

## Le poids est-il toujours appliqué au centre de gravité ?

---

Les commentaires du programme de la classe de Seconde (1) insistent sur le fait que les forces de pesanteur sont des forces dispersées ou réparties et distinguent nettement le cas du poids, dont la ligne d'action passe par le centre d'inertie, de celui des forces dont le point d'application est « visible ». En fait, deux conditions sont nécessaires pour que l'ensemble des forces de pesanteur agissant sur un corps puisse être remplacé par une force unique dont le support passe par le centre d'inertie :

- le corps est un solide indéformable,
- le champ de pesanteur est uniforme.

La première est en somme banale ; chacun sait que, pour rendre compte de l'équilibre d'un sac de farine suspendu à un crochet, c'est-à-dire pour justifier la forme qu'il prend, il est indispensable de considérer les forces réparties de pesanteur. Dans cet article, nous nous intéresserons à la seconde condition ; rassurons tout de suite le lecteur : la réponse à la question du titre est positive pour un solide dont les dimensions ne dépassent pas quelques dizaines de mètres. Toutefois, pour mieux analyser le problème, nous généraliserons un peu et nous envisagerons des

forces réparties telles que  $\vec{df} = \vec{A} \cdot dm$ ,  $\vec{A}$  étant un vecteur champ dépendant du point,  $dm$  étant la masse de l'élément de volume ; ce sont d'une part les forces de gravitation, dont celles de pesanteur ne sont qu'un cas particulier, d'autre part les forces d'inertie d'entraînement.

Nous commencerons par un cas très net, où interviennent des forces d'inertie centrifuges, dont le champ est très loin d'être uniforme. Soit une tige OA, homogène, rigide, de longueur  $2 \cdot a$ , de masse linéique  $\mu$  ; elle tourne autour de l'axe vertical Oz, à la vitesse  $\omega$ , en faisant l'angle  $\alpha$  avec la verticale (fig. 1 a). Pour calculer cet angle, il est commode de se placer dans le repère non-galiléen où la tige est en équilibre relatif ; l'élément de longueur  $dl$ , situé à la distance  $l$  de O, est soumis à deux forces :

---

(1) Arrêté du 20 mars 1978. Brochure n° 6090 du C.N.D.P., p. 38 et 39.

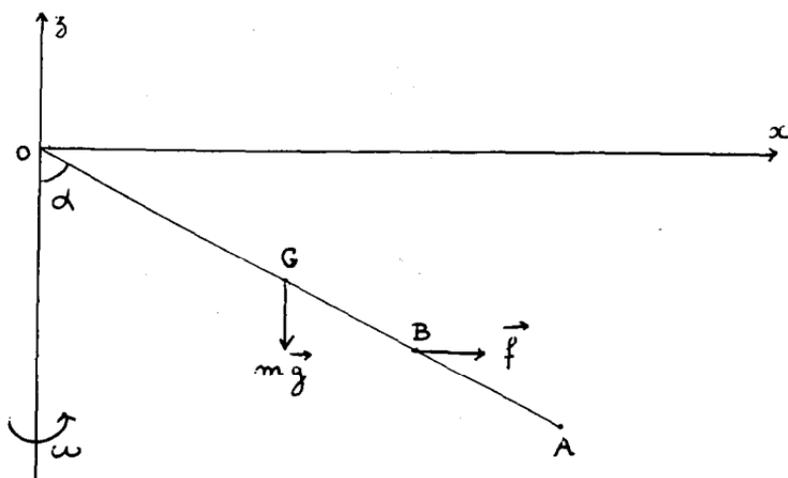


Fig. 1 a

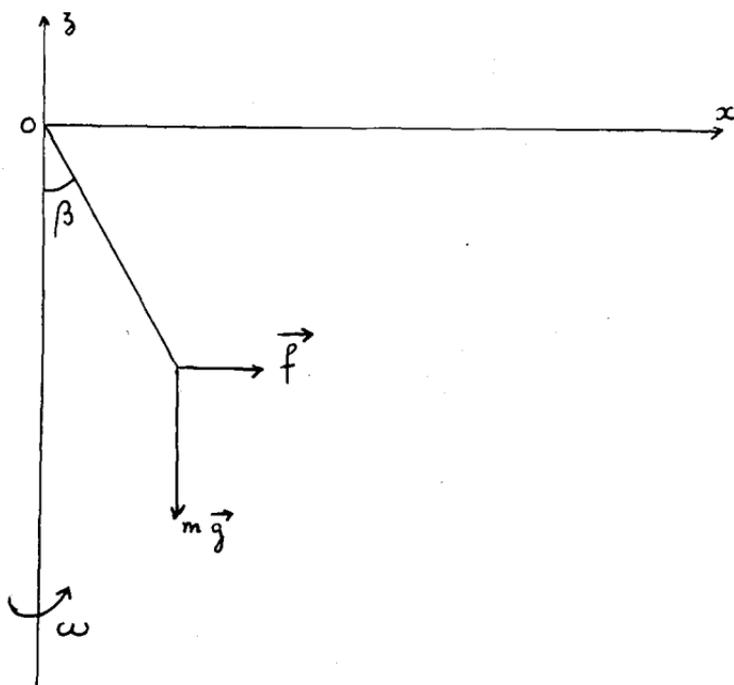


Fig. 1 b

son poids vertical,  $-\mu \cdot g \cdot dl$ ; la force centrifuge horizontale,  $\mu \cdot dl \times \omega^2 \times l \cdot \sin \alpha$ . Une position d'équilibre relatif de la tige est telle que la somme des moments par rapport à O soit nulle :

$$\int_0^{2a} (-\mu \cdot g \cdot dl) \times (l \cdot \sin \alpha) - (\mu \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot dl) \times (-l \cos \alpha) = 0.$$

La solution  $\sin \alpha = 0$  ( $\alpha = 0$  ou  $\pi$ ) n'étant pas intéressante, on trouve :

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{\omega^2 \cdot a}.$$

Si en G on avait une masse ponctuelle liée à O par un fil inextinguible et sans masse,  $OG = a$  (fig. 1 b), l'angle d'écart  $\beta$

serait différent :  $\cos \beta = \frac{g}{\omega^2 \cdot a}$ . En pratique, la différence peut

être importante ; si  $a = 20$  cm,  $\omega = 75$  tours/mn =  $2,5 \cdot \pi$  rd. s<sup>-1</sup>, on trouve, en admettant  $g = \pi^2$  :

$\cos \alpha = 0,6$ ,  $\cos \beta = 0,8$ ; soit  $\alpha = 53^\circ$  et  $\beta = 37^\circ$ .

