Dynamique des systèmes ouverts Mouvement d'une fusée

On étudie un système physique limité par un volume τ invariable. A une date donnée t, l'impulsion (ou quantité de mouvement) de ce système, mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ qu'on supposera être galiléen est $\vec{p}(t)$. La variation de cette quantité de mouvement au cours du temps est due à deux causes :

Une cause interne : sur chaque partie $d\tau$ du système agit une force (force extérieure paradoxalement) $\overrightarrow{dF} = \vec{f}\, d\tau$ et au total sur l'ensemble du système agit la force : $\vec{F} = \int_\tau \vec{f}.d\tau$ qu'on doit considérer comme une « source d'impulsion », source interne : ainsi le poids du système s'il est soumis à l'action de la pesanteur. On en déduira :

$$\overrightarrow{dp_1} = \vec{F}\, dt$$

et c'est le seul terme qu'il faille considérer si le système est fermé, c'est-à-dire si aucune matière ne s'échappe du volume τ lorsque le temps s'écoule.

Mais si le *système* est *ouvert,* c'est-à-dire si de la matière peut le quitter, si sa masse peut varier, alors il y a de l'impulsion qui est retirée du système par cette matière qui quitte le volume τ traversant la surface S qui le limite. Plus précisément, considérons un élément dS de cette surface. Elle est traversée, pendant la durée dt par une masse élémentaire :

$$dm = \rho\, \vec{v}' \cdot \overrightarrow{dS}\, dt$$

où $\vec{v}'$ est le vecteur vitesse avec laquelle la masse dm se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au système. C'est le flux du vecteur « densité de courant de matière » $\vec{j} = \rho\, \vec{v}'$ à travers la surface dS (au facteur dt près). Le raisonnement est le même que celui qu'on fait en électrocinétique pour calculer, à partir de la densité de charge, la densité de courant, puis l'intensité du courant à travers une surface élémentaire, enfin la charge qui traverse cette surface pendant la durée dt.

Pendant cette durée dt, la quantité $\vec{v}\,dm$ représentera l'impulsion qui quitte le volume τ à travers l'élément de surface dS. D'où au total :

$$\overrightarrow{dp_2} = -\int_S dm\,\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la masse dm mesurée par rapport au référentiel $\mathfrak{R}$. Soit :

$$\overrightarrow{dp_2} = -\int_S \varrho\,(\vec{v}'\,\overrightarrow{dS})\,\vec{v}\;dt.$$

Si bien que le bilan global d'impulsion compte tenu des deux termes écrits précédemment, sera :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} - \int_S \varrho\,(\vec{v}'\,\overrightarrow{dS})\,\vec{v}} \qquad (1)$$

En général, rien ne se simplifie dans cette expression.

Toutefois, il y a un cas intéressant : c'est celui où $\vec{v}$ peut être considéré comme constant sur une partie S_1 de la surface S et nul ailleurs. L'intégrale du second membre s'écrit alors :

$$\int_S \varrho\,(\vec{v}'\,\overrightarrow{dS})\,\vec{v} = \int_{S_1} \varrho\,(\vec{v}'\,\overrightarrow{dS})\,\vec{v} = \vec{v}\int_{S_1} \varrho\,(\vec{v}'\,\overrightarrow{dS}).$$

Or, l'intégrale $\int_{S_1} \varrho\,\vec{v}'\,\overrightarrow{dS}$ représente la quantité de matière qui a traversé la surface S_1 donc qui a quitté le volume τ (puisque la matière ne s'échappe maintenant qu'à travers S_1) pendant l'unité de durée. On l'appellera « débit de matière » et on le note a avec :

$$a = \int_{S_1} \varrho\,\vec{v}'\,\overrightarrow{dS} = -\frac{dM}{dt}$$

M étant la masse du système. (Le signe moins indiquant que la matière a quitté le volume τ). Alors l'équation générale (1) précédente s'écrit :

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = \vec{F} - a\,\vec{v}} \qquad (2)$$

Tout ceci doit être écrit, évidemment, dans un référentiel galiléen (ou considéré tel) convenable.

MOUVEMENT D'UNE FUSEE.

C'est l'application la plus usuelle des résultats écrits précédemment. On prend comme référentiel $\mathcal{R}$ le référentiel lié à la terre et on le supposera galiléen (pour simplifier). On considère le mouvement vertical de la fusée. A une date t, son impulsion est : $\vec{p}(t) = M(t)\,\vec{V}(t)$.

