

Le champ électromagnétique et ses sources

Cet article a pour objectif une réflexion sur les relations entre le champ électromagnétique et ses sources. Il ne saurait être, vu son volume restreint, une révision générale de l'électromagnétisme. Nombre de questions importantes ont été laissées de côté, en particulier presque tout ce qui concerne les milieux matériels. Les démonstrations qui figurent dans les ouvrages pour les classes de spéciales ou les propédeutiques n'ont pas été reproduites. On s'est borné au cas statique ou quasi statique, négligeant les phénomènes de propagation. Cela impose de ne considérer que les vitesses très petites devant la vitesse de propagation.

I. CHAMP STATIQUE - APPROCHE PAR « L'ACTION A DISTANCE ».

La loi d'action est celle de Coulomb. Dans un référentiel où toutes les charges électriques sont au repos, le champ est purement statique. (En fait, si les « charges ponctuelles » sont des particules élémentaires, elles ont un moment magnétique propre et le champ n'est donc pas purement statique, mais les interactions magnétiques sont négligeables devant les interactions statiques).

En un point M défini par le vecteur position \vec{r}_M , le potentiel créé par la source $q(\vec{r}') d\tau'$, située au point P défini par \vec{r}' est :

$$dV(\vec{r}_M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r}' - \vec{r}_M|}$$

qu'on abrège souvent par :

$$dV_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d\tau'}{r}; \quad \vec{r} = \overrightarrow{MP} = \vec{r}' - \vec{r}_M; \quad r = |\vec{r}| \quad (*)$$

(*) NOTE : On utilisera dans tout ce qui suit la définition $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$, ce qui conduit, pour certaines relations, où figure le vecteur \vec{r} , à des signes évidemment opposés à ceux qui conviennent quand on prend $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$.

Le potentiel en M s'obtient par simple superposition :

$$V(\vec{r}_M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{q(\vec{r}') d\tau'}{r} \quad (1)$$

l'intégrale est étendue au domaine Ω contenant les sources. Le champ \vec{E} est donné par :

$$\vec{E}(\vec{r}_M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V(\vec{r}_M) \quad (2)$$

l'opérateur gradient agissant sur les coordonnées de M, ce que rappelle son suffixe.

On peut aussi avoir des distributions de dipôles, par exemple dans le cas des diélectriques, ou même de multipôles d'ordre plus élevé. Si \vec{P} est le moment dipolaire par unité de volume au point P, le potentiel en M est :

$$V(\vec{r}_M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{r}}{r^3} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_P \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' \quad (3)$$

dans un référentiel où les dipôles sont au repos.

II. LOI LOCALE - UNICITE DE LA SOLUTION.

L'approche précédente, malgré un certain dogmatisme, est justifiable du point de vue pédagogique, au moins pour une première étude. Complétée par l'expression intégrale du théorème de Gauss, elle se révèle efficace en permettant la résolution d'un grand nombre de problèmes simples classiques. Cependant, on sait que le traitement correct des régimes variables impose la recherche d'une « loi locale ». Celle-ci s'obtient aisément dans l'approximation quasi statique. On a d'abord :

$$\text{div}_M \vec{E}(\vec{r}_M) = \frac{q(\vec{r}_M)}{\epsilon_0}$$

$$\text{d'où :} \quad \nabla^2_M V(\vec{r}_M) = -\frac{q(\vec{r}_M)}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles qui gouverne V si $q(\vec{r}_M)$ est connu. Avec cette approche, il paraît évident que la solution de (4), quand q est connu dans tout l'espace, est justement (1). (Le cas des dipôles se déduit de (1) par un passage à la limite, la distance des charges opposées tendant vers zéro). Cependant, il est important, d'un point de vue plus théorique que pratique, de s'assurer qu'il n'y a pas d'autre solution de

l'équation (4) lorsque certaines conditions aux limites sont imposées, et d'examiner quelles conditions aux limites sont nécessaires pour cela.

Soit un champ de vecteurs \vec{U} obéissant à :

$$\operatorname{div} U = a \quad \operatorname{rot} \vec{U} = \vec{b} \quad a, \vec{b}, \text{ donnés.}$$

Dans le cas du champ \vec{E} , la deuxième relation correspond à $\vec{b} = \vec{0}$ dans le cas statique, mais à $\vec{b} \neq \vec{0}$ dans le cas quasi statique (relation de Maxwell-Faraday). S'il existe deux solutions de ce système, \vec{U}_1 et \vec{U}_2 , posons $\vec{W} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2$, alors $\operatorname{div} \vec{W} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{0}$. On peut donc écrire $\vec{W} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$. Appliquons la relation de Green-Ostrogradzky au vecteur $\varphi \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$, dans un domaine Ω limité par la surface fermée Σ :

$$\int_{\Sigma} \varphi \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{\Omega} [\varphi \nabla^2 \varphi + (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi)^2] d\tau \quad (5)$$

Un premier usage de cette relation consiste à faire tendre Σ vers l'infini. Si les sources sont contenues dans un domaine borné, alors φ décroît comme $1/r$ et $|\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi|$ comme $1/r^2$, l'intégrale de gauche tend vers zéro. Comme $\nabla^2 \varphi = 0$, il reste :

$$\int_{\Omega} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi)^2 d\tau = \int_{\Omega} W^2 d\tau = 0$$

Ceci exige que \vec{W} s'annule partout, donc \vec{U}_1 et \vec{U}_2 sont identiques. En résumé, si la densité ϱ est connue et limitée à un domaine borné de l'espace, alors \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire donné

par (1) et ce potentiel tend vers zéro à l'infini comme $\frac{1}{r} \int \varrho d\tau'$.

Ceci assure d'ailleurs la convergence en tout point M de l'intégrale (1).

