

Réflexions sur l'optique géométrique matricielle

L'utilisation du calcul matriciel en optique géométrique tend à se généraliser dans l'enseignement français, notamment depuis qu'il a été recommandé dans les programmes d'optique de « Mathématiques supérieures ». Cependant, on reproche très souvent à la présentation matricielle de n'être qu'un ornement mathématique superflu qui éloigne de la réalité physique. Ainsi, cette présentation est parfois volontairement ignorée ou même interdite d'emploi (voir les programmes de Physique en Mathématiques supérieures technologiques T). Ce reproche est-il fondé ?

Il me paraît justifié après la lecture de certains ouvrages dans lesquels l'optique matricielle est présentée au début, puis soigneusement abandonnée au profit de la méthode traditionnelle; dans d'autres ouvrages, l'optique matricielle est abordée une fois le programme d'optique achevé (!)

Personnellement, je pense que la présentation matricielle de l'optique géométrique est beaucoup plus riche que la présentation traditionnelle et cela pour plusieurs raisons.

1) Elle permet d'insister sur l'approximation linéaire, fondamentale non seulement en optique géométrique mais dans toute la physique. La première partie du développement qui suit cette introduction rappellera ce point important.

2) L'accès aux éléments de matrice d'un système optique centré quelconque par des méthodes expérimentales permet de déterminer directement tous les éléments cardinaux de ce système.

3) En optique électronique et plus généralement dans la construction des accélérateurs, il est d'un emploi banal et indispensable. Même les propriétés dispersives (1) de ces systèmes ainsi que leurs aberrations géométriques (2) sont traitées à l'aide du calcul matriciel. Nous donnons comme exemple un prisme magnétique analogue à celui que nous avons adapté sur le microscope électronique de 1 MV de Toulouse.

4) Dans l'étude des lasers, le calcul matriciel est très commode puisqu'il permet de connaître les propriétés des cavités à la suite d'un grand nombre d'aller et retour de la lumière. On

pourra se reporter à l'ouvrage de GERRARD et BURCH (3) ou à l'article de PALLET (4) pour une justification de cet intérêt.

Enfin, ajoutons à toutes ces raisons l'attrait que peut produire cette présentation de l'optique géométrique car il faut bien dire que cette vieille discipline passionne peu les étudiants. On se ralliera aisément à ce dernier point lorsqu'on aura constaté que, du fait de l'enseignement des mathématiques, les étudiants manipulent aujourd'hui beaucoup mieux les matrices à 4 éléments que les triangles semblables.

I. L'APPROXIMATION LINEAIRE.

D'abord, elle est à la base de toute décomposition de signaux complexes en signaux simples ; ce que l'on écrit schématiquement, E_i représentant le signal d'entrée i et S_i le signal de sortie correspondant :

$$\forall_i E_i \rightarrow S_i \quad \text{et} \quad \sum_i a_i E_i \rightarrow \sum_i a_i S_i.$$

Les différents a_i étant des constantes (fig. 1).

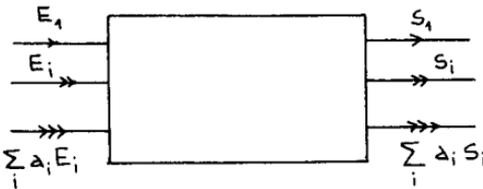


Fig. 1

Ensuite, elle permet une simplification importante des formules de transformations qui font passer de E_i à S_i .

Enfin, et c'est primordial, comme la plupart des systèmes ont la symétrie de révolution, elle permet de réaliser le stigmatisme tridimensionnel. En effet, les relations de ABBE et de HERSCHELL qui s'écrivent avec les notations de la fig. 2,

$$n_o A_o B_o \sin \alpha_o = n_i A_i B_i \sin \alpha_i \quad \text{soit} \quad \frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_o} = \text{Cte}$$

$$\text{et :} \quad n_o A_o C_o \sin^2 \left(\frac{\alpha_o}{2} \right) = n_i A_i C_i \sin^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \quad \text{soit :}$$

$$\dots \frac{\sin^2 (\alpha_o/2)}{\sin^2 (\alpha_i/2)} = \text{Cte}$$

sont généralement incompatibles.

En effet, on obtient la relation $\frac{\cos(\alpha_i/2)}{\cos(\alpha_o/2)} = \text{Cte} = 1$ dont les

solutions $\alpha_i = \alpha_o$ et $\alpha_i = \alpha_o = 0$ présentent peu d'intérêt. On voit que l'approximation linéaire, définie par $\alpha_i \ll 1$ et $\alpha_o \ll 1$, réalise, elle, au moins approximativement, la compatibilité de ces deux relations.

