

Oscillateurs électriques : Simulation d'un frottement sec

Cet article se propose d'étendre à des phénomènes non linéaires (frottements secs en Mécanique, amortissement par diodes ou transistors en Electricité) les analogies électromécaniques bien connues dans le domaine linéaire.

Il ne se veut surtout pas une dissertation théorique sur le sujet, mais plutôt une invitation à réaliser de belles expériences, faciles à mettre en œuvre.

Peut-être pourra-t-on également y trouver une justification à l'association de dipôles non linéaires, que l'on étudie en classe de Seconde.

En mécanique, un oscillateur est amorti quand son élongation satisfait à l'équation :

$$m\ddot{x} = -kx - \varepsilon(v),$$

où v est la vitesse de l'oscillateur, tandis que $\varepsilon(v)$ est une force de frottement qui dépend de la vitesse.

Si $\varepsilon(v) = av$, autrement dit, si la grandeur de cette force de frottement est proportionnelle à la vitesse, l'amortissement est dit visqueux. Si l'oscillateur, après avoir excité, évolue librement, on sait qu'en présence d'un frottement visqueux, l'enveloppe des oscillations est un couple de deux exponentielles décroissantes (fig. 1).

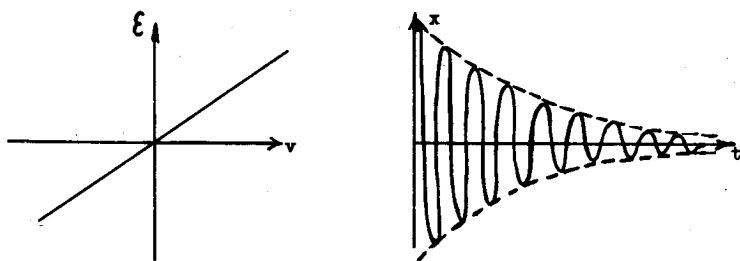


Fig. 1

Si $\varepsilon(v) = F \cdot (\text{signe de } v)$, autrement dit, si la force de frottement ne dépend que du signe de v , ne changeant de signe que lorsque celle-ci s'inverse, le frottement est dit « sec ».

Un oscillateur mécanique, soumis à un frottement sec et préalablement excité, revient à l'équilibre en effectuant des oscillations dont les amplitudes décroissent en progression arithmétique de raison $-4 F/k$ (fig. 2).

Ce résultat est peut-être moins connu que le précédent (ceci parce que nous privilégions certainement trop ce qui est linéaire), aussi allons-nous en esquisser la démonstration.

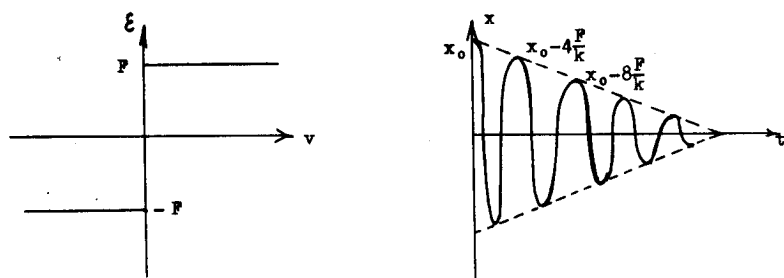


Fig. 2

Supposons l'oscillateur lâché, sans vitesse initiale, à partir d'une élongation initiale x_0 , positive, telle que $x_0 > \frac{F}{k}$.

Le mouvement que prend l'oscillateur est alors tel que sa vitesse est négative, si bien que pendant cette première phase, il est régi par l'équation :

$$m \ddot{x} = -kx + F; \quad \text{soit} \quad m \ddot{x} = -k \left(x - \frac{F}{k} \right).$$

En posant $X = \left(x - \frac{F}{k} \right)$, c'est-à-dire en effectuant un changement d'origine des élongations, on obtient : $m \ddot{X} = -kX$.

On voit donc que pendant tout le temps où la vitesse de l'oscillateur est négative, son mouvement est le même que celui d'un oscillateur *non amorti* qui aurait pour position d'équi-

libre : $x = \frac{F}{k}$.

La première phase se termine donc lorsque l'oscillateur atteint l'élongation : $x_1 = x_0 - 2 \frac{F}{k}$.

