

Oscillateurs sinusoidaux "LC" : systèmes à réaction positive ou systèmes à résistance dynamique négative

INTRODUCTION.

L'objet de cet exposé est de montrer que l'on peut aborder l'étude d'un oscillateur « LC », par la méthode classique qui consiste à le considérer comme un système bouclé à la réaction positive, ou bien en développant l'idée qu'il est l'association d'un circuit résonnant et d'un dipôle à résistance dynamique négative qui permet de compenser les pertes Joule lors de la décharge oscillante du condensateur dans la bobine.

Avant d'aborder le cœur du sujet, démystifions quelque peu le vocabulaire spécialisé employé par l'électronicien :

Un *système électronique* est un assemblage de composants qui a pour but de *transmettre* en général à une grandeur électrique de sortie s une loi de variation en fonction du temps imposée à une autre grandeur électrique d'entrée e (grandeur de commande). Si le système est *linéaire* e et s vérifient une équation différentielle linéaire ; dans le cas d'une entrée *harmonique*, la solution permanente e à l'équation différentielle est aussi harmonique ; c'est la solution particulière.

$$\text{Notons : } e = E_M \cos(\omega t + \vartheta) = \Re E_M e^{j\vartheta} e^{j\omega t}$$

$$s = S_M \cos(\omega t + \vartheta + \Phi) = \Re S_M e^{j(\vartheta+\Phi)} e^{j\omega t}$$

\Re : partie réelle de...

On appelle *transmittance* ou *fonction de transfert complexe* du système :

$$H(j\omega) = \underline{S}/\underline{E}$$

rapport des amplitudes complexes $\underline{S} = S_M e^{j(\vartheta+\Phi)}$ et $\underline{E} = E_M e^{j\vartheta}$.

Le système est *bouclé* ou est à *réaction*, si son entrée est constituée par la somme algébrique de la grandeur de commande et d'une grandeur de réaction élaborée à partir de la grandeur de sortie par un système qui constitue la *chaîne* ou la *boucle de réaction* ou de retour.

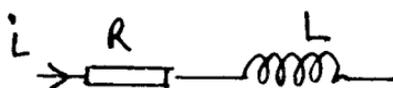
On matérialise l'addition par un *sommateur* (symbole à la fig. 1).

La chaîne de retour est souvent constituée à l'aide d'éléments passifs ; accessible par deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, elle prend alors le nom de *quadripôle*.

Si sa transmittance est réelle, positive, inférieure à un, il s'agit souvent d'un *atténuateur* ; si sa transmittance est complexe, elle évolue avec la fréquence, il s'agit d'un *quadripôle sélectif*.

Les éléments passifs linéaires employés ne sont pas toujours parfaits, aussi est-on amené à les caractériser par leur *facteur de qualité* en régime harmonique, noté Q :

$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{valeur maximale de l'énergie emmagasinée}}{\text{énergie transformée en chaleur pendant une période}}$
ainsi pour une bobine :



$$i = I_M \sin \omega t$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} LI_M^2}{\frac{1}{2} RI_M^2 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)} = \frac{L\omega}{R}$$

Quant aux *amplificateurs opérationnels*, dont il sera question dans la suite de l'exposé, ils ont déjà été mentionnés dans de précédents bulletins auxquels je renvoie le lecteur (en particulier le n° 601 : Opération pH-mètre, page 624...).

A. CONCEPTION D'UN OSCILLATEUR « LC » A PARTIR DE LA THEORIE DES SYSTEMES BOUCLES

I. CONDITIONS D'AMORÇAGE DES OSCILLATIONS.

I.1. Définitions.

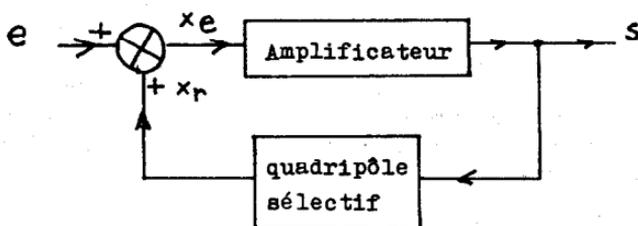


Fig. 1

Soit un système bouclé comportant un amplificateur (par exemple de tension) et un quadripôle sélectif réalisé par un circuit résonnant :

s est la tension de sortie,

e est la tension d'entrée,

x_e est la tension d'entrée de la chaîne directe,

x_r est la tension de sortie de la chaîne de retour.