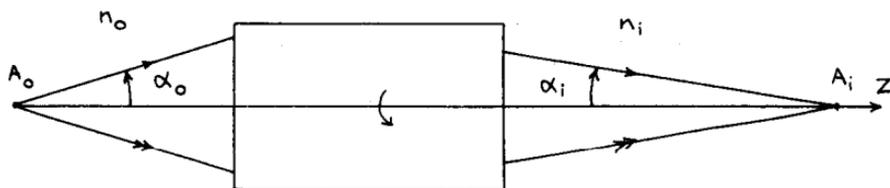


Fig. 2

Le dioptré sphérique.

Il est l'élément fondamental de tous les systèmes centrés. Etablissons les conditions, dites de Gauss, dans lesquelles il se comporte comme un système linéaire.

Explicitant la relation vectorielle de Descartes :

$$n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \lambda \vec{N}$$

avec les notations de la fig. 3, il vient :

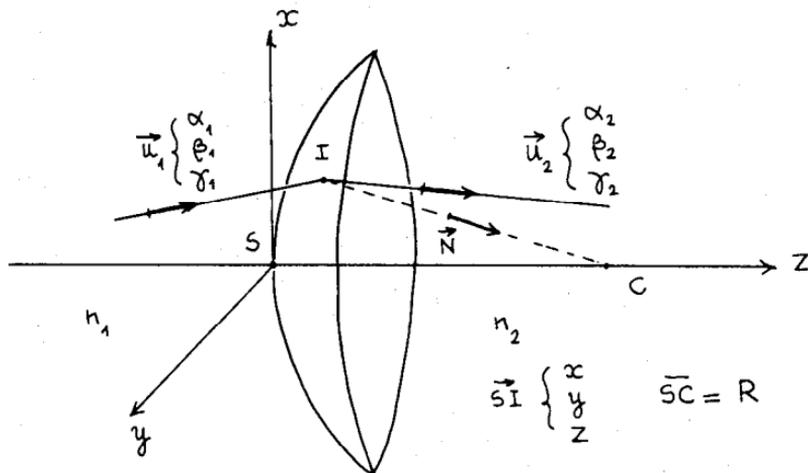


Fig. 3

$$n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2 = -\lambda \frac{x}{R}$$

$$n_1 \beta_1 - n_2 \beta_2 = -\lambda \frac{y}{R}$$

d'où l'on tire :

$$\gamma_1 = (1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = (1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2)^{1/2}.$$

Ces relations ne sont pas linéaires puisque :

$$\lambda = n_1 \left[-\alpha_1 \frac{x}{R} - \beta_1 \frac{y}{R} + \gamma_1 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{1/2} \right] \dots$$

$$\dots - n_2 \left[-\alpha_2 \frac{x}{R} - \beta_2 \frac{y}{R} + \gamma_2 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{1/2} \right]$$

Par conséquent, si l'on veut déterminer de façon précise \vec{u}_2 connaissant \vec{u}_1 , il est nécessaire de procéder comme suit :

1) calcul de $i_2 = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1 \sin i_1}{n_2} \right)$,

2) calcul de $\lambda = n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2$,

3) calculs de $n_2 \alpha_2 = n_1 \alpha_1 + \frac{\lambda x}{R}$ et de $n_2 \beta_2 = n_1 \beta_1 + \frac{\lambda y}{R}$,

4) calcul de γ_2 ,

c'est ainsi que l'on procède avec un calculateur rapide.

Les relations précédentes deviennent linéaires si α_1 et β_2 sont faibles devant 1 rd et si x et y sont faibles devant R .

Alors :

$$n_2 \alpha_2 = n_1 \alpha_1 - \frac{n_2 - n_1}{R} x$$

$$n_2 \beta_2 = n_1 \beta_1 - \frac{n_2 - n_1}{R} y$$

soit, en introduisant les nombres complexes,

$$\underline{\alpha}_2 = \alpha_2 + i \beta_2, \quad \underline{\alpha}_1 = \alpha_1 + i \beta_1, \quad \underline{x} = x + iy :$$

$$n_2 \underline{\alpha}_2 = n_1 \underline{\alpha}_1 - \frac{n_2 - n_1}{R} \underline{x}.$$

Comme, entre les plans $S_- xy$ et $S_+ xy$, \underline{x} n'a pas varié, on peut caractériser le dioptré sphérique par la matrice de réfraction $T_r(S_- S_+)$ telle que :

$$\begin{vmatrix} x \\ n \alpha \end{vmatrix}_+ = T_r(\overline{S_- S_+}) \begin{vmatrix} x \\ n \alpha \end{vmatrix}_-$$

avec :

$$T_r(\overline{S_- S_+}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{vmatrix}$$

Notons que $\det T_r(\overline{S_- S_+}) = 1$ du fait de l'introduction de l'angle optique $n \alpha$.