On peut rendre compte de l'équilibre relatif de la tige de la façon suivante : son poids,  $-2 \cdot \mu \cdot a \cdot g$ , est appliqué en G; l'ensemble des forces centrifuges équivaut à une force unique,  $2 \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \sin \alpha$ , dont la droite d'action horizontale a la cote

$z = -\frac{4}{3} \cdot a \cdot \cos \alpha$ ; moyennant un léger abus de langage, on

peut dire que cette force est appliquée en B, point de la tige tel que  $OB = \frac{4}{3} \cdot OG$ . Cela fournit un exemple caractéristique :

masse de l'élément de volume, ou de longueur; l'ensemble équivaut à une force unique dont le support passe assez loin du centre d'inertie. La raison est évidente : le champ de force n'est pas uniforme.

En Mécanique céleste, il est très souvent parfaitement légitime d'admettre que l'attraction newtonienne s'exerçant entre deux astres se traduit seulement par deux forces, directement opposées, appliquées respectivement à leurs centres d'inertie. Toutefois, pour expliquer quelques phénomènes, il est nécessaire de tenir compte du fait que les forces gravitationnelles sont réparties et que, sur une distance de l'ordre du rayon de l'astre considéré, le champ dû à l'autre n'est pas uniforme. Pour la Terre, la non-uniformité du champ de gravitation de la Lune est la cause principale des *marées* et de la *précession des équinoxes* ;

le Soleil intervient aussi dans ces deux phénomènes, mais son rôle y est moindre, car son action n'est environ que 45 % de celle de la Lune. Les marées mettent en évidence la déformation de la surface des océans. Si la Terre était un solide indéformable, il y aurait seulement des tensions internes et un mouvement de l'axe des pôles, appelé précession des équinoxes ; en première approximation, dans le repère géocentrique, dont les axes ont pour origine le centre d'inertie de la Terre et sont dirigés vers des « étoiles fixes », l'axe de rotation diurne décrit autour de la normale à l'écliptique un cône de demi-angle au sommet  $23^{\circ}27'$  ; cette précession, dont la période est environ 26 000 ans, n'aurait pas lieu : soit si la Terre était sphérique et formée de couches homogènes concentriques (2), soit si le champ de gravitation dû à la Lune et au Soleil était le même en tous points de la Terre. Ce mouvement prouve que le système des forces gravitationnelles agissant sur la Terre n'est pas réductible à une force unique appliquée à son centre d'inertie ; en effet, c'est précisément le moment en ce point du système des forces qui engendre la précession observée.

Citons aussi deux autres faits astronomiques. Dès le dix-neuvième siècle et en l'absence de toute donnée directe d'observation, on avait compris que les *anneaux de Saturne* étaient constitués d'une multitude de satellites indépendants, obéissant aux lois de KÉPLER ; un calcul montrait en effet que les « forces de marées » engendrées par le champ gravitationnel de Saturne fragmenteraient inévitablement un anneau solide, dont les propriétés mécaniques ne seraient pas extrêmement différentes de celles des matériaux terrestres. Tout récemment, ce fut la découverte du *volcanisme d'un satellite de Jupiter, Io* ; en 1979, une équipe américaine a prévu par le calcul que les déformations qu'engendraient dans Io les autres satellites de Jupiter devaient, par suite d'un phénomène de résonance, y entraîner un dégagement considérable d'énergie, de telle sorte que l'on pouvait s'attendre à ce que Io soit le siège d'une activité volcanique intense ; peu après cette prédiction théorique, les images envoyées par une sonde Voyager sont venues confirmer l'existence sur Io d'un volcanisme spectaculaire.

Sur la Terre, en un lieu donné, le champ de pesanteur doit-il être considéré comme uniforme ? Les considérations qui viennent d'être développées montrent qu'il n'est pas ridicule de motiver soigneusement la réponse, qui sera d'ailleurs : oui. Il existe d'ailleurs une raison déterminante : il faut tenir compte de la non-

---

(2) On le démontre par un raisonnement analogue à celui développé dans la troisième partie ; d'ailleurs, la précession des équinoxes permet une évaluation de l'aplatissement du globe terrestre.

uniformité du champ gravitationnel dû à la Terre pour comprendre le procédé de *stabilisation par gradient de gravité* utilisé pour les satellites artificiels et, d'une façon plus générale, pour l'étude des « champs résiduels » qui traduisent les écarts à l'impesanteur à l'intérieur d'un satellite (3).

Pour étudier les conséquences que pourrait avoir la non-uniformité du champ de pesanteur dans une région voisine du sol et de dimensions restreintes, de l'ordre de la dizaine de mètres, prenons comme modèle un astre dépourvu de rotation propre et à symétrie matérielle sphérique, c'est-à-dire soit homogène, soit constitué de couches concentriques homogènes. On démontre que, à l'extérieur de cet astre, le champ de gravitation est identique à celui d'une masse ponctuelle, de valeur  $M_a$  égale à la masse totale, placée au centre  $\Omega$ . Dans les applications, nous prendrons :

- rayon de l'astre,  $R = 6\,400 \text{ km} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$  ;
- valeur moyenne de la pesanteur au voisinage du sol,  
 $g_0 = G \cdot M_a / R^2 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Cet astre fictif serait un bon modèle de la Terre si on pouvait faire abstraction de deux faits : la Terre est aplatie aux pôles et renflée à l'équateur ; la Terre tourne autour de l'axe des pôles, de sorte qu'un repère lié au sol n'est pas galiléen. Ces deux phénomènes entraînent pour le vecteur  $\vec{g}$  des termes correctifs notables, de plusieurs ordres de grandeur supérieurs à ceux que nous aurons à considérer. Cependant, les conclusions auxquelles nous arriverons sont parfaitement valables pour la pesanteur terrestre, surtout parce qu'elles sont en quelque sorte négatives.