Grâce au sommateur, on peut écrire l'équation : $x_e = e + x_r$.

On considère une entrée sinusoïdale dont la pulsation est réglable :

$$e = E_M \cos(\omega t).$$

Dans le domaine d'amplitudes de $s(t)$ où l'amplification est linéaire, et dans les conditions de connexions du schéma de la fig. 1, on définit en notation complexe :

a) l'amplification de la chaîne directe : $\underline{A} = \frac{\underline{S}}{\underline{X_e}}$,

b) la transmittance de la chaîne de retour : $\underline{B} = \frac{\underline{X_r}}{\underline{X_e}}$,

c) la transmittance du système bouclé : $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$,

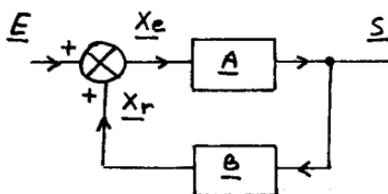


Fig. 2

$$\underline{S} = \underline{A}[\underline{X_r} + \underline{E}] = \underline{A}[\underline{B}\underline{S} + \underline{E}]$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{A}}{1 - \underline{A}\underline{B}}$$

d) la transmittance de boucle ouverte : $\underline{G} = \frac{\underline{X_r}}{\underline{X_e}} = \underline{A} \cdot \underline{B}$.

1.2. Réaction positive et stabilité.

Pour faciliter la compréhension de l'exposé, on suppose que l'amplificateur est à très large bande, à résistance de sortie très faible par rapport à sa charge ; dans ces conditions, \underline{A} est réel et on le choisit positif : $\underline{A} = A_0$ (amplification supposée réglable).

Seule, \underline{B} dépend de la pulsation ω .

1.2.1. LIEU DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE DANS LE PLAN COMPLEXE (NYQUIST).

A $G(j\omega)$, on associe le vecteur \overrightarrow{OM} dans le plan complexe :

$$|\overrightarrow{OM}| = |A_0 \underline{B}| ; (\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OM}) = \text{Arg}(A_0 \underline{B}) = \text{Arg} \underline{B}.$$

Lorsque ω varie de zéro à l'infini, M décrit le lieu de transfert en boucle ouverte.

Exemple :

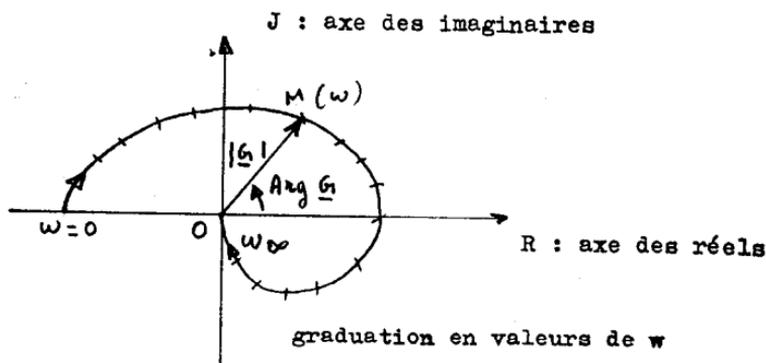


Fig. 3

1.2.2. RÉACTION POSITIVE.

En cherchant à comparer \underline{X}_e et \underline{E} , on définit la réaction positive :

$$\begin{aligned} \underline{X}_e &= \underline{E} + \underline{X}_r = \underline{E} + \underline{G} \underline{X}_e \\ (1 - \underline{G}) \underline{X}_e &= \underline{E}. \end{aligned}$$

Soit C sur l'axe des réels à l'abscisse + 1,

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leftrightarrow \overrightarrow{OC} \\ \underline{G} \leftrightarrow \overrightarrow{OM} \end{array} \right\} \text{ donc } (1 - \underline{G}) \leftrightarrow \overrightarrow{MC}$$

par conséquent,
$$\frac{\underline{X}_e}{\underline{E}} = \frac{1}{|1 - \underline{G}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{MG}|}$$

Si : $|\overrightarrow{MC}| < 1$ alors $|\underline{X}_e| > |\underline{E}|$.

Dans le domaine des fréquences où l'amplitude de la grandeur d'entrée de la chaîne directe est supérieure à l'amplitude de la grandeur d'entrée du système bouclé, on dit que le système est à *réaction positive*.