Un deuxième usage de (5) consiste à l'appliquer à un domaine borné, non nécessairement simplement connexe, et vide de sources. La surface frontière Σ peut être unique ou formée de plusieurs surfaces fermées séparées, de manière à exclure les régions où se trouvent des sources. Soient alors deux solutions V_1 et V_2 de (4); posons $\varphi = V_1 - V_2$ et portons dans (5), avec $\nabla^2 \varphi = 0$.

$$I = \int_{\Sigma} (V_1 - V_2) [\overrightarrow{\operatorname{grad}} V_1 \cdot \overrightarrow{dS} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V_2 \cdot \overrightarrow{dS}] = \int_{\Omega} [\overrightarrow{\operatorname{grad}} V_1 - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V_2]^2 d\tau$$

on peut avoir $V_1 = V_2$ en tout point de Σ , alors $I = 0$. On peut aussi avoir $\overrightarrow{\text{grad}} V_1 \cdot \overrightarrow{dS} = \overrightarrow{\text{grad}} V_2 \cdot \overrightarrow{dS}$, alors $I = 0$ également.

Dans les deux cas, on a, en tout point de Ω , $\overrightarrow{\text{grad}} V_1 = \overrightarrow{\text{grad}} V_2$, donc $V_1 = V_2 + C^{\text{te}}$. La constante est d'ailleurs nulle si $V_1 = V_2$ sur Σ .

La signification de ce résultat est la suivante : dans un champ électrostatique, on peut isoler un domaine ne renfermant pas de sources et remplacer, sans changer le champ à l'intérieur du domaine, toutes les sources extérieures à la frontière par la donnée sur celle-ci du potentiel ou de la composante normale du champ. Une application immédiate et classique est celle d'un système de conducteurs dont les surfaces sont S_1, S_2, \dots . La surface Σ est composée de surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ infiniment voisines de S_1, S_2, \dots et extérieures à celles-ci, et d'une surface Σ' englobant le tout et qu'on fera tendre vers l'infini. Le domaine Ω sera donc l'espace extérieur aux conducteurs. Si les potentiels des conducteurs sont donnés, la solution est unique. Si, pour le conducteur i , c'est la charge qui est donnée, la partie de l'intégrale relative à la surface Σ_i s'écrit :

$$I_i = (V_1 - V_2)_i \int_{\Sigma_i} \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_1 - \sigma_2)_i dS_i = \frac{1}{\epsilon_0} [(V_1 - V_2)(Q_1 - Q_2)]_i$$

en effet V_1 et V_2 doivent être (séparément) constants sur Σ_i et sortent donc de l'intégrale. Comme $Q_1 = Q_2$, on a bien $I_i = 0$. L'équilibre d'un système de conducteurs est unique si l'on se donne pour chacun, soit le potentiel, soit la charge totale.

III. CHAMP MAGNETIQUE.

Si, à partir d'un référentiel R où n'existe qu'un champ statique \vec{E} , on passe à un référentiel R' en mouvement relatif par rapport à R , il est bien connu qu'il apparaît un champ magnétique, c'est-à-dire que les charges sources de \vec{E} dans R , qui sont en mouvement dans R' , y créent un champ magnétique. Inversement si dans R n'existe qu'un champ magnétique, un champ statique apparaît dans R' . Ceci montre la profonde unité des deux champs, qui sont en fait les composantes d'un même tenseur de rang deux dans l'espace-temps à quatre dimensions de la relativité. Mais le passage de R à R' n'est simple que pour une transformation spéciale de Lorentz (mouvement relatif de translation uniforme) et ne permet donc pas de traiter les cas les plus usuels où les charges se déplacent sur des trajectoires fermées .

Un premier type de sources du champ magnétique est donc constitué par les charges en mouvement, c'est-à-dire les courants, ou les charges ponctuelles se déplaçant dans le vide. Un deuxième type est constitué par les « dipôles élémentaires », qui sont des molécules, atomes, ions, ou particules élémentaires. On peut chercher des courants équivalents à ces dipôles mais d'une part c'est inutile pour le but poursuivi ici, d'autre part ces dipôles élémentaires sont régis par la mécanique quantique. Si on peut encore utiliser l'image d'un courant équivalent pour le mouvement d'un électron autour du noyau dans un atome ou une molécule, cette image perd toute signification pour une particule élémentaire. Il est bien connu, par exemple, que le moment magnétique intrinsèque de l'électron ne peut être expliqué par le modèle d'une sphère chargée tournante, dont le rayon serait de l'ordre du « rayon classique » de l'électron, de l'ordre de $e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$. Il faudrait pour cela une « vitesse périphérique » très supérieure à c .

IV. APPROCHE PAR « L'ACTION A DISTANCE ».

a) La loi d'action est celle de Biot et Savart. Au point P, dans l'élément $d\tau'$ existe une densité de courant $\vec{j}(\vec{r}') d\tau'$. Le champ au point M est :

$$\vec{dB}(\vec{r}_M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau' \quad (6)$$

Le champ créé par une charge ponctuelle q en P, animée de la vitesse \vec{v} est donné par la même relation où \vec{qv} remplace $\vec{j} d\tau'$. On procède ensuite par superposition :

$$\vec{B}(\vec{r}_M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left[\vec{j}(\vec{r}') \wedge \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau' \quad (7)$$

On peut voir facilement, soit en considérant les tubes de champ de \vec{dB} d'après (6), soit par calcul direct, que :

$$\text{div}_M [\vec{dB}(\vec{r}_M)] = 0 \quad \text{donc} \quad \text{div}_M [\vec{B}(\vec{r}_M)] = 0 \quad (8)$$

On aperçoit déjà une différence fondamentale entre \vec{E} et \vec{B} dans leurs relations avec leurs sources. \vec{E} a des sources réelles, qui sont cause de la divergence du champ. Les sources de \vec{B} sont des charges en mouvement et ne créent pas, pour \vec{B} , de divergence, mais un rotationnel.

Un exemple très simple permet de saisir cette différence : une charge q est au repos en O dans le référentiel R . Un référentiel R' est animé de la vitesse $-\vec{v}$ par rapport à R , donc, dans R' , q à la vitesse \vec{v} ($v \ll c$).