Soit un point  $O$ , situé au-dessus et à proximité du sol, et un trièdre orthonormé  $Oxyz$  ;  $Oz$  est vertical ascendant, c'est-à-dire qu'il prolonge la droite  $\Omega O$ . En un point  $P(x, y, z)$ , si on pose :  $\vec{r} = \overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OP}$ , le vecteur pesanteur est :

$$\vec{g} = -G \cdot M_a \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

On peut admettre  $\|\overrightarrow{\Omega O}\| = R$  et limiter les développements au premier ordre, car les termes  $x/R, y/R, z/R$  sont de l'ordre de  $10^{-6}$ .

(3) Voir l'article de J.-P. SARMANT, *A propos de l'impesanteur*, Bull. U.d.P. n° 593, avril 1977. En fait, les variations  $\Delta g$  ont sensiblement les mêmes valeurs absolues au sol et à bord d'un satellite ; mais, dans ce dernier cas, elles peuvent avoir des effets sensibles parce que, en première approximation, règne l'état d'impesanteur,  $g = 0$ .

Les composantes du vecteur  $\vec{r}$  étant :  $x, y, R + z$ , on a :

$$r^2 = x^2 + y^2 + (R + z)^2 \approx R^2 \left( 1 + 2 \cdot \frac{z}{R} \right);$$

$$\frac{1}{r^3} \approx \frac{1}{R^3} \left( 1 + 2 \cdot \frac{z}{R} \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{R^3} \left( 1 - 3 \cdot \frac{z}{R} \right).$$

En désignant par  $g_0 = G \cdot M_a / R^2$  la norme du vecteur pesanteur en O et en ne retenant que les termes du premier ordre en  $x/R, y/R, z/R$ , les composantes du vecteur  $\vec{g}$ , accélération de la pesanteur en P, sont donc :

$$-g_0 \cdot \frac{x}{R}, \quad -g_0 \cdot \frac{y}{R}, \quad -G \cdot M_a \cdot \frac{R + z}{R^3} \cdot \left( 1 - 3 \cdot \frac{z}{R} \right) = -g_0 \left( 1 - 2 \cdot \frac{z}{R} \right).$$

Ces expressions semblent imposer une première constatation : un point matériel qui, éloigné de O, serait astreint à rester dans le plan xOy devrait être soumis à une force de rappel :

$$\vec{f} = -\frac{m \cdot g_0}{R} \cdot \vec{OP};$$

il pourrait prendre un mouvement sinusoïdal de période :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{R/g_0},$$

qui serait celle d'un satellite tournant au ras du sol en l'absence d'atmosphère. En fait, une telle conclusion est absolument irréaliste et n'a aucun sens physique ; montrons-le, en prenant un écart :  $d = 10^{-6} \cdot R \approx 6$  mètres. La valeur de la force de rappel ne serait que le millionième du poids et l'inévitable force de frottement serait au moins  $10^4$  fois plus grande. Il n'y aurait pas de force de rappel si le point matériel était astreint à rester sur la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $\Omega O$  ; or la distinction entre cette sphère et le plan xOy, qui lui est tangent en O, ne correspond pas à des possibilités expérimentales, puisque, pour l'écart choisi  $d = 6$  m, la distance entre les deux surfaces vaut  $3 \mu\text{m}$  et l'angle de leurs normales  $10^{-6}$  rd = 0,2''.

L'essentiel de notre propos est de rechercher s'il faut tenir compte de la non-uniformité du champ dans l'action de la pesanteur sur un solide. Soit un solide S dont le centre d'inertie est en O ; calculons, pour le torseur dû à la pesanteur, les éléments

de réduction en ce point O. Désignons sa masse par  $M = \int_S dm$

et tenons compte du fait que par définition du centre d'inertie :

$$\int_s x \cdot dm = 0, \int_s y \cdot dm = 0, \int_s z \cdot dm = 0.$$

Les composantes de la résultante générale  $\vec{R}$ , sont :

$$-\frac{g_0}{R} \cdot \int_s x \cdot dm = 0; \quad -\frac{g_0}{R} \cdot \int_s y \cdot dm = 0;$$

$$-g_0 \int_s \left(1 - \frac{2 \cdot z}{R}\right) \cdot dm = -M \cdot g_0.$$

Quant au moment résultant  $\vec{\mathfrak{M}}$ , il a les composantes :

$$\mathfrak{M}_x = \int_s -g_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot z}{R}\right) \cdot y \cdot dm + g_0 \cdot z \cdot y \cdot dm = 3 \cdot \frac{g_0}{R} \cdot \int_s y \cdot z \cdot dm;$$

$$\mathfrak{M}_y = \int_s -\frac{g_0}{R} \cdot x \cdot z \cdot dm + g_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot z}{R}\right) \cdot x \cdot dm = -3 \cdot \frac{g_0}{R} \int_s x \cdot z \cdot dm;$$

$$\mathfrak{M}_z = \int_s -\frac{g_0}{R} \cdot (x \cdot y - y \cdot x) \cdot dm = 0.$$

L'interprétation est aisée : l'invariant scalaire  $\vec{R} \cdot \vec{\mathfrak{M}}$  étant nul, le torseur est un glisseur, qui équivaut à une force unique : le poids, vertical, de norme  $M \cdot g_0$ , dont le support ne passe en général pas par  $O$ , le centre d'inertie du solide (4). Le point  $I$  d'intersection de cette ligne d'action avec le plan  $z = 0$  se détermine en écrivant que :  $\vec{\mathfrak{M}} = \vec{OI} \wedge \vec{R}$ ; ses coordonnées sont :

$$\xi = -\frac{3}{M \cdot R} \cdot \int_s x \cdot z \cdot dm, \quad \eta = -\frac{3}{M \cdot R} \int_s y \cdot z \cdot dm.$$

Toutefois, si la verticale passant par le centre d'inertie est un axe de symétrie du solide, elle est le support du poids, car alors les intégrales figurant dans les expressions de  $\xi$  et de  $\eta$  sont nulles.

Pour illustrer ces considérations générales et pour pouvoir apprécier l'ordre de grandeur de  $\xi$  et de  $\eta$ , nous allons prendre

(4) Il est un autre moyen de prouver cette équivalence. Toutes les forces élémentaires concourant en  $\Omega$ , le système des forces de pesanteur agissant sur le solide est réductible à une force unique, dont la ligne d'action passe par ce point  $\Omega$ , mais n'est pas obligatoirement  $\Omega O$ . En fait, à l'approximation adoptée, ce support fait avec  $\Omega O$  un angle négligeable, mais sa distance à  $O$  ne l'est pas.

deux exemples ; nous traiterons directement le premier, sans utiliser les formules générales que nous venons d'établir.