Ce domaine se situe à l'intérieur du cercle (Γ) de centre C et de rayon 1 (fig. 4).

A l'extérieur de (Γ) où $|\underline{X}_e| < |\underline{E}|$, le système est à *réaction négative*.

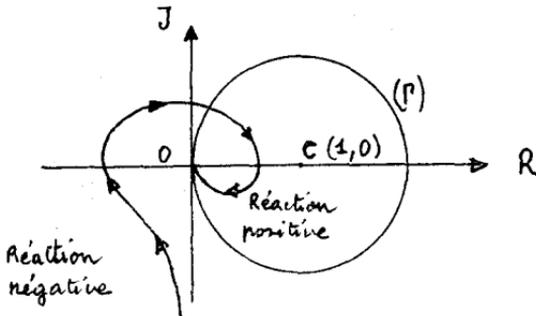


Fig. 4

1.2.3. STABILITÉ D'UN SYSTÈME BOUCLÉ.

Critère du revers.

Le critère du revers est une application de la transformation conforme, il s'énonce ainsi :

Un système bouclé linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte, dans le sens des fréquences croissantes, on laisse le *point critique* C (1,0) à sa gauche. Il est instable dans le cas contraire.

Ce critère n'est jamais en défaut pour les systèmes à déphasage minimal.

Pour (Γ_1), le système bouclé est stable.

Pour (Γ_2), le système bouclé est instable.

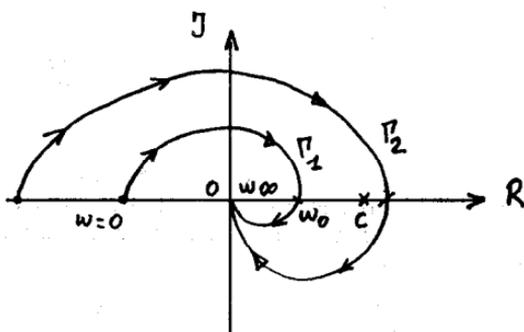


Fig. 5

Dans le cas d'instabilité, la fonction de transfert symbolique :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}, \quad (j\omega \text{ remplacé par } p),$$

dans laquelle p est la variable de la transformée de Laplace, possède des pôles réels nuls ou positifs et des pôles complexes à partie réelle positive. La réponse $s(t)$ à une excitation d'entrée $e(t)$ bornée est dans ce cas divergente ; l'instabilité amène le système à quitter son domaine de linéarité et il faut alors prendre en compte ses non-linéarités dans les équations.

1.2.4. OSCILLATEUR SINUSOÏDAL.

Si le lieu de transfert en boucle ouverte passe par le point critique, le système bouclé est en limite de stabilité, c'est un oscillateur sinusoïdal de pulsation ω_0 .

Cela signifie qu'il existe deux pôles imaginaires conjugués $\pm j\omega_0$ pour lesquels $\underline{H}(j\omega)$ devient infini, car $A_0 \underline{B}(j\omega_0) = 1$.

L'entrée $e(t)$ n'est plus nécessaire pour assurer une sortie sinusoïdale d'amplitude finie ; en effet, soit A_0 réglé à la valeur A'_0 telle que $A'_0 \underline{B}(j\omega_0)$ réel, inférieur à 1,

$$\text{alors : } \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{A'_0}{1 - A'_0 \underline{B}(j\omega_0)} ; \quad \frac{S_M}{E_M} = \frac{A'_0}{1 - A'_0 \underline{B}(j\omega_0)}$$

En agissant simultanément sur A_0 et E_M de façon à maintenir S_M constant, on augmente A_0 et $A_0 \underline{B}(j\omega_0)$ tend vers 1, il faut donc diminuer E_M jusque 0. A la fin de cette manipulation, la tension de sortie est sinusoïdale alors que la tension d'entrée est nulle ; toutefois nous n'avons aucun renseignement sur la valeur de l'amplitude S_M , la théorie linéaire est impuissante à la déterminer.

En résumé, on prévoit la condition d'amorçage et la fréquence des oscillations par la relation :

$$\boxed{A_0 \underline{B}(j\omega_0) = 1}$$

soit encore : $\underline{X}_r = \underline{X}_e$

ω_0 est obtenu par la résolution de : $\text{Arg}([\underline{B}(j\omega_0)]) = (2\pi)$.