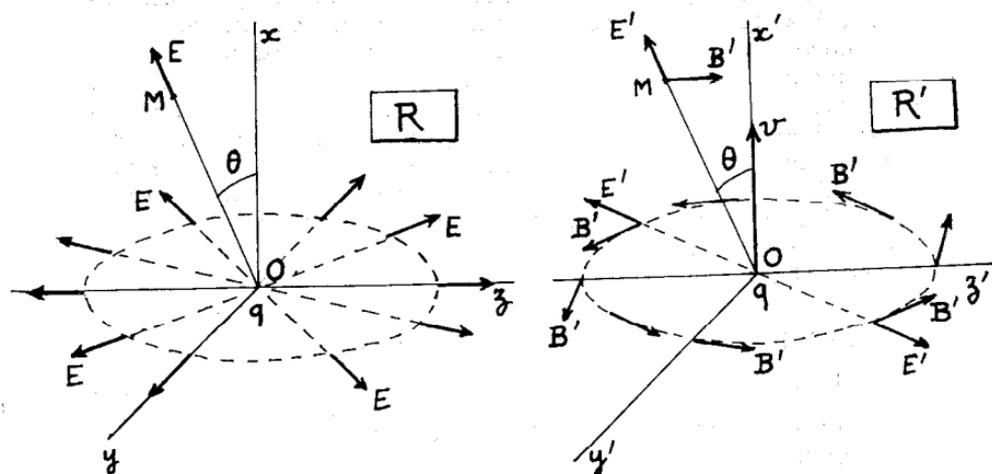


Fig. 1

Les formules de changement de repère, au deuxième ordre près en v/c , ($\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1$), appliquées en M dans le plan xOy , donnent :

$$\vec{E}' \approx \vec{E} \quad B'_x = B'_y = 0 \quad B'_z = -\left(-\frac{v}{c^2}\right) E_y = \frac{v E \sin \theta}{c^2}$$

$$B'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q v \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \sin \theta}{r^2}$$

On retrouve la loi de Biot et Savart, B'_z n'est d'ailleurs autre que la composante B_ϕ en coordonnées sphériques, à cause de la symétrie de révolution autour de Oz . On a dessiné schématiquement le champ \vec{E} dans R et le champ \vec{B}' dans R' (il y a aussi un champ \vec{E}' qu'on n'a pas fait figurer partout pour alléger la figure).

Cet exemple simple permet de comparer les structures des singularités des deux champs autour de leur source élémentaire. Il permet aussi de comparer le caractère polaire de \vec{E} et le

caractère axial de \vec{B} . (S'il existait des mono-pôles magnétiques, un traitement tout à fait symétrique les ferait apparaître comme sources réelles du champ magnétique dans un référentiel où ils sont au repos, et comme sources de rotationnel du champ électrique dans un référentiel où ils sont en mouvement).

Le fait qu'il peut exister des lignes de champ \vec{B} fermées montre qu'il n'existe pas en général de potentiel scalaire dont \vec{B} serait le gradient. Par contre, puisque $\text{div } \vec{B} = 0$, on peut faire dériver \vec{B} d'un potentiel-vecteur \vec{A} , par $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Un calcul classique, à partir de (6) montre que l'on peut prendre :

$$\vec{A}(\vec{r}_M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} d\tau' \quad (9)$$

qui, pour des courants dans les conducteurs filiformes, devient une intégrale sur le contour des circuits, $id\vec{l}$ remplaçant $\vec{j}d\tau'$. On vérifie aisément que $\text{rot } \vec{A}$, calculé d'après (9) redonne (7). \vec{A} n'est défini qu'à un gradient près (transformation de jauge).

b) Passons maintenant au cas des champs dont les sources sont des dipôles magnétiques. On peut transposer ici le traitement fait en électrostatique, avec un potentiel scalaire magnétique :

$$\mathcal{V}(\vec{r}_M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \vec{r}}{r^3} d\tau' \quad (10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}_M) = -\text{grad}_M \mathcal{V}(\vec{r}_M).$$

Pour un système ne contenant pas de courants réels, transportant effectivement des charges, qu'elles soient accessibles comme celles des courants de conduction ou convection, ou liées à la matière comme celles de polarisation, on peut utiliser \mathcal{V} et obtenir des calculs assez simples dans nombre de cas. Cependant, il est utile de chercher le potentiel-vecteur pour le cas le plus général. Diverses méthodes sont possibles (on trouvera dans la réf 1 - ch. 7-11, un calcul basé sur une sorte de développement multipolaire, plus complexe qu'en électrostatique). On va utiliser ici une méthode simple basée sur l'analogie d'un petit circuit fermé plan et d'un dipôle. (Cette analogie est démontrée habituellement par la considération du potentiel scalaire magnétique). On utilise un courant circulaire centré en O dans le plan xOy, de

rayon a . On va calculer \vec{A} en M défini par ρ et z en coordonnées cylindriques, et placé ici dans Oyz .

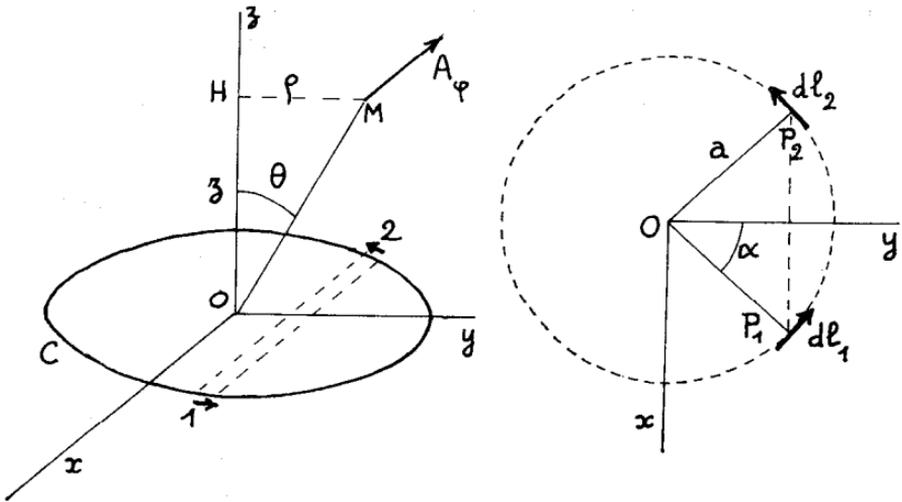


Fig. 2

Associons deux à deux les éléments \vec{dl}_1 et \vec{dl}_2 du circuit symétrique par rapport à Oy (mais évidemment orientés suivant le sens du courant). Il est clair que $P_1M = P_2M$, et :

$$\vec{dA} = \vec{dA}_1 + \vec{dA}_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{1}{P_1M} (\vec{dl}_1 + \vec{dl}_2)$$