Elle est suivie d'une phase au cours de laquelle la vitesse est positive, et où l'équation du mouvement, est, par conséquent :

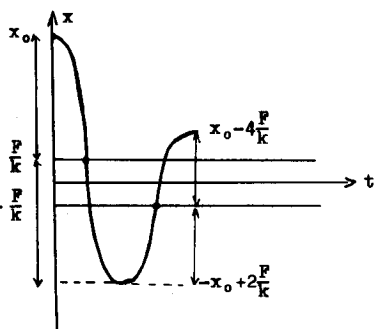
$$m \ddot{x} = -kx - F; \quad \text{soit} \quad m \ddot{x} = -k \left(x + \frac{F}{k} \right).$$

Lorsque la vitesse s'annule pour la deuxième fois, l'élongation de l'oscillateur vaut : $x_0 - 4 \frac{F}{k}$ (puisque la deuxième phase s'est effectuée autour de la position moyenne $x = -\frac{F}{k}$), et le processus recommence tant que les élongations des extremums sont supérieures (en valeur absolue), à $\frac{F}{k}$.

Remarque.

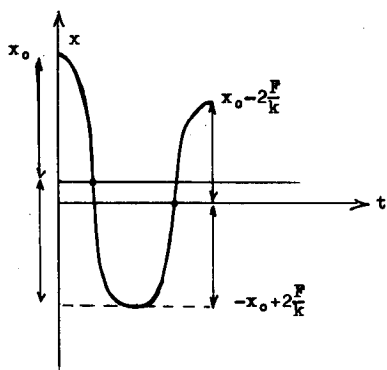
On peut parfaitement imaginer (et même réaliser), un oscillateur mécanique qui ne serait soumis à un frottement sec que pendant les phases où sa vitesse est négative (par exemple). Il suffit, pour cela, de pouvoir escamoter la pièce qui frotte lorsque l'oscillateur (un pendule, par exemple), a une vitesse positive.

Dans ce cas, ce n'est que pendant les phases de frottement que l'amplitude des oscillations serait réduite, et les élongations des extremums décroîtraient selon une progression arithmétique de raison $-2 F/k$ (fig. 3 b).



frottement sec bi-directionnel

Fig. 3 a.



frottement sec uni-directionnel

Fig. 3 b.

ANALOGIE ELECTROMECHANIQUE.

En électricité, un circuit oscillant série satisfait à l'équation :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{q}{C} - Ri.$$

La comparaison avec l'équation mécanique :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - av$$

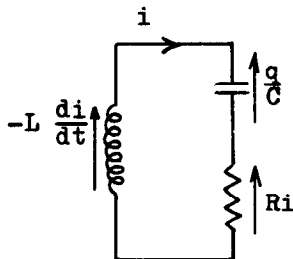


Fig. 4

fait apparaître l'analogie :

Electricité	Mécanique
charge	←————→ élongation
intensité	←————→ vitesse
tension	←————→ force

Dans cette analogie, la tension aux bornes du condensateur, $\frac{q}{C}$, correspond à la quantité kx , homogène à une force, mais aussi proportionnelle à l'élongation x .

La quantité Ri correspond, elle, à la force de frottement visqueux.

Si on veut réaliser l'analogie d'un frottement sec, la fig. 2 fait apparaître la nécessité de remplacer le dipôle linéaire de résistance R par un dipôle non linéaire de caractéristique $u = f(i)$ représenté sur la fig. 5 ci-après :

Si on y parvient, la tension aux bornes du condensateur, à chaque pseudo-période, décroîtra de la quantité $4 U_0$, correspon-

dant à $4 k \frac{F}{k} = 4 F$.

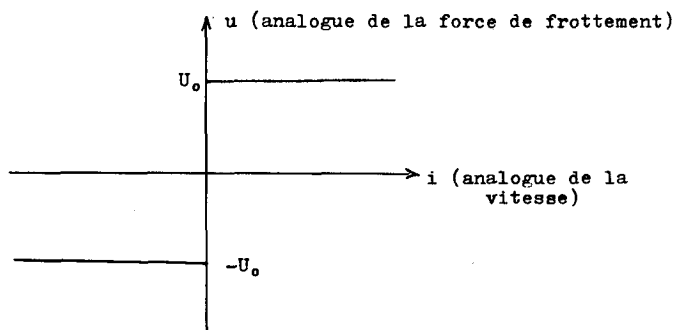


Fig. 5

Un ensemble de deux diodes Zener, placées en série (fig. 6), satisferait bien au problème, mais les tensions mises en œuvre seraient trop importantes pour les sources dont on dispose. (Pour obtenir 5 oscillations, il faudrait que l'amplitude initiale soit de l'ordre de 100 V).

