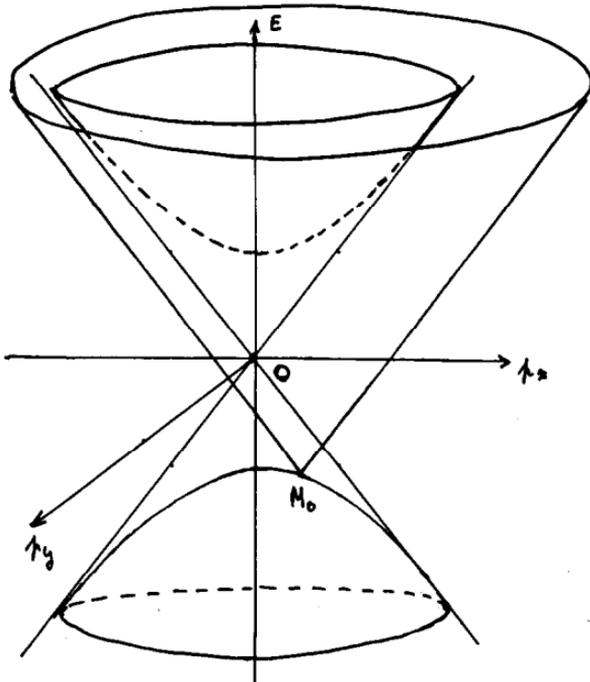


Fig. 16

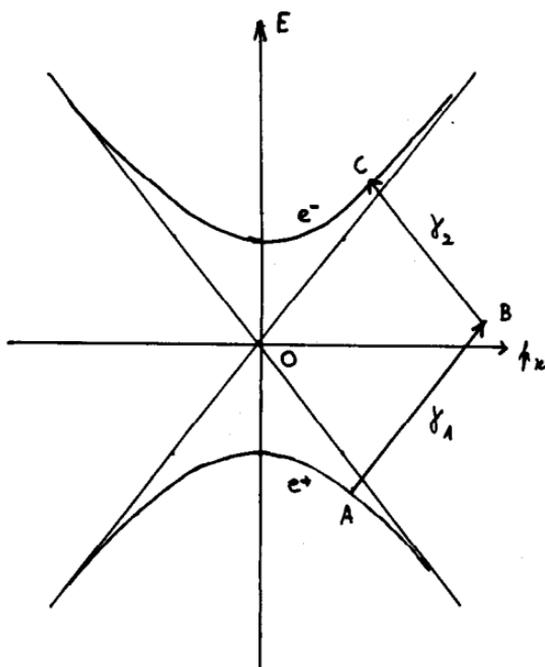


Fig. 17

- La désintégration du muon selon le mode :

$$\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu} \quad (m_\mu \approx 200 m_e)$$

se traite de manière analogue. La fig. 18 est relative au cas unidimensionnel : le neutrino  $\nu$  et l'antineutrino  $\bar{\nu}$  sont émis dans des directions opposées. Dans le cas plus général,  $\nu$  et  $\bar{\nu}$  sont nécessairement émis dans des directions différentes.

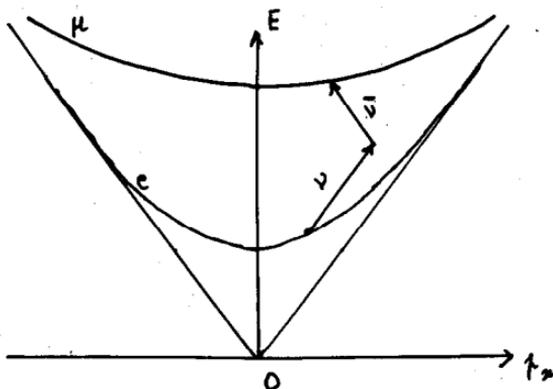


Fig. 18. — Cas unidimensionnel :  $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$ .  
(Le rapport des masses de  $e$  et  $\mu$  n'est pas respecté sur la figure).

Les quelques exemples précédents montrent l'intérêt de l'approche graphique par les diagrammes  $E(\vec{p})$  pour exprimer les conséquences de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'il ne s'agit que de conditions nécessaires. D'autres lois de conservation peuvent évidemment interdire tel processus respectant la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

H. GIÉ (*Paris*).

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. GUINIER. — *Photons et quantité de mouvement*. B.U.P. n° 612, mars 1979.