$\vec{dl}_1 + \vec{dl}_2$ est un vecteur parallèle à Ox donc \vec{dA} se réduit à la composante dA_x en coordonnées cylindriques. Le calcul s'achève aisément :

$$P_1M = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + (\rho - a \cos \alpha)^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \alpha}$$

$$|\vec{dl}_1 + \vec{dl}_2| = 2a \cos \alpha \, d\alpha$$

$$dA_\varphi = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2}} \left(1 - \frac{2a\rho \cos \alpha}{\rho^2 + z^2 + a^2} \right)^{-1/2} \cdot 2a \cos \alpha \, d\alpha.$$

Il reste à intégrer de 0 à π , mais comme on va s'intéresser au dipôle considéré comme singularité du champ, on va faire tendre vers zéro. Il suffit de développer la parenthèse en série du binôme. Le premier terme donne zéro en intégrant et il vient

$$(r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = OM).$$

$$A_{\varphi} = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 i}{4 \pi r} \cdot \frac{a \cos \alpha}{r^2} \cdot 2 a \cos \alpha \, d\alpha =$$

$$\frac{\mu_0 i a^2 \varrho}{4 r^3} = \frac{\mu_0}{4 \pi} \cdot i a^2 \pi \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^2} \quad (11)$$

$i a^2 \pi = i S$ est le moment magnétique du circuit. C'est un vecteur $\vec{\mathcal{M}}_0$ porté par Oz. Avec $\vec{r}_1 = \vec{OM}$, on peut écrire :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{\vec{\mathcal{M}}_0 \wedge \vec{r}_1}{r^3}$$

avec nos conventions le dipôle est en P et $\vec{r} = \vec{MP}$ donc $\vec{r} = -\vec{r}_1$. Pour les dipôles répartis en volume, avec une densité d'aimantation $\vec{\mathcal{M}}$, il vient finalement :

$$\vec{A}(\vec{r}_M) = -\frac{\mu_0}{4 \pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau' = \dots$$

$$\dots -\frac{\mu_0}{4 \pi} \int_{\Omega} \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \wedge \vec{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau' \quad (12)$$

On remarquera l'analogie entre cette expression de \vec{A} à partir de $\vec{\mathcal{M}}$ et l'expression (7) de \vec{B} à partir de \vec{j} , qui est la loi de Biot et Savart. Nous reviendrons sur cette analogie.

V. COURANTS AMPERIENS.

On a dit plus haut qu'il était inutile, et même dénué de sens physique, de chercher à représenter un dipôle élémentaire par un système de courants « microscopiques », à l'échelle de l'atome ou de la particule. Par contre, une distribution volumique de dipôles est équivalente à un système de courants macroscopiques, dits courants ampériens.

Pour trouver ces courants, transformons l'expression (12) de \vec{A} :

$$\frac{4 \pi}{\mu_0} \vec{A}(\vec{r}_M) = \int_{\Omega} \left[\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{\text{grad}}_P \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau' = \dots$$

$$\dots \int_{\Omega} \frac{1}{r} (\vec{\text{grad}}_P \wedge \vec{\mathcal{M}}) d\tau' - \int_{\Omega} \vec{\text{grad}}_P \wedge \left(\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right) d\tau'$$

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}_p \wedge$ n'est autre que $\overrightarrow{\text{rot}}_p$, quant au dernier terme, on le transforme en intégrale de surface au moyen de la relation :

$$\int_{\Sigma} \vec{A} \wedge d\vec{S} = - \int_{\Omega} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) d\tau$$

(Cette relation est rarement donnée dans les formulaires d'analyse vectorielle, on la démontre aisément en projetant sur des axes cartésiens). La dernière intégrale devient donc :

$$+ \int_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}}}{r} \wedge d\vec{S} = \int_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{n}}{r} d\vec{S}$$

la normale \vec{n} à la surface Σ étant orientée vers l'espace extérieur à Ω . Finalement :

$$\vec{A}(r_M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{r} (\overrightarrow{\text{rot}}_p \overrightarrow{\mathcal{M}}) d\tau' + \int_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{n}}{r} d\vec{S} \right\} \quad (13)$$

Si l'on choisit pour Σ la surface limitant le milieu aimanté où règne l'aimantation $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{r})$, on voit par identification avec (9) que le milieu aimanté, distribution de dipôles, peut être remplacé par les courants ampériens :

- courant ampérien en volume : $\vec{j}_v = \overrightarrow{\text{rot}}_p \overrightarrow{\mathcal{M}}$ (densité volumique),
- courant ampérien en surface : $\vec{j}_s = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{n}$ (densité surfacique).

Pour un milieu dont l'aimantation est uniforme, \vec{j}_v s'annule

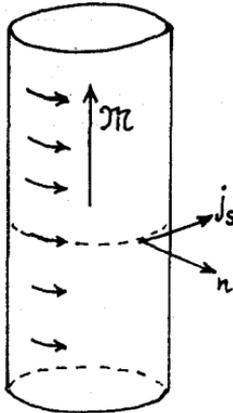


Fig. 3

et il ne reste que les courants superficiels. C'est le cas (idéal) du barreau aimanté à aimantation uniforme, équivalent à un solénoïde bobiné sur sa face latérale (fig. 3). Les deux systèmes créent le même champ \vec{B} dans tout l'espace extérieur à l'aimant.