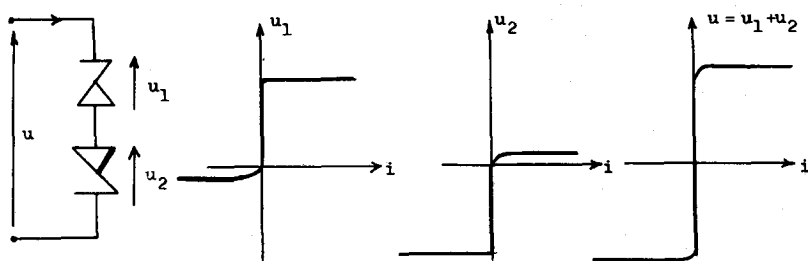


Fig. 6

Plus simplement, l'ensemble de deux diodes au silicium, ou, mieux, au germanium (diodes de signal OA 90, par exemple), placées « tête-bêche », permet, comme le montre la fig. 7, d'approcher la caractéristique souhaitée.

Le résultat est tout à fait satisfaisant.

L'oscillateur, constitué d'une bobine et d'un condensateur, doit, initialement, avoir peu de pertes ; or, la qualité d'une bobine dépend de sa fréquence d'utilisation, et donc de la capacité du condensateur qu'on lui associe.

Pour connaître la capacité qui donnera au circuit oscillant la meilleure qualité, le mieux est de tâtonner, et de compter,

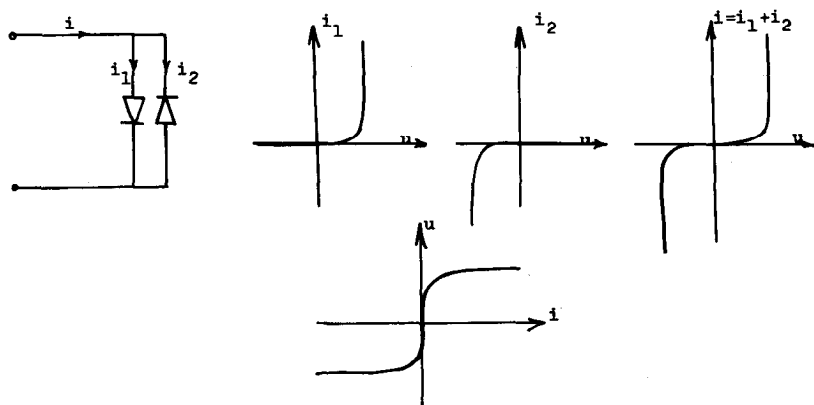


Fig. 7

pour chaque condensateur essayé, le nombre d'oscillations libres visibles du circuit oscillant. Pour une bobine MAE 1 000 spires, commune dans les laboratoires des lycées, on trouvera des valeurs de C proches de 2,2 nF ; pour une bobine moulée de 2,2 mH (marque C LO), il vaut mieux utiliser un condensateur de capacité voisine de 220 pF, etc.

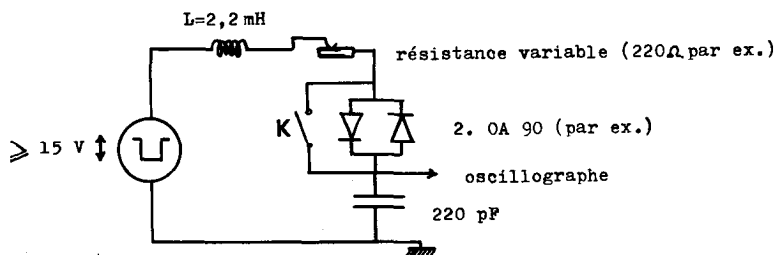
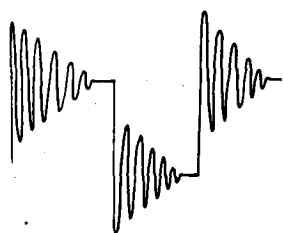