Soit un haltère, que nous modéliserons comme suit : une tige AB, rigide, mais de masse négligeable, de longueur  $2 \cdot l$ , porte à ses extrémités deux masses égales  $m$  (fig. 2). Le milieu de la tige, centre d'inertie du système, est en O ; la tige peut

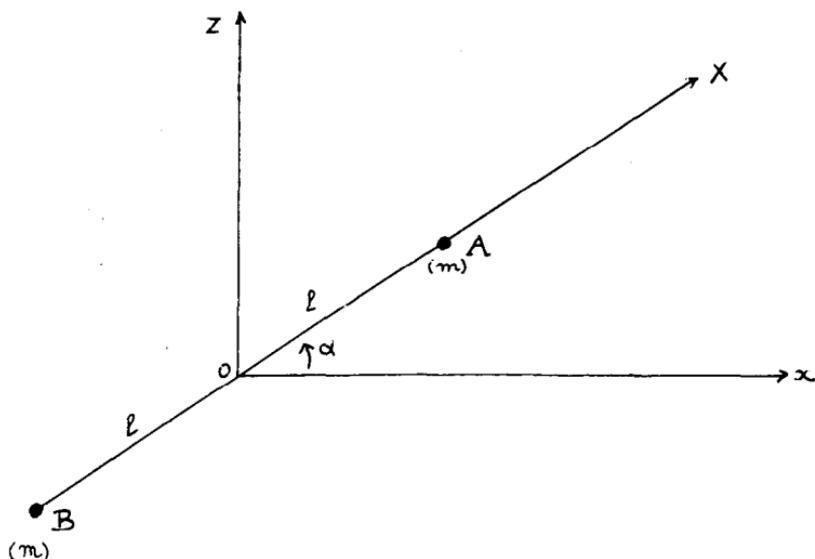


Fig. 2

tourner librement autour de O, mais on ne restreint pas le problème en ne considérant que la rotation autour de l'axe Oy, le haltère restant dans le plan zOx. L'axe OX est porté par la tige et  $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OX})$ . En A ( $l \cdot \cos \alpha$ , 0,  $l \cdot \sin \alpha$ ), la force de pesanteur a les composantes :

$$-m \cdot g_0 \cdot \frac{l}{R} \cdot \cos \alpha, \quad 0, \quad -m \cdot g_0 \left( 1 - \frac{2 \cdot l \cdot \sin \alpha}{R} \right);$$

en B ( $-l \cdot \cos \alpha$ , 0,  $-l \cdot \sin \alpha$ ), les composantes sont :

$$m \cdot g_0 \cdot \frac{l}{R} \cdot \cos \alpha, \quad 0, \quad -m \cdot g_0 \left( 1 + \frac{2 \cdot l \cdot \sin \alpha}{R} \right).$$

Le moment résultant en O est dirigé suivant Oy ; sa valeur algébrique est :

$$-6 \cdot m \cdot g_0 \cdot \frac{l^2}{R} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Le poids du haltère, de composantes :  $O, O, -2 \cdot m \cdot g_0$ , a une droite d'action qui coupe la tige en N tel que :

$$ON = X = -3 \cdot \frac{l^2}{R} \cdot \sin \alpha.$$

Lorsque l'orientation du haltère change, le point N, qui pourrait jouer le rôle de point d'application du poids, se déplace. Si  $2 \cdot l = 4$  mètres, sa distance maximale à O est :

$$X_M = 3 \cdot \frac{l^2}{R} = 2 \text{ } \mu\text{m}.$$

La distance du centre d'inertie O à la droite d'action du poids est :

$$\xi = X \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{2} \cdot \frac{l^2}{R} \cdot \sin 2\alpha;$$

sa valeur absolue maximale, obtenue pour  $\alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ,

est :

$$\xi_M = \frac{3}{2} \cdot \frac{l^2}{R} = 1 \text{ } \mu\text{m}.$$

Pour que les déplacements du point N soient indiscutables et notables, il faudrait que sa position et celle du centre d'inertie soient définies à  $0,1 \text{ } \mu\text{m}$  près ; pour un haltère de 4 mètres, cela dépasse les possibilités de la métrologie. Evidemment, le haltère considéré est irréalisable, car il est impossible que la tige AB soit à la fois parfaitement rigide et de masse négligeable ; mais le but visé est de montrer que, même sur un exemple *a priori* favorable, les conséquences de la non-uniformité du champ de pesanteur ne peuvent être expérimentalement décelées.

Comme second exemple, prenons une plaque rectangulaire, homogène, de masse surfacique  $\varrho$ , de longueur  $2 \cdot a$ , de largeur  $2 \cdot b$ , placée dans le plan  $zOx$  ; son centre est en O ; ses axes sont OX et OY, OX ayant la direction de la longueur ; son orientation est fixée par l'angle  $\beta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX})$  (fig. 3). Sa masse totale est :  $M = 4 \cdot \varrho \cdot a \cdot b$ . Un élément, de masse  $dm = \varrho \cdot dX \cdot dY$ , entourant le point P (X, Y) a les coordonnées :

$$x = X \cdot \cos \beta - Y \cdot \sin \beta, \quad y = 0, \quad z = X \cdot \sin \beta + Y \cdot \cos \beta.$$

La formule donnant l'abscisse de la verticale qui est la droite d'action du poids s'écrit :

$$\bar{x} = -\frac{3 \cdot \varrho}{M \cdot R} \cdot \int_S \left[ \frac{1}{2} \cdot (X^2 - Y^2) \cdot \sin 2\beta + X \cdot Y \cdot \cos 2\beta \right] \cdot dX \cdot dY.$$