VI. THEOREME D'AMPERE - COURANT « TOTAL » - LOI LOCALE.

Le théorème d'Ampère, expression intégrale, peut s'obtenir à partir de la loi de Biot et Savart pour des circuits fermés, puis pour des courants en volume. Si T est un trajet fermé quelconque sur lequel on appuie une surface S :

$$\oint_T \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

En transformant l'intégrale du premier membre en intégrale de surface au moyen de la relation de Stokes, on obtient la loi locale :

$$\text{rot}_M \vec{B}(r_M) = \mu_0 \vec{j}(r_M). \quad (15)$$

Cette relation impose $\text{div } \vec{j} = 0$, relation qui n'est pas satisfaite en régime variable à cause de la conservation de l'électricité.

On est conduit à adopter pour \vec{j} le courant « total », somme des courants réels \vec{j}_r , de conduction ou convection, des courants ampériens en volume, du courant correspondant aux charges de polarisation et enfin du « courant de déplacement » de Maxwell :

$$\vec{j} = \vec{j}_r + \text{rot } \vec{\mathcal{C}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (16)$$

le dernier terme subsiste dans le vide.

La relation locale (14) donne, avec $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

En régime permanent, on choisit habituellement \vec{A} de manière à avoir $\text{div } \vec{A} = 0$, alors :

$$\nabla_M^2 \vec{A}(r_M) = -\mu_0 \vec{j}(r_M). \quad (17)$$

Cette relation est analogue à (4), analogie évidente dans le formalisme de l'électromagnétisme relativiste, où \vec{A} et V/c forment un quadrvecteur, de même que \vec{j} et qc .

La condition $\text{div } \vec{A} = 0$ est automatiquement satisfaite avec \vec{A} donné par (9), si les courants n'existent que dans un domaine borné de l'espace. En effet, appliquons à \vec{A} l'opérateur div_M , qui permute évidemment avec l'intégration sur \vec{r}' et n'agit pas sur $\vec{j}(\vec{r}')$.

$$\begin{aligned} \text{div}_M \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{j}(\vec{r}') \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' = \dots \\ &\dots - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{j}(\vec{r}') \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_P \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' \end{aligned}$$

maintenant l'intégrand ne dépend que de \vec{r}' et on utilise l'égalité :

$$\text{div} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \text{div } \vec{j}$$

en régime permanent $\text{div } \vec{j} = 0$, on applique alors la relation de Green-Ostrogradzky :

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \text{div}_P \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\vec{j} \cdot d\vec{S}}{r}$$

Si \vec{j} n'existe que dans un domaine borné, les lignes de \vec{j} se referment en régime permanent et on peut choisir Σ assez grand pour que $\vec{j} \cdot d\vec{S}$ soit nul partout sur Σ , donc $\text{div } \vec{A} = 0$.

VII. UNICITE DE LA SOLUTION.

De même qu'en électrostatique (§ II), avec l'approche par l'action à distance, il paraît évident que la solution de l'équation locale (16), lorsque les courants sont donnés, dans tout l'espace, est la définition (9) de \vec{A} . Ici aussi, il n'est pas sans intérêt d'examiner l'unicité de la solution et de chercher quelles conditions à la frontière d'un domaine sont nécessaires pour assurer

l'unicité de \vec{A} dans ce domaine. Le calcul est plus compliqué qu'en électrostatique et sera seulement esquissé ici (cf. réf. 1 - ch. 8-6). Il faut utiliser la forme vectorielle de la relation de Green-

Ostrogradzky. Soit le vecteur $\vec{V} = \vec{M} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{N}$, où \vec{M} et \vec{N} sont deux champs vectoriels arbitraires. En appliquant la relation de Green-Ostrogradzky à ce vecteur, on obtient :

$$\int_{\Omega} \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{M} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{N} - \vec{M} \cdot [\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{N})] \right\} d\tau = \int_{\Sigma} [\vec{M} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{N}] \cdot d\vec{S}.$$

Soit alors un domaine D où ne se trouvent pas de courants,

alors $\vec{\text{rot}} \vec{B} = 0$. En faisant $\vec{M} = \vec{N} = \vec{A}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_D (\vec{\text{rot}} \vec{A})^2 d\tau &= \int_D B^2 d\tau = \int_{\Sigma} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \dots \\ &\dots \int_{\Sigma} (\vec{B} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{A} dS = \int_{\Sigma} \vec{B}'_t \cdot \vec{A} dS \end{aligned}$$

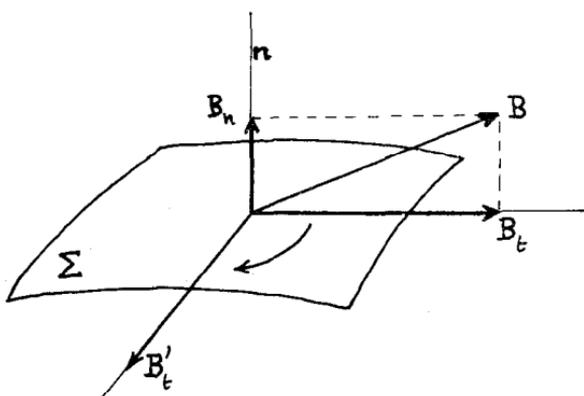


Fig. 4

La fig. 4 indique comment \vec{B}'_t s'obtient à partir de la composante \vec{B}_t de \vec{B} . Si maintenant, dans les relations ci-dessus, \vec{A} et \vec{B} sont les différences entre deux solutions, nous voyons que \vec{B} s'annulera partout, donc que les deux solutions sont identiques, si l'intégrale ci-dessus est nulle. Ceci aura lieu si les conditions aux limites sur Σ imposent la composante tangentielle de \vec{A} ou de \vec{B} .

En résumé, le champ magnétique \vec{B} et le potentiel vecteur \vec{A} dans un domaine D vide de courants sont entièrement définis par la donnée des composantes tangentielles de \vec{B} ou de \vec{A} sur la frontière. On comparera avec le cas de l'électrostatique où, dans le théorème analogue, intervient la composante normale de \vec{E} , ou la valeur de V.

VIII. EXEMPLES.

Le potentiel-vecteur et sa relation avec le champ paraissent souvent compliqués aux débutants, et d'ailleurs la considération de \vec{A} est rarement utile dans les calculs élémentaires des champs des systèmes simples. Cependant \vec{A} joue un rôle important dans les problèmes plus complexes, tels par exemple les problèmes de courants de Foucault. Il est donc utile d'acquérir une certaine familiarité avec cette notion.