A_0 doit être réglé à $\frac{1}{\underline{B}(j\omega_0)}$.

Pour A_0 supérieur à $\frac{1}{\underline{B}(j\omega_0)}$, l'amplitude des oscillations croît jusqu'au domaine de non-linéarité où en général elle se stabilise.

II. EXEMPLE.

Un amplificateur opérationnel, muni d'une réaction négative pour régler son gain, est l'amplificateur de la chaîne directe.

On admet son idéalisation : amplification interne, résistance d'entrée et bande passante infinies, résistance de sortie nulle.

La chaîne de retour est un circuit bouchon attaqué en courant. Soit le montage de la fig. 6 (l'entrée e nulle n'est pas représentée).

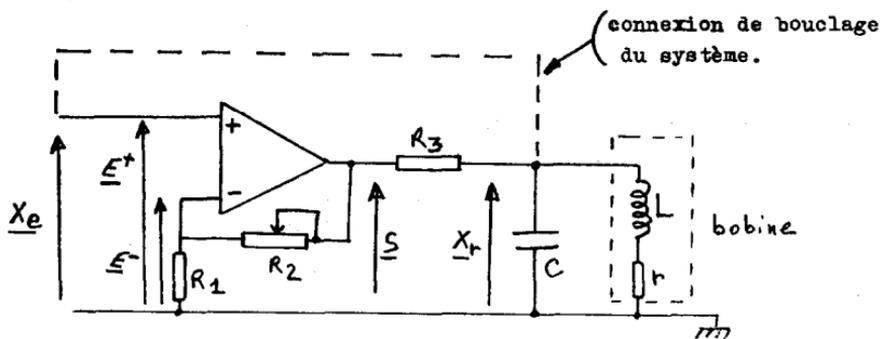


Fig. 6

RÉALISATION PRATIQUE.

$R_1 = 10^3$ ohms, R_2 : potentiomètre 10^4 ohms, $R_3 = 50 \cdot 10^3$ ohms.

Amp Op 741, $C = 0,22$ microfarads, Bobine AOIP 0,1 H.

CALCULONS LES EXPRESSIONS DE A_0 et \underline{B} :

a) dans la zone d'amplification linéaire : $\underline{E}^+ = \underline{E}^- = \underline{X}_e$.

$\underline{E^-}$ est en division potentiométrique sur \underline{S} puisque le courant d'entrée par la borne (—) est nul :

$$\underline{E^-} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{S} \quad \text{d'où} \quad \boxed{A_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}}$$

On règle A_0 par la résistance ajustable R_2 ;

b) *transmittance de retour.*

On admet les valeurs de C, L, r constantes au voisinage de la fréquence des oscillations :

$$\underline{B} = \frac{\underline{X_r}}{\underline{S}} = \frac{1}{1 + R_3 \left[jC\omega + \frac{1}{r + jL\omega} \right]}$$

$$\underline{B} = \frac{r + jL\omega}{R_3 + r + j(L + R_3 rC)\omega - R_3 LC\omega^2}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{B} \rightarrow \frac{r}{R_3 + r} ; \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{B} \rightarrow 0$$

\underline{B} est réel pour $\omega = \omega_0$ tel que :

$$\frac{L\omega}{r} = \frac{(L + R_3 rC)\omega}{R_3 + r - R_3 LC\omega^2}$$

d'où :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \cdot \left(1 - \frac{r^2 C}{L} \right)$$

et :

$$\underline{B}(j\omega_0) = \frac{r}{R_3 + r - R_3 LC\omega_0^2} = \frac{1}{1 + R_3 \frac{rC}{L}}$$

LIEU DE TRANSFERT de $\underline{B}(j\omega)$.

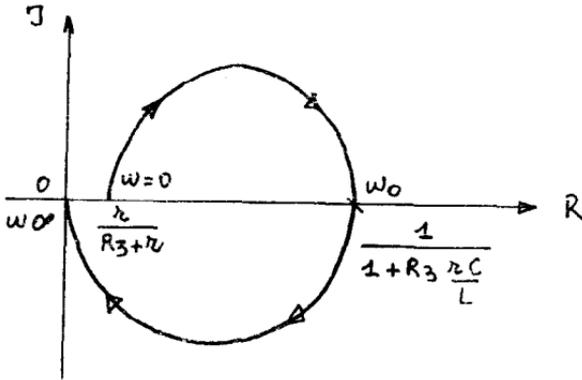


Fig. 7

HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES :

Le facteur de qualité de la bobine pour ω_0 : $Q_0 = \frac{L\omega_0}{r}$ est bien supérieur à 1.