Les forces extérieures appliquées se réduisent au poids $M(t)\,\vec{g}$. La vitesse des gaz de propulsion, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

$\vec{v}'$ étant le vecteur vitesse des gaz dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la fusée. Alors :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(M\vec{V})}{dt} = M\vec{g} - a(\vec{v}' + \vec{V}).$$

En développant, il vient :

$$\frac{dM}{dt}\vec{V} + M\frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{g} - a\vec{v}' - a\vec{V}$$

et comme $a = -\dfrac{dM}{dt}$, ceci donne :

$$\boxed{M\frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{g} - a\vec{v}'} \qquad (3)$$

Projetons cette équation sur un axe Oz vertical ascendant. Sur cet axe, nous aurons :

$$\vec{V}(t) = V(t)\,\vec{k} \qquad \vec{g} = -g\,\vec{k} \qquad (\text{avec} \quad g > 0)$$

et : $\vec{v}' = -u'\,\vec{k}$

les gaz étant éjectés vers le sol.

Alors : $$\boxed{M(t)\frac{dV(t)}{dt} = -M(t)\,g + a\,u'} \qquad (4)$$

Un cas simple est celui où le débit « a » est constant, alors $M(t) = M_0 - a\,t$ et l'équation précédente est intégrable.

Notons qu'à l'instant initial, si on veut que la fusée puisse décoller, on doit avoir : $dV/dt > 0$ c'est-à-dire $a\,u' > M_0\,g$. C'est la quantité $a\,u'$ (homogène à une force) qui est appelée « poussée » dans le langage journalistique et technique.

Dans le cas d'une *fusée propulsée par photons,* les résultats seront obtenus de la façon suivante : les photons sont produits lors d'une réaction d'annihilation dans laquelle la disparition d'une masse $-dM$ produit dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ lié à la fusée une énergie $dW' = -dM\,c^2$ (le signe moins indique que la masse du système diminue et $-dM$ est positif). Dans ce même référentiel, les photons ainsi émis emportent une impulsion qui, dans le cas où ils sont éjectés vers l'arrière de la fusée, est :

$$d\,p'_{z'}\,\vec{k}' = dM\,c\,\vec{k}'$$

($\vec{k}'$ est le vecteur unitaire de l'axe O'Z' ascendant du référentiel lié à la fusée). Dans le référentiel $\mathfrak{R}$, nous obtenons l'impulsion de ces photons en utilisant la transformation de Lorentz :

$$d\,p_z = \gamma\,(dp'_{z'} + \frac{V}{c^2}\,dW')$$

soit :

$$d\,p_z = \gamma\,c\,dM\left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

La variation d'impulsion de la fusée sera, pendant la durée dt mesurée dans le référentiel $\mathfrak{R}$:

$$\frac{d\,(\gamma\,M\,V)}{dt} = F - \gamma\,c\left(1 - \frac{V}{c}\right)\frac{dM}{dt}$$

ou :

$$M\,\frac{d\,(\gamma\,V)}{dt} = F - \gamma\,c\,\frac{dM}{dt}.$$

On constatera d'ailleurs que $\frac{1}{\gamma}\,dt = \alpha\,dt = dt'$ représente la durée mesurée dans $\mathfrak{R}'$ pendant laquelle la masse de la fusée a diminué de dM. $-dM/dt'$ pourra alors (dM est invariant) être considéré comme le débit en masse a' mesuré par un observateur lié à la fusée et l'équation précédente s'écrira :

$$\boxed{M\,\frac{d\,(\gamma\,V)}{dt} = F + a'\,c} \qquad (5)$$

qui généralise l'équation classique obtenue précédemment (4).

Un cas particulier simple est celui où la fusée éloignée de tout astre peut être considérée comme isolée ; alors F = 0 et on écrit :

$$M \frac{d(\gamma V)}{dt} = -\gamma c \frac{dM}{dt}.$$

On peut simplifier par dt, les variables M et V se séparent et le problème se réduit à une quadrature.

Notons que la fusée ayant un mouvement accéléré, le référentiel $\mathcal{R}'$ qui lui est associé n'est pas en mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Pour pouvoir appliquer la transformation de Lorentz, il faut en fait considérer un référentiel $\mathcal{R}^*$ qui est, à la date t, animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation uniforme de vitesse V (référentiel tangent). Les calculs effectués précédemment n'en sont pas affectés.

P. JEAN,
(*Lycée Thiers - Marseille*).

BIBLIOGRAPHIE

GIÉ. — *Mécanique*, p. 139-146.