La relation entre \vec{A} et \vec{B} est éclairée par l'équation :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi \text{ de } \vec{B} \text{ à travers } S.$$

S étant une surface bornée par le contour C. Les lignes de champs de \vec{A} et \vec{B} sont donc mutuellement entrelacées, de même que celles de \vec{B} et \vec{j} par suite de la relation (14). En régime permanent, les divergences des trois vecteurs \vec{j} , \vec{B} , \vec{A} sont nulles et leurs lignes de champs sont fermées. Par exemple, la disposition schématique de ces lignes pour un courant circulaire fermé est figurée ci-après (fig. 5).

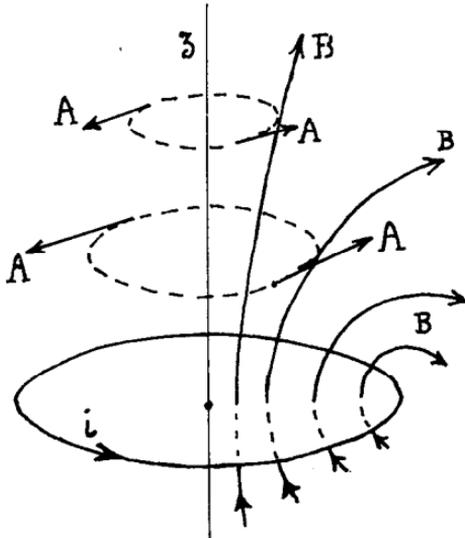


Fig. 5

On va se borner ci-après à quelques cas simples (on trouvera des exemples plus complets dans la réf. 2 § 7).

a) LE SYSTÈME A L'INVARIANCE PAR TRANSLATION LE LONG DE OZ. C'est le cas des systèmes de courants rectilignes infinis parallèles à Oz, avec ou sans matière magnétique limitée par des surfaces cylindriques de génératrices parallèles à Oz. Supposons d'abord que \vec{B} n'a pas de composante B_z . Alors :

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

condition satisfaite par une infinité de fonctions $A_x(x, y)$, $A_y(x, y)$.

Le vecteur \vec{A}_\perp de composantes A_x et A_y est alors un gradient, donc cette double infinité correspond à des transformations de jauge.

Nous pouvons donc poser $A_x = A_y = 0$. \vec{A} se réduit à la composante A_z . (Nous remarquons que sur les surfaces frontières éventuelles indiquées ci-dessus, A_z sera la composante tangentielle,

cf. § précédent). Les composantes de \vec{B} sont alors :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

Les courbes $A_z = C^te$ dans le plan xOy obéissent à :

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy = 0 = -B_y dx + B_x dy$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x}$$

ce sont donc les lignes de champ de \vec{B} .

Le cas le plus simple de cette catégorie est celui du courant rectiligne indéfini, filiforme. Le calcul de \vec{A} (par (9) conduit à une intégrale divergente, ce qui est dû à l'extension à l'infini du domaine où existent les courants. On tourne la difficulté en associant deux courants égaux et de sens opposés, ce qui revient d'ailleurs à fermer le circuit à l'infini.

Un calcul classique donne, pour deux courants filiformes (fig. 6) :

$$A_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \frac{r'}{r}.$$

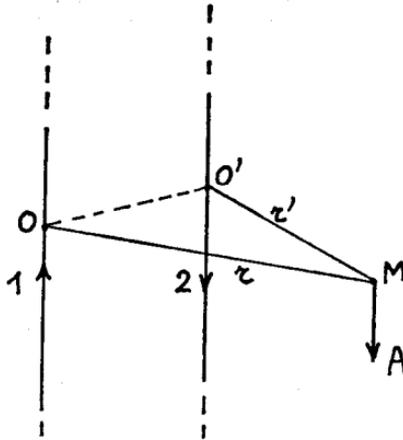


Fig. 6

Si on éloigne maintenant le fil n° 2 à l'infini, il reste :

$$A_z = C^{te} - \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln r$$

pour le potentiel-vecteur créé par le fil n° 1. En fait, il faut entendre par courant rectiligne indéfini, un fil assez long avec un circuit de retour très éloigné, et n'appliquer la relation précédente que pour r petit devant la longueur du fil. Il en est d'ailleurs de même pour l'expression $B_\varphi = \mu_0 i / 2\pi r$ obtenue par intégration de la loi de Biot et Savart.

Un autre cas simple est celui du champ uniforme \vec{B} dirigé suivant Oz . Alors :

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = |\vec{B}| = B$$

une solution possible est : $A_x = \lambda B_y$, $A_y = (\lambda + 1) B_x$ où λ est un nombre arbitraire. Si $\lambda = -0,5$, on trouve le vecteur \vec{A} qui sera obtenu plus loin.

b) SYSTÈME DE RÉVOLUTION. Ce cas est très important, en particulier en optique corpusculaire (lentilles magnétiques, par exemple). Nous supposons que \vec{B} n'a pas de composante B_φ en

coordonnées cylindriques ayant pour axe Oz l'axe de révolution. Alors :

$$B_{\varphi} = 0 = \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varrho}$$

comme précédemment, parmi l'infinité de solutions possibles, nous choisissons $A_{\varphi} = A_z = 0$. \vec{A} se réduit à la composante A_{φ} , les lignes de \vec{A} sont des cercles d'axe Oz et $\text{div } \vec{A}$ est évidemment nul. \vec{B} est donné par :

$$B_{\varrho} = -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \quad B_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A_{\varphi}) \quad B_{\varphi} = 0.$$

Sur un cercle d'axe Oz et de rayon ϱ , la circulation de \vec{A} est :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi\varrho A_{\varphi} = \Phi(\vec{B}) = \Phi(\varrho, z)$$

le tube de champ, de révolution, qui s'appuie sur ce cercle, correspond à $\Phi = C^{\text{te}}$, donc les courbes dans un plan ϱ, z , le long desquelles $\varrho A_{\varphi} = C^{\text{te}}$ sont les lignes de champ de \vec{B} . On voit que la quantité ϱA_{φ} joue un rôle important. Comme \vec{B} reste fini sur l'axe Oz, en faisant tendre ϱ vers zéro, $\Phi \approx \pi\varrho^2 B \rightarrow 0$, donc ϱA_{φ} varie comme ϱ^2 et A_{φ} comme ϱ , il tend donc aussi vers zéro.