On en déduit :

$$r^2 = \frac{L^2 \omega_0^2}{Q_0^2} = \frac{L}{C Q_0^2} \quad \text{d'où :} \quad \frac{r^2 C}{L} = \frac{1}{Q_0^2} \ll 1$$

par conséquent :

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

en posant :

$$R = \frac{L}{rC} = r Q_0^2 \gg r$$

$$\underline{B}(j\omega_0) = \frac{R}{R + R_3}$$

c) condition d'amorçage des oscillations.

$$A_0 \underline{B}(j\omega_0) = 1 \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R}{R + R_3} = 1.$$

R_2 doit donc être réglé pour satisfaire l'égalité :

$$R_2 = \frac{R_1 R_3}{R}$$

Remarque.

En ignorant la théorie des systèmes bouclés, on aurait pu rechercher l'équation différentielle du système dont $s(t)$ est la solution.

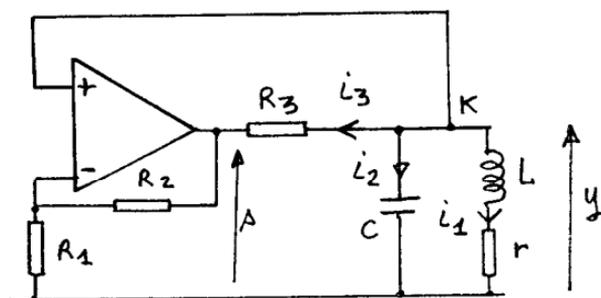


Fig. 8

On sait déjà que : $s = A_0 y = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot y$.

On applique la loi des nœuds en K :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

On écrit les équations partielles :

$$i_3 = \frac{y - s}{R_3}; \quad i_2 = C \frac{dy}{dt}; \quad y = L \frac{di_1}{dt} + r i_1$$

en éliminant s , i_1 , i_2 , i_3 , il vient :

$$\left(1 - \frac{r R_2}{R_3 R_1}\right) y + \left(r C - \frac{R_2 L}{R_1 R_3}\right) \frac{dy}{dt} + LC \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Le coefficient de y est normalement positif.

La condition d'amorçage s'obtient en écrivant que la solution à cette équation est sinusoïdale, soit :

$$\text{coefficient de } dy/dt \text{ nul : } rC - \frac{R_2}{R_1 R_3} \cdot L = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{R_1 R_3}{R},$$

il reste, après simplification :

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right) y + LC \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

dont la solution est sinusoïdale, de pulsation ω_0 , telle que :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{LC} \cdot \left(1 - \frac{r^2C}{L}\right).$$

Si R_2 est inférieur à $(R_1 R_3/R)$, le coefficient de dy/dt est positif, le système momentanément perturbé lors de la mise sous tension du montage évolue vers $y = 0$, par un régime oscillatoire amorti si le coefficient d'amortissement est inférieur à celui de l'amortissement critique.

Si R_2 est supérieur à $(R_1 R_3/R)$, le coefficient de dy/dt est négatif et y croît exponentiellement avec ou sans oscillations.

B. CONCEPTION D'UN OSCILLATEUR « LC » PAR ASSOCIATION D'UN CIRCUIT RESONNANT ET D'UN DIPOLE A RESISTANCE NEGATIVE

I. PRINCIPE.

En déchargeant un condensateur dans une bobine de *bonne qualité*, on constate que la tension à ses bornes évolue de façon

sinusoïdale exponentiellement amortie $\left(\frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} < 1\right)$.