Le milieu homogène.

Dans les conditions de Gauss, il se comporte aussi comme un système linéaire.

A l'aide de la fig. 4, on voit que, suivant x , on peut écrire :

$$x_s = x_e + \alpha \overline{A_e A_s}$$

et : $(n \alpha)_s = (n \alpha)_e$.

De même suivant y .

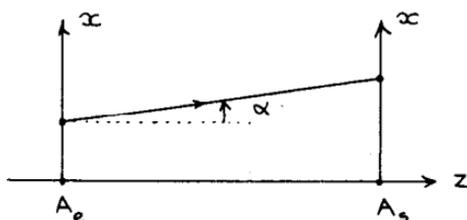


Fig. 4

D'où matriciellement, en introduisant la matrice, $T_h(\overline{A_e A_s})$:

$$T_h(\overline{A_e A_s}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\overline{A_e A_s}}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Remarquons que $\det T_h(\overline{A_e A_s})$ est aussi égal à 1.

II. SYSTEMES CENTRES.

Matrice de transfert.

Un système centré étant une succession de dioptries séparés par des milieux homogènes, on montre aisément qu'il peut être caractérisé, dans l'approximation de Gauss, par une matrice à quatre éléments :

$$T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

dont le déterminant est égal à 1.

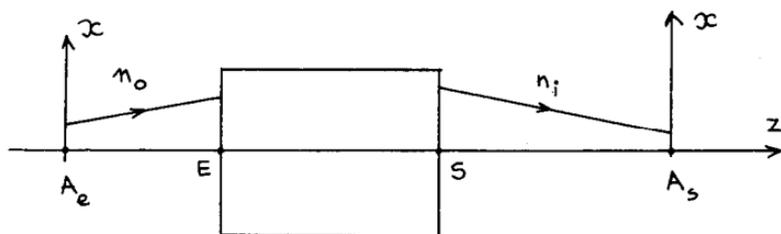


Fig. 5

Relions la matrice de passage entre les plans $A_e xy$ et $A_s xy$ à $T(ES)$ (fig. 5) :

$$T(\overline{A_e A_s}) = T_h(\overline{SA_s}) T(ES) T(\overline{A_e E}).$$

D'où les éléments de matrice de $T(A_e A_s)$:

$$T_{11}(A) = T_{11} + T_{21} \frac{\overline{SA_s}}{n_i}$$

$$T_{12}(A) = T_{12} + T_{11} \frac{\overline{A_e E}}{n_o} + \frac{\overline{SA_s}}{n_i} \left(T_{21} \frac{\overline{A_e E}}{n_o} + T_{22} \right)$$

$$T_{21}(A) = T_{21}$$

$$T_{22}(A) = T_{22} + T_{21} \frac{\overline{A_e E}}{n_o}.$$

On constate que $T_{21}(A)$ est indépendant de A . Aussi pose-t-on la vergence $V = -T_{21}$.

Si $T_{12}(A) = 0$, les plans $A_e xy$ et $A_s xy$ sont *conjugués*; A_e devient A_o et A_s devient A_i . Alors, on montre aisément que $T_{11}(A)$

s'identifie au grandissement transversal G_t et $T_{22}(A)$ à $\frac{n_i}{n_o} G_a$,

G_a étant le grandissement angulaire. Quant à la relation mathématique, $\det T(A) = 1$, elle exprime la relation de Lagrange et

$$\text{Helmholtz} \frac{n_i}{n_o} G_t G_a = 1.$$

Détermination expérimentale de la matrice de transfert.