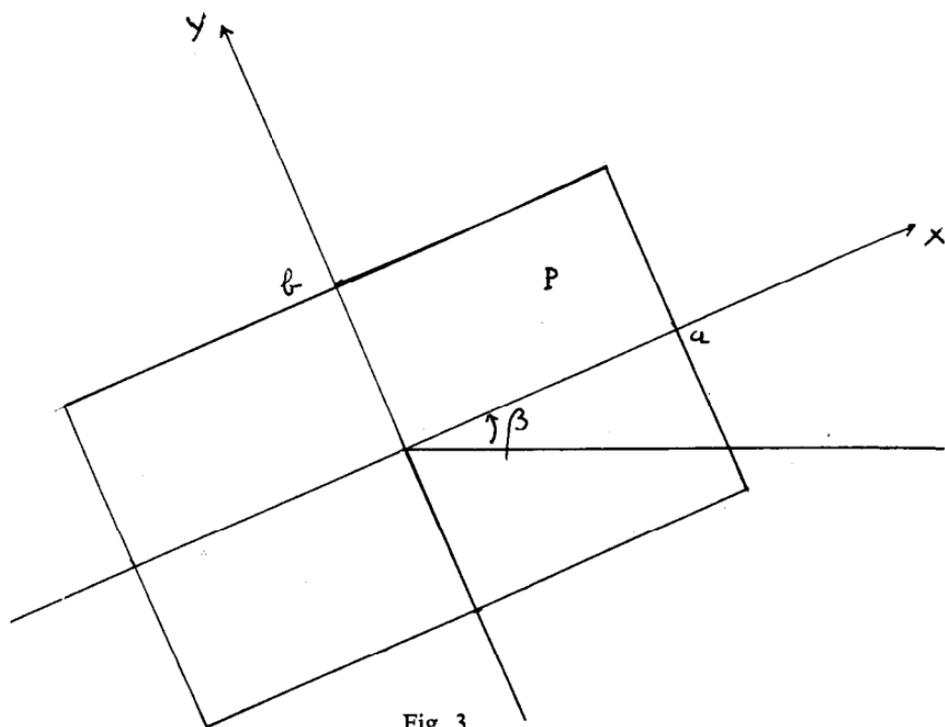


Fig. 3

On est conduit à calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-a}^{+a} X^2 \cdot dX \times \int_{-b}^{+b} dY = \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot b ;$$

$$\int_{-a}^{+a} dX + \int_{-b}^{+b} Y^2 \cdot dY = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b^3 ;$$

$$\int_{-a}^{+a} X \cdot dX \times \int_{-b}^{+b} Y \cdot dY = 0.$$

On trouve : 
$$\xi = -\frac{a^2 - b^2}{2 \cdot R} \cdot \sin 2\beta.$$

Si la plaque est carrée,  $\xi$  est nul. Pour que le support du poids puisse passer relativement loin du centre d'inertie, il faut que le rectangle soit très allongé ; par exemple, pour une bande

rectangulaire telle que  $b = a/10$ , on a : 
$$\xi = -0,495 \cdot \frac{a^2}{R} \cdot \sin 2\beta.$$

Si  $a = 10$  mètres, le maximum de  $|\xi|$  est  $\xi_M \approx 8 \mu\text{m}$ ; il faudrait donc travailler à  $1 \mu\text{m}$  près une plaque de  $20 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  pour qu'on puisse tenter de constater que la droite d'action de son poids ne passe pas par son centre.

Imaginons maintenant que le solide constitue le lest d'un fil à plomb et appliquons les résultats qui viennent d'être obtenus. A l'équilibre, ce solide est soumis à deux forces : son poids, la tension du fil ; elles sont directement opposées et le fil matérialise la droite d'action du poids. Ce fait a deux conséquences :

- le fil à plomb est vertical ;
- son prolongement ne passe pas obligatoirement par le centre d'inertie du lest.

Demandons-nous toutefois si les résultats pratiques n'imposent pas de remplacer la seconde proposition par l'affirmation contraire ? Tout d'abord, dans la plupart des réalisations, l'axe du fil est un axe de symétrie, voire de révolution, du solide-lest : le centre d'inertie de celui-ci est alors sur cet axe vertical. Un cas où cette condition ne serait pas réalisée est celui de la plaque rectangulaire allongée suspendue en un point quelconque de sa périphérie. Nous venons de voir un exemple, celui du rectangle  $20 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ , où le centre d'inertie peut être à  $8 \mu\text{m}$  de la verticale droite d'action du poids ; mais la plaque doit être rigide ; si elle est en acier et a 5 millimètres d'épaisseur, sa masse est d'environ 1,5 tonne ; quel que soit le mode de fixation, il est impossible de définir à  $0,01 \text{ mm}$  près la position de la droite portant le vecteur force qui représente l'action du câble auquel est accrochée la plaque. Evidemment, une bande de carton de dimensions modestes, par exemple  $50 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ , peut être suspendue à un fil de nylon de  $0,1 \text{ mm}$  de diamètre ; mais alors  $\xi_M = 5 \times 10^{-9} \text{ m}$ . L'écart théorique trouvé est donc toujours absolument indécélable, car le diamètre du fil, ou du câble, de suspension est de mille à cent mille fois plus grand. Dans la manipulation classique, où l'on détermine expérimentalement le centre de gravité d'une plaque de carton, les incertitudes graphiques peuvent être de l'ordre du millimètre ; il serait évidemment tout à fait ridicule de ne pas considérer que le champ de pesanteur est uniforme.

Passons aux conséquences que pourrait avoir la non-uniformité de ce champ sur les oscillations d'un pendule pesant. Considérons d'abord une *pendule simple*, de longueur  $l$ , oscillant dans le plan  $yOz$  autour du point  $O'$  ( $O, O, l$ ) (fig. 4). Lorsque l'angle d'écart est  $\theta$ , la masse  $m$  est au point  $P$  de coordonnées :  $O, l \cdot \sin \theta, l \cdot (1 - \cos \theta)$  ; la force de pesanteur a les composantes :

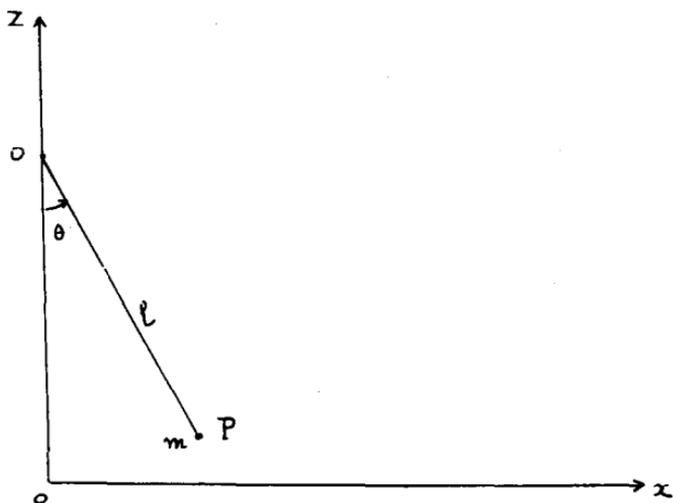


Fig. 4

$$O, \quad -m \cdot g_0 \cdot \frac{l}{R} \cdot \sin \vartheta, \quad -m \cdot g_0 \cdot \left[ 1 - \frac{2 \cdot l}{R} \cdot (1 - \cos \vartheta) \right]$$