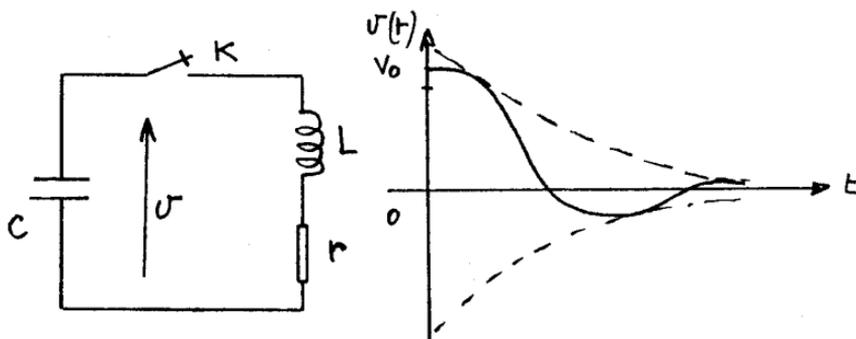


Fig. 9

L'amplitude ne se maintient pas constante car lors des échanges d'énergie électrostatique et électromagnétique, une puissance est consommée par effet Joule dans r .

L'amplitude des oscillations peut être maintenue constante à condition qu'un dipôle connecté en parallèle sur le circuit résonnant compense à chaque période la puissance consommée par r .

Une résistance négative $-R_N$, soumise à une tension $v = V\sqrt{2} \cos(\omega t)$ absorbe une puissance négative $P = V^2/(-R_N)$.

C'est la puissance V^2/R_N qui devra compenser les pertes Joule dans la résistance r .

Cette idée est développée ci-après puisque l'on sait que certains composants semi-conducteurs (transistor unijonction, diode tunnel, thyristor...) possèdent des parties de caractéristique à résistance dynamique négative ($dv/di < 0$) et que l'amplificateur opérationnel convenablement bouclé présente cette propriété remarquable.

II. CONDITION D'AMORÇAGE DES OSCILLATIONS.

Soit donc le montage de principe :

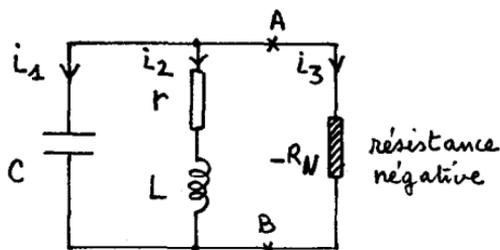


Fig. 10

$-R_N$ est une schématisation du montage électronique qui permet effectivement d'avoir entre A et B, pour la tension variable v , l'équivalent d'une résistance négative.

Si les oscillations sinusoïdales prennent naissance :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$jC\omega \underline{V} + \frac{1}{r + jL\omega} \cdot \underline{V} + \frac{1}{(-R_N)} \cdot \underline{V} = 0$$

quel que soit \underline{V} dans le domaine de linéarité du dipôle ;

d'où :

$$jC\omega + \frac{r}{r^2 + L^2\omega^2} - \frac{jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2} - \frac{1}{R_N} = 0$$

soit :

$$C - \frac{L}{r^2 + L^2\omega^2} = 0; \quad \frac{r}{r^2 + L^2\omega^2} - \frac{1}{R_N} = 0$$

pour une bobine de bonne qualité : $Q = L\omega/r \gg 1$.

On déduit des deux équations précédentes :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad R_N = \frac{L^2\omega^2}{r} = rQ^2 = R = \frac{L}{rC}.$$

On vérifie que la somme des puissances actives est nulle :

$$-\frac{V^2}{R_N} + r\left(\frac{V}{r^2 + L^2\omega^2}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad V^2\left(-\frac{1}{R_N} + \frac{r}{L^2\omega^2}\right) = 0$$

Pour une valeur de R_N supérieure à R , les pertes Joule ne sont pas compensées et l'amplitude des oscillations tend vers 0.

Pour une valeur de R_N inférieure à R , la résistance négative surcompense les pertes Joule dans r et l'amplitude des oscillations croît en entraînant le composant dans son domaine non linéaire.

III. EXEMPLE.

Nous reprenons, bien sûr, le même qu'en A.II. pour comparer les deux méthodes.

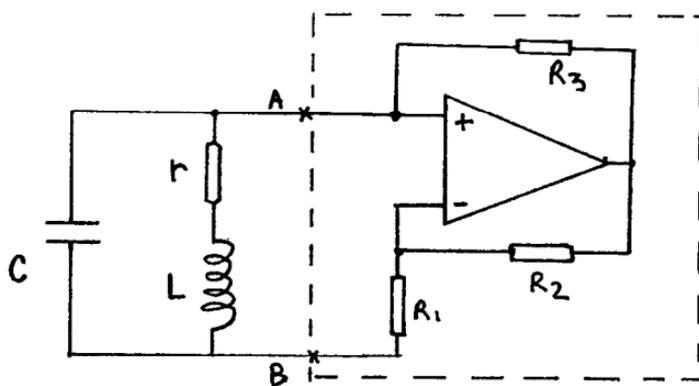


Fig. 11

III.1. Caractéristique tension-courant du dipôle AB.