A ce cas se rattache le dipôle étudié plus haut, mais il vaut mieux alors passer en coordonnées sphériques ($\varrho = r \sin \vartheta$). La relation (11) donne alors :

$$2\pi\varrho A_{\varphi} = 2\pi\varrho \frac{\mu_0 \mathcal{M}_0}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} = K \varrho \frac{\sin \vartheta}{r^2} = K \frac{\sin^2 \vartheta}{r}$$

Les lignes de champ du dipôle obéissent à la relation bien connue $\sin^2 \vartheta = C^{\text{te}} \times r$ qui s'obtient aussi par intégration à partir des composantes B_r et B_{ϑ} (fig. 7).

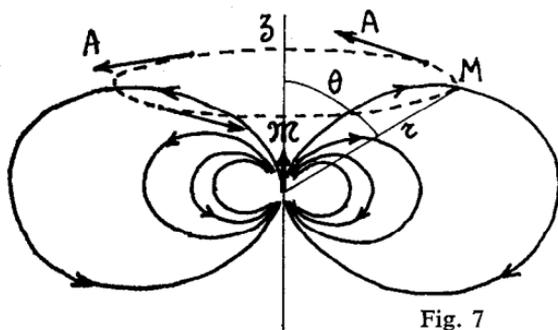


Fig. 7

Le champ uniforme peut aussi être considéré comme un système de révolution, \vec{B} est dirigé suivant Oz. On prend une origine O arbitraire (fig. 8) :

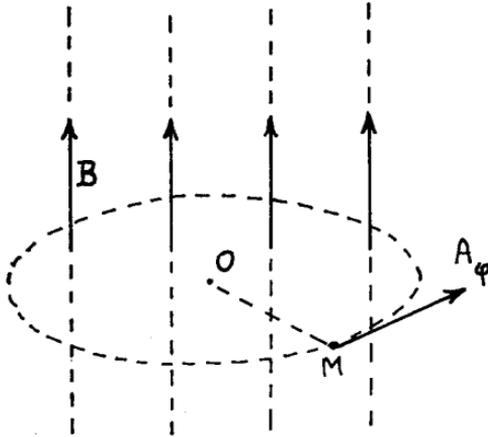


Fig. 8

$$2 \pi \varrho A_{\varphi} = \Phi = \pi \varrho^2 B \quad A_{\varphi} = \frac{1}{2} B \varrho.$$

On voit aisément que c'est bien la solution $A_x = -\frac{1}{2} B y$
 $A_y = +\frac{1}{2} B x$ trouvée plus haut. On montre facilement que le

changement d'origine O équivaut à l'addition à \vec{A} d'un vecteur constant, c'est-à-dire d'un gradient, donc il s'agit d'une transformation de jauge. Le courant circulaire étudié au § IV. est aussi un exemple de ce cas. Si on ne fait pas l'approximation $a \rightarrow 0$, l'intégrale de $d A_{\varphi}$ indiquée au § IV. se ramène aux intégrales elliptiques de Legendre. On peut aussi opérer en coordonnées sphériques de centre O non nécessairement confondu avec le centre du cercle, mais évidemment sur l'axe, A_{φ} se développe alors en polynômes associés de Legendre, ou harmoniques sphériques, ce qui permet ensuite une intégration simple pour des bobines circulaires de section non négligeable.

Faute de place, on ne développera pas ici les méthodes qui permettent de trouver le développement limité de ϱA_{φ} dans les deux cas suivants :

- 1) pour ρ petit, en fonction de ρ , si $B_z(0, z)$ est connu sur l'axe. C'est le cas des lentilles magnétiques ;
- 2) pour z petit, en fonction de z , au voisinage d'un plan de symétrie Oxy du système, si $B_z(\rho, 0)$ est connu dans ce plan. C'est le cas de la focalisation magnétique dans les accélérateurs ou les prismes magnétiques.

Terminons en remarquant que l'on peut superposer les cas (a) et (b), ce qui permet de lever les restrictions faites sur B_z en (a) ou sur B_ρ en (b). Par exemple, si on ajoute au cas (b) une composante B_ρ créée par un système du type (a) ayant la symétrie de révolution, il suffit d'ajouter à \vec{A} la composante A_z correspondante.

IX. RETOUR SUR LE CHAMP DE L'ÉLÉMENT DE COURANT ET LE POTENTIEL - VECTEUR DU DIPOLE.

Nous avons vu précédemment l'analogie entre les expressions :

$$\vec{d}\vec{B}_E = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}_1}{r^3} \quad \vec{d}\vec{A}_D = \frac{\mu_0 d\tau'}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}_1}{r^3}$$

du champ créé par l'élément de courant idl et du potentiel vecteur créé par l'élément de volume aimanté $\vec{\mathcal{M}} d\tau'$. Les sources sont en O et on examine $\vec{d}\vec{B}$ ou $\vec{d}\vec{A}$ en M , avec $\vec{r}_1 = \vec{OM}$. D'après la relation locale $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ on s'attendrait à trouver en M $\vec{\text{rot}} \vec{d}\vec{B}_E = \vec{0}$, or ce n'est pas le cas, puisque $\vec{d}\vec{B}_E$ a la même structure que $\vec{d}\vec{A}_D$ et que le rotationnel de ce dernier n'est autre que le champ $\vec{d}\vec{B}_D$ du dipôle. Posons $\vec{V} = \vec{\text{rot}} \vec{d}\vec{B}_E$ et utilisons les expressions classiques du champ du dipôle, il vient en coordonnées sphériques :

$$V_r = \frac{2\mu_0 i dl \cos \vartheta}{4\pi r^3} \quad V_\vartheta = \frac{\mu_0 i dl \sin \vartheta}{4\pi r^3}$$

On peut aussi les obtenir (voir Note p. 253) par le calcul de $\vec{\text{rot}} \vec{d}\vec{B}_E$.

