Analyse du champ de vitesse du mouvement plan d'un fluide

Le mouvement d'un fluide est dit plan lorsque la vitesse en un point quelconque du fluide est parallèle à un plan donné et constante suivant la normale à ce plan. Un cas concret particulièrement intéressant est celui du mouvement de l'atmosphère que l'on peut, dans une première approximation, considérer comme un mouvement plan parallèle au sol.

Nous allons montrer que le champ de vitesses d'un mouvement plan quelconque peut être considéré comme la somme de quatre champs de vitesse simples.

Soit O l'origine d'un référentiel $Oxyz$ tel que la vitesse $\vec{V}$ en un point quelconque M du fluide est parallèle au plan Oxy. Les composantes de $\vec{V}$ suivant Ox et Oy sont respectivement u et v. En O, la vitesse est $\vec{V}_0$ (u_0, v_0). En un point M (x, y) les composants u et v de la vitesse $\vec{V}$ s'écrivent en utilisant les développements limités aux termes du premier ordre :

$$\vec{V} \left\{ \begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot y \end{aligned} \right.$$

relations que l'on peut encore écrire :

$$u = u_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) x \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) y$$

$$v = v_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) y \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) x.$$

Vectoriellement, on écrit :

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}.$$

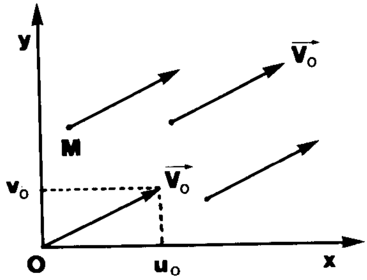


Fig. 1

a) $\vec{V_0}$ a pour composantes u_0, v_0 et définit un champ de mouvement identique en tous les points. Sous l'influence de ce champ, les particules de fluide sont animées d'un mouvement de translation. Les lignes de courant sont des droites parallèles à $\vec{V_0}$.

Le champ de $\vec{V_0}$ est appelé *champ de translation* (fig. 1).

b) $\vec{V_1}$ a pour composantes $u_1 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) y$ et $v_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) x$.

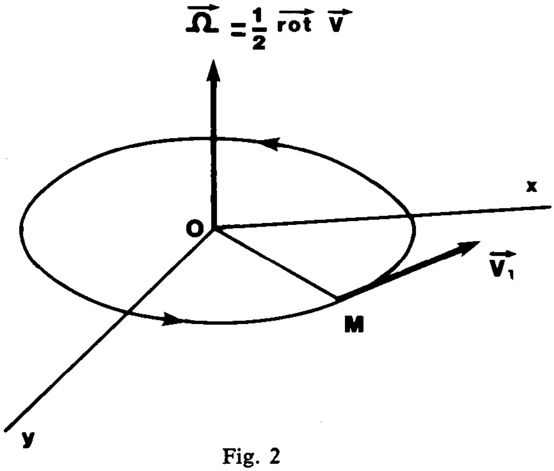


Fig. 2

On vérifie facilement que ce sont également les composantes du vecteur $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Ainsi $\vec{V}_1$ représente un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$.

Les lignes de courant correspondant à ce mouvement sont des cercles centrés sur O.

Le champ de $\vec{V}_1$ est appelé *champ de rotation* (fig. 2).

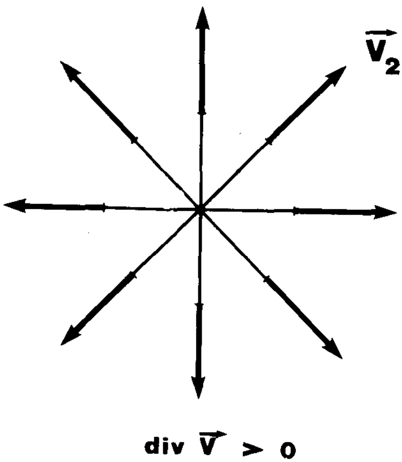
c) $\vec{V}_2$ a pour composantes :

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot x \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)y$$

où $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ représente le scalaire div $\vec{V}$.

Ainsi $\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\,\text{div}\,\vec{V}\cdot\overrightarrow{OM}$.

Le champ $\vec{V}_2$ est appelé *champ de divergence horizontale*. Les lignes de courant qui lui correspondent sont des droites concourantes en O. Autrement dit, le champ est radial dirigé vers



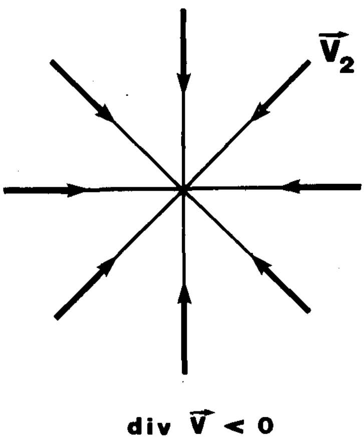


Fig. 3

l'extérieur si div $\vec{V}_2 > 0$ et dirigé vers O si div $\vec{V}_2 > 0$ (convergence) (fig. 3).

d) $\vec{V}_3$ a pour composantes :

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)y$$

et $$v_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)x.$$

Pour simplifier l'écriture, posons :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = a \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = b.$$

Les lignes de courant relatives au champ $\vec{V}_3$ sont données par :

$$\frac{dx}{ax + by} = \frac{dy}{-ay + bx},$$

soit : $$b\,(x\,dx - y\,dy) - a\,(y\,dx + x\,dy) = 0$$

$$\frac{b}{2}\,d\,(x^2 - y^2) - a\,d\,(x\,y) = 0$$

$$x^2 - y^2 - \frac{2a}{b} \cdot x\,y = \text{Cte}$$

c'est l'équation d'hyperboles équilatères.