On part de la caractéristique de transfert en continu de l'amplificateur opérationnel :

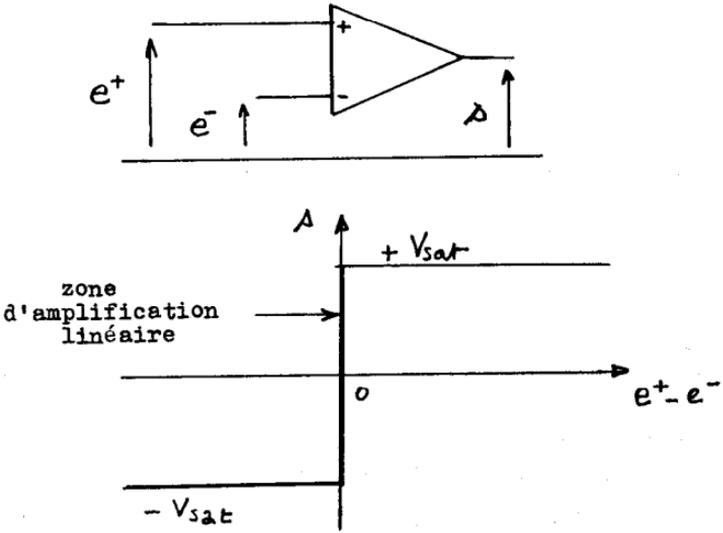


Fig. 12

On considère le dipôle AB pour lequel on recherche la caractéristique $I(V)$:

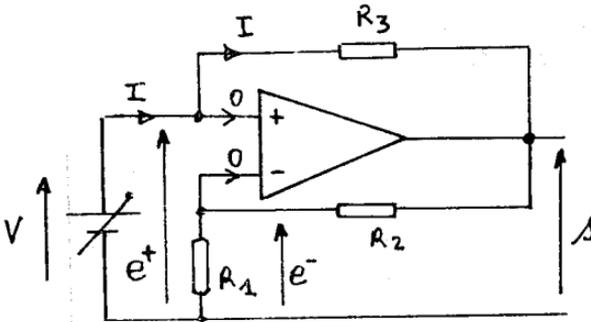


Fig. 13

Dans la zone d'amplification linéaire $e^+ = e^-$:

$$I = \frac{V - s}{R_3}, \quad V = \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right] s$$

en éliminant s entre les deux expressions, il vient :

$$\frac{V}{I} = -\left(\frac{R_1}{R_2} \right) \cdot R_3 = -R_N$$

le dipôle est équivalent à une résistance négative tant que :

$$-V_{\text{sat}} \leq s \leq +V_{\text{sat}}$$

limites de la zone à résistance négative.

POINT A :

$$s = +V_{\text{sat}}, \quad V = R_1 \cdot V_{\text{sat}} / (R_1 + R_2),$$

$$I = -R_2 V_{\text{sat}} / [R_3 (R_1 + R_2)].$$

POINT B :

$s = -V_{\text{sat}}$, symétrique de A par rapport à O.

ZÔNE DE SATURATION :

$$s = +V_{\text{sat}}, \quad I = (V - V_{\text{sat}}) / R_3$$

$$e^+ > e^- \quad \text{donc} \quad V > R_1 V_{\text{sat}} / (R_1 + R_2)$$

ZÔNE DE SATURATION :

$$s = -V_{\text{sat}}, \quad I = (V + V_{\text{sat}}) / R_3$$

$$e^+ < e^- \quad \text{donc} \quad V < -R_1 V_{\text{sat}} / (R_1 + R_2).$$

Résultat.

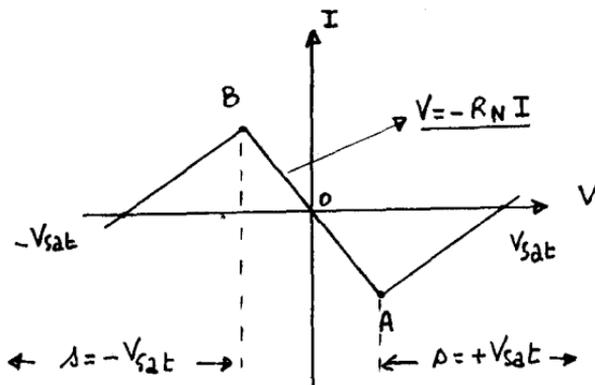


Fig. 14

III.2. Condition d'amorçage.