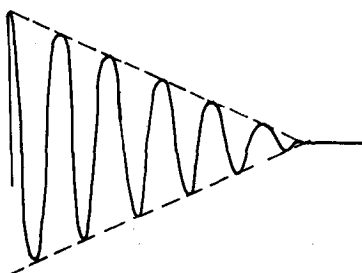
Fig. 8

En disposant les éléments comme sur le schéma de la fig. 8, on peut, en fermant l'interrupteur K , observer l'influence d'un « frottement visqueux » variable, symbolisé par le potentiomètre. Puis, ce potentiomètre étant mis en court-circuit, on observe, en ouvrant K , l'influence d'un amortissement d'un autre type (fig. 9). Si c'est à des élèves qu'on s'adresse, l'enregistrement de l'amortissement des oscillations d'un pendule par un frottement sec serait d'un grand intérêt, tout comme le tracé de la caractéristique du dipôle résultant de la mise en parallèle (fig. 7) de deux diodes.



signaux observés sur l'écran
de l'oscilloscope:

vitesse de balayage lente
amplification faible



vitesse de balayage plus rapide.
amplification supérieure

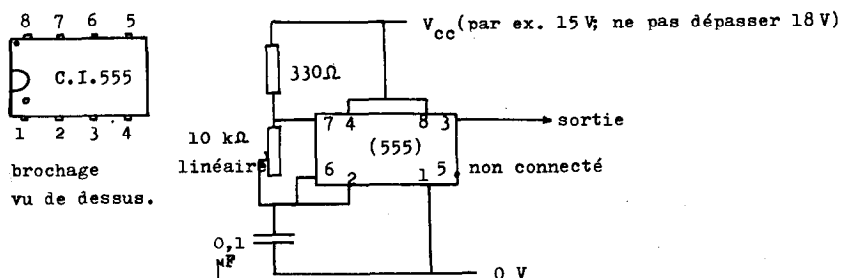
Fig. 9

Remarque.

Pour qu'une telle expérience soit réussie, nous avons signalé la nécessité de partir de signaux carrés de grande amplitude (15 ou 20 V), ainsi que celle qui consiste à prendre une bobine de bonne qualité (donc sans fer), et de lui associer un condensateur de valeur convenable.

Il faut encore mentionner que le générateur de signaux carrés doit avoir une résistance de sortie aussi faible que possible, car il fait bel et bien partie du circuit. Si cette résistance est de $50\ \Omega$, par exemple, l'expérience réussira, mais si elle est de $600\ \Omega$, il ne faut pas chercher ailleurs la cause de son échec !

En pareil cas, il est possible de se doter d'un générateur tout à fait convenable en utilisant un circuit intégré bon marché, courant, monté selon le schéma de la fig. 10.



Générateur de signaux carrés.

Fig. 10

DEUXIEME ANALOGIE.

Il est intéressant de transposer tout ce que nous venons de voir au cas d'un circuit résonnant parallèle. De plus, grâce au mode d'excitation différent d'un tel circuit, qui ne fait pas intervenir de la même manière le générateur fournissant les signaux d'excitation, le coefficient de qualité du résonateur obtenu est en général bien meilleur que dans le cas du circuit série.

Avec les conventions qui sont portées sur le schéma de la fig. 11, on a successivement lorsque $i = 0$, c'est-à-dire lorsque le circuit est le siège d'oscillations libres :

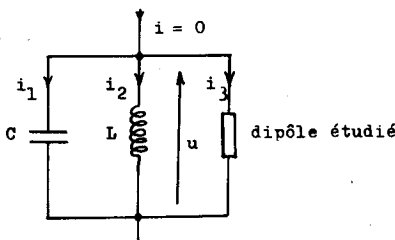


Fig. 11

$$i_1 = C \frac{du}{dt}; \quad i_2 = \frac{l}{L} \int u \cdot dt; \quad i_3 = f(u).$$

Et, puisque $i_1 = -i_2 - i_3$:

$$C \frac{du}{dt} = -\frac{l}{L} \int u \cdot dt - f(u).$$

Cette équation, qui est formellement identique à l'équation de la mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = -kx - \varepsilon(v),$$

fait apparaître l'analogie :

Electricité		Mécanique
tension : u	$\longleftrightarrow$	vitesse
intensité : i	$\longleftrightarrow$	force

Il en résulte que là encore, si le dipôle parcouru par l'intensité i_3 est une résistance, telle que $i_3 = \frac{1}{R} u$, ce dipôle introduit

un amortissement qui est l'analogie d'un frottement visqueux mécanique.