L'équation différentielle du mouvement s'obtient en calculant le moment de cette force par rapport à  $O'$ ; comme  $\vec{O'P}$

$$(O, l \cdot \sin \vartheta, -l \cdot \cos \vartheta),$$

on a :

$$\begin{aligned} m \cdot l^2 \cdot \ddot{\vartheta} &= -m \cdot g_0 \left[ 1 - \frac{2 \cdot l}{R} (1 - \cos \vartheta) \right] \times l \cdot \sin \vartheta - \dots \\ &\dots \left[ -m \cdot g_0 \cdot \frac{l}{R} \sin \vartheta \right] \times \left[ -l \cdot \cos \vartheta \right] \\ \Rightarrow \ddot{\vartheta} &= -\frac{g_0}{l} \cdot \sin \vartheta \left[ 1 + \frac{l}{R} \cdot (3 \cdot \cos \vartheta - 2) \right]. \end{aligned}$$

Pour les oscillations de faible amplitude, la linéarisation,  $\sin \vartheta \approx \vartheta$  et  $\cos \vartheta \approx 1$ , conduit à :

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g_0}{l} \cdot \left( 1 + \frac{l}{R} \right) \cdot \vartheta = 0.$$

La période vaut, en désignant par  $T_0$  celle du pendule dans le champ uniforme :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_0} \cdot \left(1 + \frac{l}{R}\right)^{-1/2}} = T_0 \cdot \left(1 - \frac{l}{2 \cdot R}\right).$$

Montrons que la correction,  $(T_0 - T)/T_0$ , est toujours négligeable. Pour le pendule battant la seconde,  $l \approx 1$  mètre, le terme correctif vaut :  $l/(2 \cdot R) = 8 \times 10^{-8}$ ; même dans les expériences de mesure de  $g$ , où la précision recherchée est de  $10^{-6}$ , il n'y a pas lieu d'en tenir compte. La correction n'atteindrait  $3 \times 10^{-6}$  que dans l'expérience de Foucault au Panthéon :  $l = 40$  m,  $T_0 = 12,7$  s. N'oublions pas d'ailleurs que la période d'un pendule pesant dépend de l'amplitude angulaire des oscillations; pour compenser l'effet de la non-uniformité du champ, il suffirait d'une amplitude  $\theta_0$  telle que :  $\theta_0^2/16 = l/(2 \cdot R)$ ; pour un pendule battant la seconde, on trouve :  $\theta_0 \approx 10^{-3}$  rd  $\approx 4'$ ; c'est à peine si on le verrait osciller.

Le problème général du pendule pesant serait élégamment traité en calculant l'énergie potentielle du solide et en écrivant

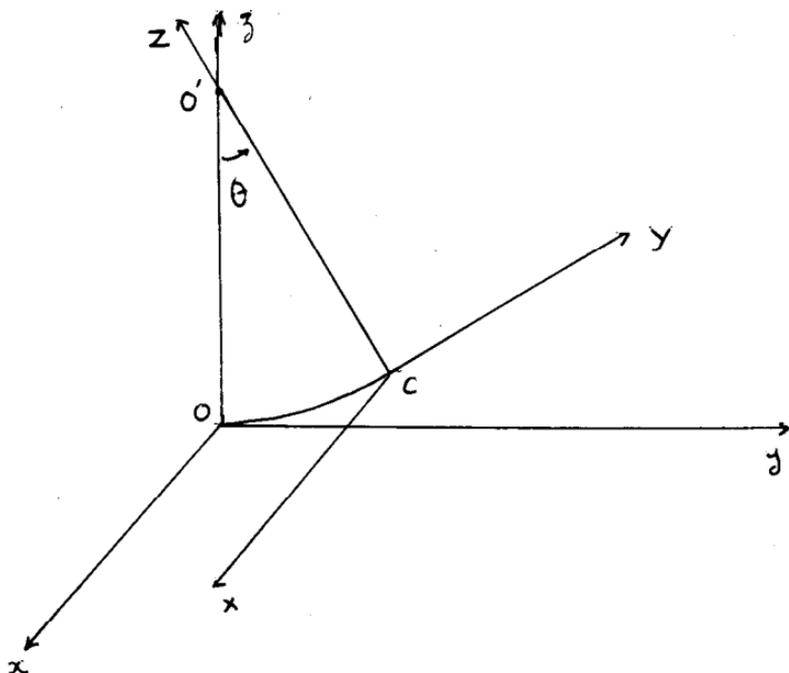


Fig. 5

l'intégrale première qui exprime la conservation de l'énergie. Mais comme nous connaissons les composantes du champ de pesanteur, nous nous contenterons d'indiquer comment on conduit le calcul qui les utilise. Le solide  $S$ , qui constitue le pendule, est mobile autour de l'axe  $O'x'$ , parallèle à  $Ox$  et d'équations :  $y = 0$ ,  $z = a$ . Lorsque le centre d'inertie  $C$  est en  $O$ , les axes  $CXYZ$  coïncident avec  $Oxyz$  (fig. 5). Une rotation d'un angle  $\theta$  autour de  $O'X'$  les amène dans une position où le changement de repère se traduit par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X \\ y = a \cdot \sin \theta + Y \cdot \cos \theta - Z \cdot \sin \theta \\ z = a \cdot (1 - \cos \theta) + Y \cdot \sin \theta + Z \cdot \cos \theta. \end{array} \right.$$