Déterminons l'angle ϑ de ses asymptotes (OX, OY) avec les axes Ox, Oy. Le changement de coordonnées :

$$x = X \cos\vartheta - Y \sin\vartheta \quad \text{et} \quad y = X \sin\vartheta + Y \cos\vartheta$$

donne :

$$(X^2 - Y^2)\left(\cos 2\vartheta - \frac{a}{b}\sin 2\vartheta\right) - 2\,XY\left(\sin 2\vartheta + \frac{a}{b}\cos 2\vartheta\right) = 0.$$

La direction des asymptotes est déterminée en annulant le coefficient de $(X^2 - Y^2)$, soit : $\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{a}{b}$.

Les composantes de $\vec{V}_3$ suivant les nouveaux axes OXY sont :

$U_3 = u_3 \cos \vartheta + v_3 \sin \vartheta$ avec $u_3 = ax + by$ et $v_3 = -ay + bx$

$V_3 = -u_3 \sin \vartheta + v_3 \cos \vartheta$.

Tous calculs faits, on trouve :

$$U_3 = \frac{b}{2 \sin 2\vartheta} X \quad \text{et} \quad V_3 = -\frac{b}{2 \sin 2\vartheta} Y.$$

Ainsi, le module de $\vec{V}_3$ est :

$$\|\vec{V}_3\| = \frac{b}{2 \sin 2\vartheta} \|\vec{OM}\|.$$

Le sens du mouvement sur les lignes de courant dépend essentiellement du signe de b. La fig. 4 donne le sens du courant pour $b > 0$. Le champ $\vec{V}_3$ est appelé *champ de déformation.*

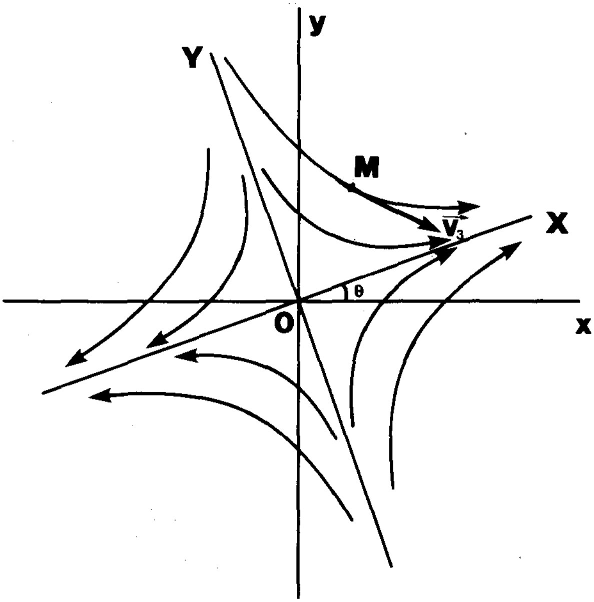


Fig. 4

En résumé, le champ de vitesse d'un mouvement plan quelconque peut être considéré comme la somme d'un champ de translation $\vec{V}_0$, d'un champ de rotation $\vec{V}_1$, d'un champ de divergence $\vec{V}_2$ et d'un champ de déformation $\vec{V}_3$. A noter que le champ de divergence $\vec{V}_2$ ne peut généralement exister seul car les lignes de courant ne peuvent concourir en O, sinon il faudrait imaginer en ce point une source ou un puits de fluide. En l'absence de l'un ou de l'autre, $\vec{V}_2$ est toujours associé à un ou plusieurs autres champs. De plus, le champ de divergence horizontal est accompagné de mouvements verticaux du fluide. En effet, dans le cas où div $\vec{V} > 0$, le mouvement divergent provoque dans la zone centrale un appel de fluide des couches supérieures c'est-à-dire un mouvement descendant ; si div $\vec{V} < 0$, le mouvement convergent produit au contraire un mouvement ascendant. Ces conséquences ont une grande importance dans les déplacements verticaux de l'atmosphère car ils s'accompagnent, dans le cas d'une ascendance, d'un refroidissement propice à la condensation (donc à la formation des nuages) ou, dans le cas d'un mouvement descendant (ou subsidence) d'un réchauffement générateur de beau temps et sec. Quant au champ de rotation, il peut être soit de sens trigonométrique direct, c'est-à-dire en langage météorologique, cyclonique, soit rétrograde ou anticyclonique. On a vu (*) que, dans l'hémisphère Nord, une rotation cyclonique correspondait à une zone dépressionnaire qui, à cause des forces de frottement, est aussi une région de convergence donc d'ascendance génératrice de nuage et de mauvais temps. Une rotation anticyclonique est, par contre, une zone de divergence, donc de subsidence propice au beau temps chaud et sec.

On voit que le champ de vitesse de l'air atmosphérique est directement lié au temps qu'il fait ; son analyse est un des moyens utilisés par les météorologistes pour établir leurs prévisions.

R. PICCA,

(*Université Paul-Sabatier - Toulouse*).

(*) *Les origines du vent.* B.U.P. n° 621, p. 651-663.