Pour créer un amortissement qui serait l'analogie d'un frottement sec, le retour à la fig. 2 nous montre, compte tenu du tableau précédent, que le dipôle cherché devrait posséder la caractéristique dessinée sur la fig. 12.

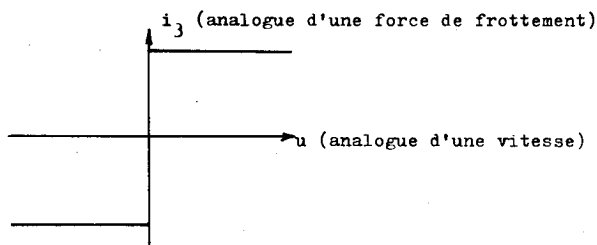


Fig. 12

On peut facilement approcher une telle caractéristique en plaçant en parallèle deux transistors NPN et PNP, parcourus par des courants de base convenables et constants (fig. 13).

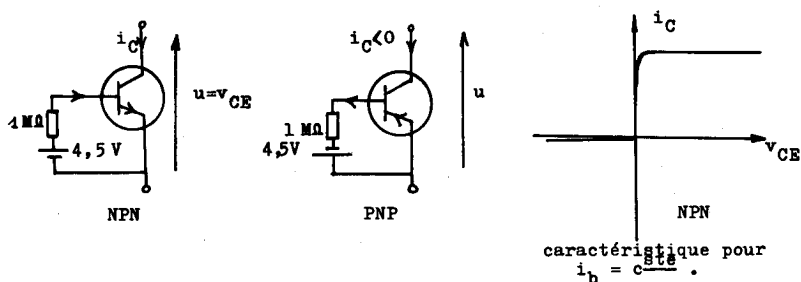


Fig. 13

En réalité, on peut très bien se limiter à un seul transistor. On réalise alors l'analogie de ce que nous avons appelé un frottement sec uni-dimensionnel (fig. 3 b). La figure obtenue est en effet toujours caractéristique d'un frottement sec.

En faisant varier le courant de base du transistor introduisant l'amortissement non linéaire, on fait varier l'analogie de la force de frottement sec. Pour un physicien, les figures ainsi obtenues sont très esthétiques !

Le montage ci-après permet de combiner les figures produites par un amortissement linéaire (potentiomètre P_1) et un amortissement non linéaire, dû au courant absorbé par le transistor (potentiomètre P_2).

La valeur maximale de P_1 doit être élevée, de manière à ce que l'amortissement qu'il apporte puisse éventuellement être négligeable devant celui que provoquent les pertes de la bobine.

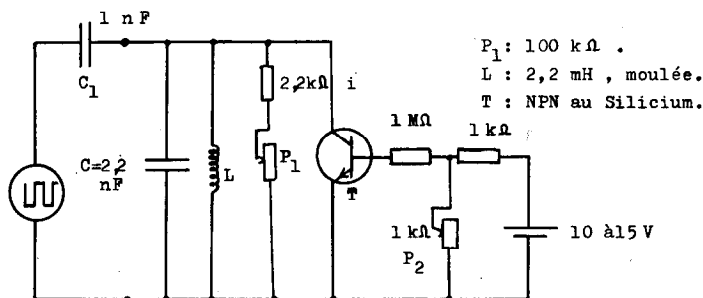


Fig. 14

Dans ce montage, les signaux carrés du générateur ne doivent pas avoir une amplitude trop importante, car les transistors usuels, pour des tensions négatives trop importantes ($v_{CE} < -7 \text{ V}$), entrent en régime d'avalanche, ceci a pour effet, ici, de mettre l'oscillateur en court-circuit.

La capacité du condensateur de liaison C_1 doit être prise en compte pour la détermination de la pulsation propre du résonateur (telle que $L(C + C_1)\omega_0^2 = 1$). Une telle liaison par condensateur permet de n'introduire que des pertes négligables au niveau du circuit oscillant. La nature et la valeur de L ne sont pas critiques.

R. MOREAU (Bordeaux).