Cette détermination fait l'objet d'une manipulation où l'on se propose d'évaluer numériquement, pour un système centré inconnu, les différents T_{ij} (5).

$$G_t(A) = T_{11} - V \frac{\overline{SA}_i}{n_i}$$

$$0 = T_{12} + T_{11} \frac{\overline{A_o E}}{n_o} + \frac{\overline{SA}_i}{n_i} \left(T_{22} - V \frac{\overline{A_o E}}{n_o} \right)$$

$$G_t^{-1}(A) = T_{22} - V \frac{\overline{A_o E}}{n_o}$$

La dernière relation permet d'obtenir V et T_{22} à partir du graphe G_t^{-1} en fonction de $\frac{\overline{A_o E}}{n_o}$ (fig. 6 a).

La seconde donne T_{12} et T_{11} à partir du graphe $-G_t^{-1} \frac{\overline{SA}_i}{n_i}$ en fonction de $\frac{\overline{A_o E}}{n_o}$ (fig. 6 b).

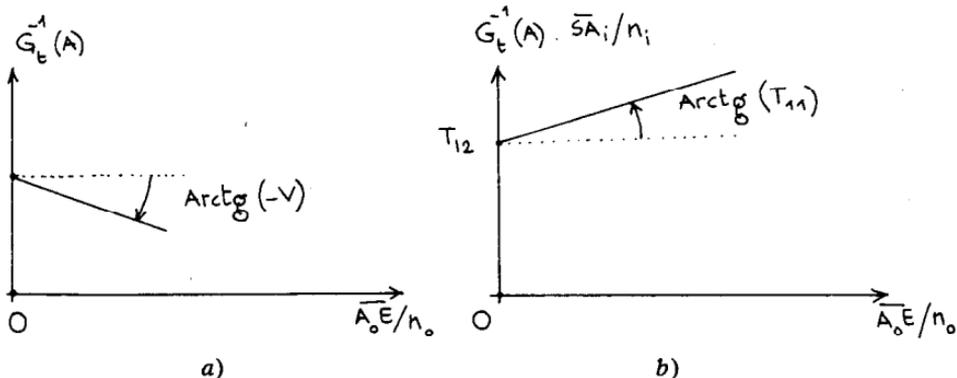


Fig. 6

Une fois cette manipulation faite, il est possible d'en déduire tous les éléments cardinaux comme le montre ce qui suit.

Éléments cardinaux.

Plans principaux. — La matrice de transfert entre ces plans s'écrit, évidemment :

$$T(\overline{H_o} \overline{H_i}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{vmatrix}$$

Par conséquent, pour déterminer ces plans, il suffit d'appliquer les relations précédentes :

$$1 = T_{11} - V \frac{\overline{SH}_i}{n_i} \qquad 1 = T_{22} - V \frac{\overline{H}_o E}{n_o}$$

d'où :

$$\overline{SH}_i = (T_{11} - 1) \frac{n_i}{V} \qquad \text{et} \qquad \overline{EH}_o = - (T_{22} - 1) \frac{n_o}{V}$$

Plans nodaux. — Ce sont les plans transversaux tels que le grandissement angulaire pour les points $N_o N_i$, situés sur l'axe optique, est égal à 1.

$$T(\overline{N}_o \overline{N}_i) = \begin{vmatrix} \frac{n_o}{n_i} & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} \end{vmatrix}$$

De la même façon que précédemment,

$$\frac{n_o}{n_i} = T_{11} - V \frac{\overline{SN}_i}{n_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{n_i}{n_o} = T_{22} - V \frac{\overline{N}_o E}{n_o}$$

d'où :

$$\overline{SN}_i = \left(T_{11} - \frac{n_o}{n_i} \right) \frac{n_i}{V} \qquad \text{et} \qquad \overline{EN}_o = - \left(T_{22} - \frac{n_i}{n_o} \right) \frac{n_o}{V}$$

On voit donc que la matrice de transfert permet de situer très simplement les plans principaux et les plans nodaux.

Relation de conjugaison avec origine aux plans principaux.

Elle s'obtient aisément à partir du produit des matrices :

$$T(\overline{A}_o \overline{A}_i) = T(\overline{H}_i \overline{A}_i) T(\overline{H}_o \overline{H}_i) T(\overline{A}_o \overline{H}_o)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{P_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -P_o \\ n_o \\ 1 \end{vmatrix}$$

avec : $P_i \equiv \overline{H}_i \overline{A}_i$ et $P_o \equiv \overline{H}_o \overline{A}_o$

Ecrivant que : $T_{12}(A) = 0$, il vient :

$$-\frac{n_o}{P_o} + \frac{n_i}{P_i} = V.$$

Foyers.