L'élément de masse  $dm$  entourant le point  $P(X, Y, Z)$  est soumis à la force de pesanteur, qui a les composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} df_x = -g_0 \cdot \frac{x}{R} \cdot dm = -\frac{g_0}{R} \cdot X \cdot dm \\ df_y = -g_0 \cdot \frac{y}{R} \cdot dm = -\frac{g_0}{R} \cdot (a \cdot \sin \theta + Y \cdot \cos \theta - Z \cdot \sin \theta) \cdot dm \\ df_z = -g_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot z}{R}\right) \cdot dm \\ \quad = -g_0 \cdot dm + \frac{2 \cdot g_0}{R} \cdot [a \cdot (1 - \cos \theta) + Y \cdot \sin \theta + Z \cdot \cos \theta] \cdot dm. \end{array} \right.$$

Il faut calculer le moment résultant par rapport à  $O'x'$  :

$$\mathfrak{M} = \int_S y \cdot df_z - (z - a) \cdot df_y.$$

L'expression du moment élémentaire est assez longue ; mais si l'on tient compte du fait que  $C$  est le centre d'inertie du solide et que par conséquent :

$$\int_S Y \cdot dm = 0, \quad \int_S Z \cdot dm = 0,$$

le moment résultant a une expression plus simple, car beaucoup de termes disparaissent. La masse du pendule étant  $M = \int_S dm$ , on trouve finalement :

$$= -M \cdot g_0 \cdot a \cdot \sin \vartheta \times \left[ 1 - \frac{2 \cdot a}{R} + \frac{3 \cdot a \cdot \cos \vartheta}{R} \right] \\ + \frac{3 \cdot g_0}{R} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \times \int_s (Y^2 - Z^2) \cdot dm + \frac{3 \cdot g_0}{R} \cos 2 \vartheta \times \int_s Y \cdot Z \cdot dm.$$

En désignant par  $J$  le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $O'x'$ , l'équation différentielle (E) du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\vartheta} + M \cdot g_0 \cdot a \cdot \sin \vartheta \times \left[ 1 - \frac{2 \cdot a}{R} + \frac{3 \cdot a}{R} \cdot \cos \vartheta - \frac{3 \cdot \cos \vartheta}{M \cdot a \cdot R} \dots \right. \\ \left. \dots \int_s (Y^2 - Z^2) \cdot dm \right] = \frac{3 \cdot g_0}{R} \cdot \cos 2 \vartheta \times \int_s Y \cdot Z \cdot dm.$$

Une première constatation s'impose : l'équation (E) n'est pas vérifiée pour :  $\vartheta = 0$  et  $\dot{\vartheta} = 0$ , sauf si l'intégrale du second membre est nulle. Donc en général à l'équilibre, C n'est pas en O ; autrement dit, le centre d'inertie n'est pas dans le plan vertical de l'axe  $O'x'$ . La droite OC fait avec la verticale  $O'O$  l'angle  $\vartheta_1$  qui, étant très petit, est donné par :

$$\vartheta_1 \approx \frac{3}{M \cdot a \cdot R} \times \int_s Y \cdot Z \cdot dm.$$

L'exception concerne le cas où le plan  $XCZ$  est un plan de symétrie matérielle du solide ; il est alors vertical à l'équilibre et C est en O.

Illustrons ce point par un exemple en imaginant qu'au milieu C de la tige du haltère déjà considéré on soude une tige  $CO'$ , elle aussi sans masse, de longueur  $a$ , de sorte que l'angle

$$\widehat{ACO'} = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ (fig. 6)}; \text{ l'ensemble constitue un pendule pou-}$$

vant osciller autour de l'axe  $O'x'$  normal à son plan. A l'équilibre, la tige  $O'C$  n'est pas verticale ; elle fait avec cette direction l'angle :

$$\vartheta_1 = \frac{3}{2 \cdot m \cdot a \cdot R} \times 2 \cdot m \cdot l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{l^2}{a \cdot R} \cdot \sin 2 \alpha.$$

Cet angle est maximal lorsque par construction  $\alpha = \pi/4$  ; pour  $l = 2 \text{ m}$  et  $a = 2 \text{ cm}$ , cette valeur maximale est :

$$\vartheta_{1,M} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ rd} \approx 10'';$$

elle est pratiquement indécélable. Notons que nous retrouvons ici, sous une forme à peine différente, des considérations développées à propos du fil à plomb.

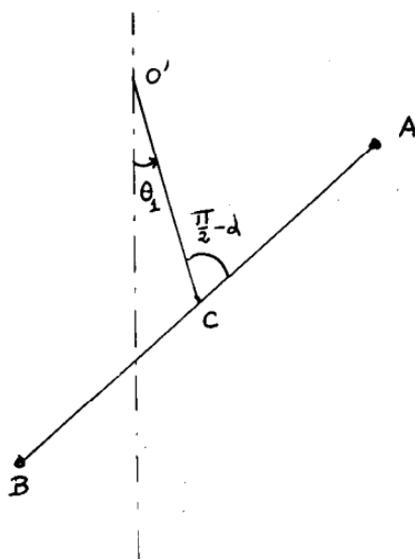


Fig. 6. — (L'angle  $\theta_1$  est très fortement exagéré).

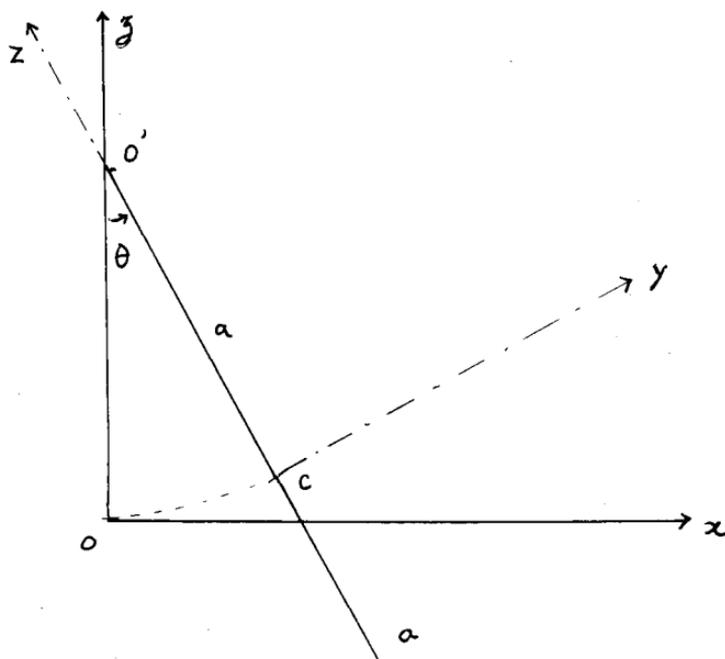


Fig. 7

Pour déterminer la période  $T$  des oscillations de faible amplitude, il convient de linéariser le premier membre de l'équation (E);  $T_0$  désignant la période du pendule dans un champ uniforme, on trouve :

$$T = T_0 \cdot \left[ 1 - \frac{a}{2 \cdot R} + \frac{3}{2 \cdot M \cdot a \cdot R} \times \int_s (Y^2 - Z^2) \cdot dm \right].$$