En résumé, $\vec{d}\vec{B}_E$ ne semble pas satisfaire la loi locale de Maxwell-Ampère. Ce paradoxe apparent résulte ici de ce que l'élément $i d\vec{l}$ ne peut exister seul comme source en régime per-

manent, et il n'y a aucun sens à appliquer la loi locale à un élément du champ total. Mais considérons alors une particule en mouvement et revenons à la fig. 1, le champ créé par cette charge est $\vec{d}\vec{B}_E$ avec $i\vec{dl}$ remplacé par $\vec{q}\vec{v}$. Ce champ a maintenant un sens physique parfaitement clair et on doit vérifier la loi locale, mais comme le régime n'est pas permanent, la loi locale s'écrit maintenant :

$$\text{rot } \vec{d}\vec{B}_E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il est facile de vérifier l'exactitude de cette relation. Soient en

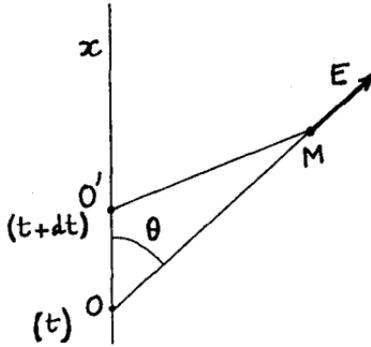


Fig. 9

effet (fig. 9), O et O' les positions de q aux temps t et t + dt.

$$OO' = vdt.$$

La variation $\vec{d}\vec{E}$ de E en M est :

$$\vec{d}\vec{E} = \vec{E}(t + dt) - \vec{E}(t)$$

c'est le même champ que celui du dipôle ayant + q en O' et - q en O, de moment $\vec{q}\vec{v}dt$, donc $\partial\vec{E}/\partial t$ est le champ en M d'un dipôle de moment $\vec{q}\vec{v}$ en O. Donc :

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qv \cos \theta}{r^3} \quad \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qv \sin \theta}{r^3}.$$

On voit que $\mu_0 \epsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$ a bien les composantes V_r et V_θ définies précédemment.

Dans la fig. 1 on a, en tout point sauf à l'origine $\text{div } \vec{E} = 0$ dans R, et $\text{div } \vec{E} = 0$ dans R' au second ordre près en v/c , enfin $\text{rot } \vec{B}' = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}$ dans R'. Comme on l'a fait remarquer précédemment, c'est la singularité à l'origine qui différencie les deux champs, qui partout ailleurs obéissent aux équations de Maxwell.

Note.

On écrit $\vec{d}B_E$ sous la forme :

$$\vec{d}B_E = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \vec{dl} \wedge \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right)$$

et on utilise l'identité :

$$\text{rot}(\vec{P} \wedge \vec{Q}) = (\text{div } \vec{Q}) \vec{P} - (\text{div } \vec{P}) \vec{Q} + (\vec{Q} \cdot \text{grad}) \vec{P} - (\vec{P} \cdot \text{grad}) \vec{Q}$$

les opérateurs étant relatifs au point M, leur action sur \vec{dl} donne un résultat nul, il ne reste que le 1^{er} et le 4^{me} terme :

$$\text{rot } \vec{d}B_E = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[(\vec{dl} \cdot \text{grad}_M) \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) - \vec{dl} \nabla^2_M \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

mais $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$ est nul partout sauf en O,

et $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{u}}{r^2}$ où \vec{u} est le vecteur unitaire de \vec{OM} .

L'opérateur $\vec{dl} \cdot \text{grad}$ a les composantes (fig. 10) :

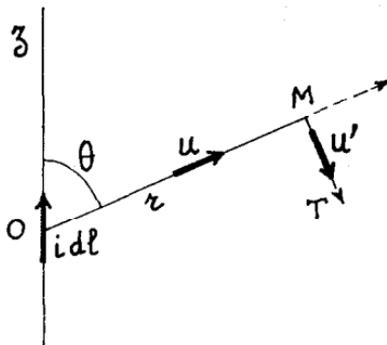


Fig. 10

$$dl \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \text{ sur } \overrightarrow{OM}; \quad - dl \sin \vartheta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \text{ sur } \overrightarrow{MT}.$$

Il vient :

$$V_r = \frac{\mu_0 i dl \cos \vartheta}{4 \pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\vec{u}}{r^2} \right) = \frac{2 \mu_0 i dl \cos \vartheta}{4 \pi r^3} \vec{u}$$

$$V_\vartheta = \frac{\mu_0 i dl \sin \vartheta}{4 \pi r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(-\frac{\vec{u}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 i dl \sin \vartheta}{4 \pi r^3} \vec{u}'$$

\vec{u}' étant porté par MT, car $d\vec{u} = \vec{u}' d\vartheta$.

On retrouve bien les expressions données précédemment.

A. MOUSSA (Grenoble).

BIBLIOGRAPHIE

Les ouvrages d'électromagnétisme à un niveau avancé sont nombreux et ne peuvent être tous cités ici. Le choix parmi eux peut être principalement guidé par le goût personnel. L'ouvrage de Panofsky et Phillips est d'une remarquable concision malgré l'ampleur du domaine embrassé de façon très complète. L'ouvrage de Smythe donne un grand nombre d'exemples de calculs de champs, et contient un exposé assez détaillé des courants de Foucault. L'ouvrage de Stratton analyse en détail les méthodes de résolution des équations locales et étudie longuement la propagation des ondes. Les deux ouvrages de Landau et Lifchitz contiennent les exposés de nombreuses applications.

- 1) PANOFSKY, PHILLIPS. — *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, 2^{me} éd. 1962.
- 2) SMYTHE. — *Static and dynamic Electricity*. Mc Graw Hill, 2^{me} éd. 1950.
- 3) STRATTON. — *Electromagnetic theory*. Mc Graw Hill, 1941.
- 4) LANDAU, LIFCHITZ. — *Théorie du champ. Electrodynamique des milieux continus*. Editions de Moscou.