On définit le foyer image F_i par le conjugué de A_o situé à l'infini dans l'espace objet. D'où : $\overline{H_i F_i} = \frac{n_o}{V}$.

De même pour le foyer objet F_o : $\overline{H_o F_o} = -\frac{n_o}{V}$.

Il est alors aisé de situer les foyers F_o et F_i .

Application. — Doublet de Ramsden constitué de deux lentilles minces. Exprimons la matrice de transfert entre O_{1-}

et O_{2+} sur la fig. 7 en posant : $a = \frac{f_{i1}}{3} = \frac{e}{2} = \frac{f_{i2}}{3}$.

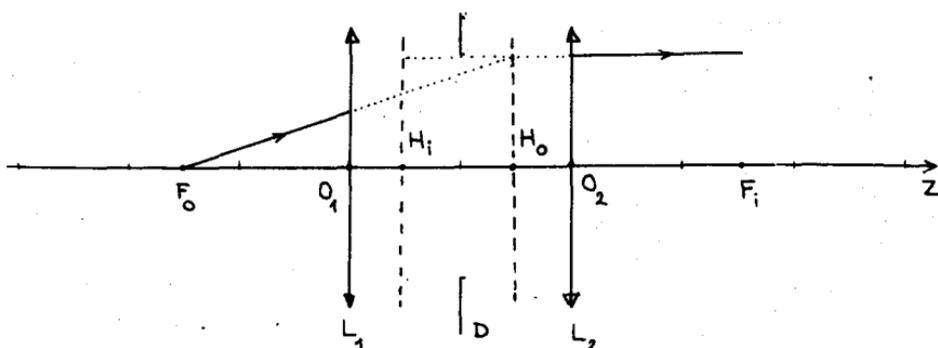


Fig. 7

$$T(\overline{O_{1-} O_{2+}}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3a} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 2a \\ -\frac{4}{9a} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

d'où :

$$V = \frac{4}{9a} \quad \text{et} \quad f_i = \frac{9}{4} a$$

$$\overline{O_2 H_i} = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \frac{9a}{4} = -\frac{3}{2} a$$

$$\overline{O_1 H_o} = -\left(\frac{1}{3} - 1 \right) \frac{9a}{4} = +\frac{3}{2} a$$

III. PRISME MAGNETIQUE.

Adapté sous le microscope électronique de 1 MV de Toulouse, il a permis d'étudier les pertes d'énergie des électrons à la traversée des échantillons (6). Il est constitué d'un électroaimant à champ uniforme qui impose aux électrons une déviation d'angle $\phi = \pi/2$ sur une trajectoire circulaire. Supposons pour simplifier que les faces d'entrée et de sortie soient normales à la trajectoire (fig. 8). La loi fondamentale de la mécanique pour un électron en mouvement dans le prisme par rapport au référentiel OXYZ s'écrit :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0.$$

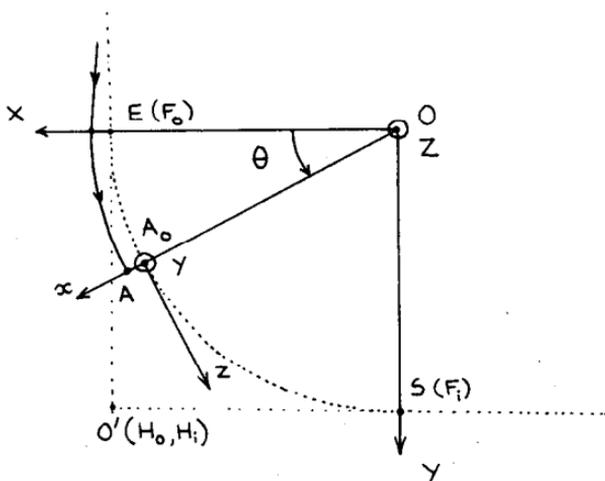


Fig. 8

En coordonnées cylindriques, elle donne :

$$m \begin{vmatrix} \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\phi} \wedge \\ \dot{z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 = -\frac{e B_0}{m} r \dot{\phi} & (1) \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = \frac{e B_0}{m} r \dot{r} \text{ soit } r^2 \dot{\phi} = \frac{e B_0}{m} \frac{r^2}{2} + \text{cte} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