Pour apprécier l'importance de la correction  $(T_0 - T)/T_0$ , considérons le pendule formé par une tige homogène, de longueur  $2 \cdot a$ , de masse linéique  $\mu$ , suspendue par une de ses extrémités (fig. 7); comme  $Y = 0$ ,  $-a \leq Z \leq +a$ ,  $dm = \mu \cdot dZ$ ,  $M = 2 \cdot \mu \cdot a$ , on a :

$$T = T_0 \cdot \left[ 1 - \frac{a}{2 \cdot R} - \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu \cdot a^2 \cdot R} \cdot \int_{-a}^{+a} Z^2 \cdot dZ \right] = T_0 \cdot \left( 1 - \frac{a}{R} \right)$$

En ce cas, le terme correctif est deux fois plus grand que pour le pendule simple de longueur  $a$ ; mais ce facteur 2 ne modifie ni l'ordre de grandeur de la correction, ni par conséquent les conclusions pratiques : pour tout pendule pesant, on doit admettre que le champ de pesanteur est uniforme.

Du point de vue théorique, le cas général du pendule pesant est très instructif : l'équation différentielle du mouvement diffère de celle du pendule simple par deux termes, ceux comportant des intégrales, qui n'existeraient pas si tout se passait comme si la masse du solide était concentrée en un point, son centre d'inertie. Ainsi est mis en évidence le fait que les forces de pesanteur sont réparties et qu'il faudrait en tenir compte si le champ n'était pas uniforme.

Les différents effets, que nous venons d'envisager successivement, sont tous indécélables, même dans les expériences mécaniques les plus précises. Autrement dit, dans un domaine dont les dimensions ne dépassent pas la centaine de mètres, le champ de pesanteur terrestre est uniforme; il en résulte que le poids d'un solide est appliqué à son centre d'inertie. Faut-il en conclure que les développements précédents sont des spéculations purement intellectuelles sans intérêt physique, un inutile jeu de l'esprit? Nous ne le pensons pas, car nous estimons qu'ils permettent de mieux comprendre ce qui distingue les deux affirmations qui suivent. La première, prudente et nuancée, traduit la réalité physique profonde; elle est suggérée par les commentaires du programme du 20 mars 1978 :

— L'action de la pesanteur sur un solide équivaut à une force unique, son poids, dont la droite d'action passe par le centre

d'inertie quelle que soit l'orientation de ce solide ; il est commode d'admettre que ce poids est appliqué en ce point qui, pour cette raison, est appelé centre de gravité.

La seconde, brutale et pragmatique, ne vise que l'efficacité immédiate :

— Le poids d'un corps est appliqué à son centre d'inertie ou centre de gravité.

Nous terminons en évoquant un problème bien différent. Dans l'expérience de Cavendish, pour la détermination de la constante de gravitation  $G$ , on mesure l'attraction d'une sphère par une autre, assez proche d'elle. *A priori*, le problème paraît compliqué, puisque les forces de gravitation sont réparties ; en fait, le résultat est simple, car nous allons montrer qu'il est parfaitement légitime de remplacer chacune des deux sphères par une masse ponctuelle, placée en son centre et ayant pour valeur la masse totale. La démonstration consiste à appliquer plusieurs fois de suite le théorème de Gauss et le principe de l'action et de la réaction. Nous désignerons par  $\vec{[f]}_{A/B}$  le torseur des forces exercées par le corps A sur le corps B. Les deux sphères matérielles sont  $S_1$  et  $S_2$  ; nous désignerons par  $O_1$  et  $O_2$  les masses ponctuelles équivalentes qu'on imagine placées à leurs centres respectifs. On a la suite d'égalités, données ci-après, où le chiffre mis au-dessus du signe = rappelle qu'on applique soit le théorème de Gauss [1], soit le principe de l'action et de la réaction [2] :

$$\vec{[f]}_{S_1/S_2} \stackrel{(1)}{=} \vec{[f]}_{O_1/S_2} \stackrel{(2)}{=} -\vec{[f]}_{S_2/O_1} \stackrel{(1)}{=} -\vec{[f]}_{O_2/O_1} \stackrel{(2)}{=} \vec{[f]}_{O_1/O_2}.$$

Le résultat est rigoureux, même si la distance  $O_1O_2$  n'est qu'à peine supérieure à la somme des deux rayons. Il est valable, comme le théorème de Gauss, si  $S_1$  et  $S_2$  sont, non seulement des sphères homogènes, mais aussi des corps à symétrie matérielle sphérique, c'est-à-dire formés de couches concentriques homogènes.

Concluons par une remarque très générale. Lorsque le torseur de forces réparties appliquées à un solide équivaut à une force unique, une question délicate se pose : cette force a-t-elle un point d'application ? c'est-à-dire sa droite d'action passe-t-elle toujours par un certain point du solide, quelle que soit l'orientation de celui-ci ? La poussée d'Archimède appliquée à un corps flottant est l'exemple type où la réponse est négative. Même dans le cas simple du champ uniforme de pesanteur, il est légitime de considérer que le poids d'un solide est appliqué au

centre d'inertie, il est bon de démontrer, ou de justifier ce fait. En Seconde, on ne peut envisager de démontrer que la droite d'action du poids passe par le barycentre des masses ; mais dans le cours traditionnel de cette classe, on prenait la précaution de faire, ou plus souvent de faire faire par les élèves, des expériences mettant en évidence le centre de gravité, point d'application du poids. Il ne peut être question de laisser entrevoir à des élèves de Seconde la complexité du problème général ; cependant, bien qu'il doive avant tout être soucieux d'efficacité pratique, un professeur peut, grâce à un langage nuancé et prudent, éviter de faire croire qu'un système de forces réparties appliquées à un solide équivaut toujours à une force unique dont le point d'application est évident.

Georges GUINIER, Jean-Pierre SARMANT.

---