Considérons un électron se déplaçant sur la trajectoire circulaire $r = R = \text{cte}$. D'après (1), il vient :

$$-R \dot{\theta}^2 = -\frac{eB}{m} R \dot{\theta} \quad \text{ce qui s'écrit :} \quad \dot{\theta} = \text{cte} = \omega_0 = \frac{eB_0}{m}$$

comme la vitesse de l'électron est approximativement égale à la vitesse orthoradiale :

$$r \dot{\theta} \simeq R \omega_0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta} \simeq \omega_0 R/r.$$

Plaçons-nous dans le cas où $r \simeq R$ et procédons au changement de variables $x = r - R$, $z = r\theta$, $y = -Z$, ce qui revient à utiliser le référentiel en mouvement, A_0xyz , A_0 étant un point de la trajectoire moyenne définie par $r = R$. Il vient :

$$\dot{\theta} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{x}{R}\right)^{-1} \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

puisque $x \ll R$.

d'où les équations en x et y :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

et :
$$\ddot{y} = 0$$

ce que l'on écrit aussi, en introduisant $x'' = \frac{d^2x}{dz^2}$ et $y'' = \frac{d^2y}{dz^2}$,

$$x'' + \frac{x}{R^2} = 0$$

et :
$$y'' = 0.$$

Les solutions sont immédiates ; en fonction de la position et de l'inclinaison à l'entrée, on obtient :

$$x = x_0 \cos \frac{z}{R} + x'_0 R \sin \frac{z}{R}$$

$$y = y_0 + y'_0 z$$

et :
$$\beta = y' = y'_0.$$

Les matrices de passage de E à S s'écrivent donc, en notant

$$\phi = \frac{z_s - z_e}{R},$$

$$T_X(ES) = \begin{vmatrix} \cos \phi & R \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi}{R} & \cos \phi \end{vmatrix}$$

et $T_Y(ES) = \begin{vmatrix} 1 & R \phi \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

On voit que le prisme se comporte comme un système optique caractérisé par deux matrices de transfert du fait de l'absence de symétrie de révolution. Suivant y , le système n'a aucune propriété de focalisation $V_y = (T_{12})_y = 0$. Par contre, sui-

vant x , la vergence est $V_x = \frac{\sin \phi}{R}$.

Les focales objet et image suivant x sont : $f_{ox} = -\frac{R}{\sin \phi}$ et $f_{ix} = +\frac{R}{\sin \phi}$.

Quant aux plans principaux, ils sont situés à :

$$\overline{SH}_i = (\cos \phi - 1) \frac{R}{\sin \phi} \quad \overline{EH}_o = -(\cos \phi - 1) \frac{R}{\sin \phi}$$

Donc H_o et H_i sont symétriques par rapport au plan médian du prisme.

Cas particulier important où $\phi = +\frac{\pi}{2}$:

$$V_x = \frac{1}{R} \quad f_{ix} = R$$

H_i et H_o sont alors confondus en O' (cf. fig. 8) et les foyers sont situés respectivement en E et S.

Notant $p_o = \overline{H_o A_o}$ et $p_i = \overline{H_i A_i}$, la relation de conjugaison suivant x s'écrit alors :

$$-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{R}$$

L'exemple du prisme magnétique montre que la présentation matricielle n'a pas un intérêt uniquement formel mais qu'elle

puise sa justification dans les travaux de recherche sur l'optique des particules chargées.

En conclusion, soulignons que la présentation que nous proposons rend l'optique matricielle complémentaire de l'optique traditionnelle et non concurrente. En effet, la matrice de transfert du système optique sert à déterminer tous les éléments cardinaux à partir desquels nous appliquerons les formules de conjugaison et nous construirons les rayons lumineux.

Dans la pratique de l'enseignement semestriel de l'optique géométrique, en D.E.U.G.S. A II première année, cette présentation nous a permis d'étudier la plupart des instruments d'optique depuis l'œil jusqu'aux télescopes réflecteurs en passant par les cavités Laser.

José-Philippe PÉREZ,

(Laboratoire d'optique électronique - Toulouse).

REFERENCES

- (1) GRIVET P. — *Electron Optics*, 1972, Pergamon.
 - (2) BROWN K.-L. — *The Review of Scientific instrument*, n° 3, Vol. 36, 1965.
 - (3) GERRARD et BURCH. — *Introduction to matrix methods in optics*, 1975, J. Wiley.
 - (4) PALLET P. — B.U.P. n° 610, p. 503.
 - (5) PEREZ J.-Ph. et CARIOU. — Publication à soumettre au B.U.P.
 - (6) PEREZ J.-Ph. — *Thèse Doctorat*, ès sciences, 1976.
-