Dans la zone de linéarité : $R_N = R$, or : $R_N = R_1 R_3 / R_2$, d'où la condition déjà trouvée en A.II.

C. REGLAGE DE L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

I. ETUDE PAR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE NON LINEAIRE.

On admet d'abord que la pulsation des oscillations reste au voisinage de ω_0 et la bobine peut alors être représentée par sa structure parallèle :

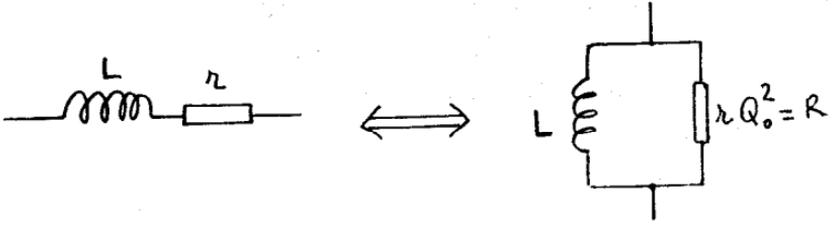


Fig. 14

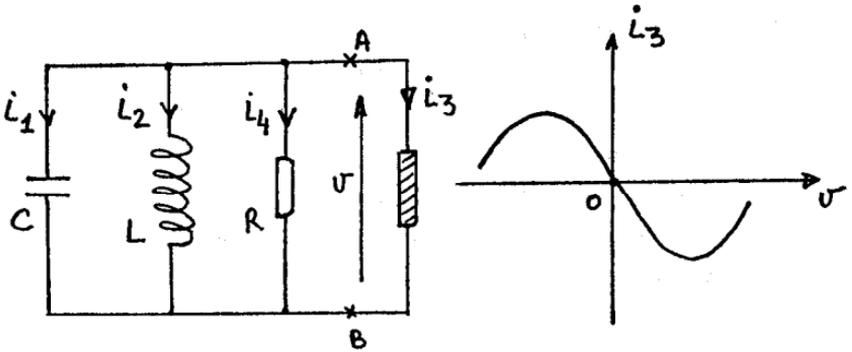


Fig. 15

La non linéarité du dipôle AB doit être exprimée algébriquement, prenons, par exemple, l'équation suivante pour la décrire :

$$i_3 = -\frac{v}{R_N} + k v^3; \quad k \text{ positif}$$

l'équation différentielle est obtenue en écrivant la loi des nœuds :

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

quel que soit v .

$$i_1 = C \frac{dv}{dt}; \quad v = L \frac{di_2}{dt}; \quad i_4 = \frac{v}{R}.$$

Après simplification, il vient :

$$LC \frac{dv^2}{dt^2} + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} + 3k v^2 \right) \frac{dv}{dt} + v = 0.$$

On reconnaît ici l'équation de Van der Pol.

Initialement, $v = 0$.

On suppose : R_N inférieur à R (coefficient de $\frac{dv}{dt}$ négatif) :

$$\Delta = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right)^2 - 4 \text{ LC négatif.}$$

La solution de l'équation est oscillatoire amplifiée exponentiellement. Mais v^2 croît en valeur moyenne et on conçoit que le coefficient de $\frac{dv}{dt}$ devienne nul en valeur moyenne, auquel cas les oscillations sont pratiquement sinusoïdales de pulsation ω_0 ; il reste à trouver l'amplitude de v .

RECHERCHE DE L'AMPLITUDE PAR LA MÉTHODE DU PREMIER HARMONIQUE.

Le terme prépondérant de $v(t)$ est sinusoïdal, soit v_1 ce terme fondamental : $v_1 = V_M \cos(\omega_0 t)$.

Le courant i dans le dipôle AB a pour expression :

$$i = -\frac{V_M}{R_N} \cos(\omega_0 t) + k V_M^3 \cos^3(\omega_0 t),$$

$$i = \left(-\frac{1}{R_N} + \frac{3}{4} \cdot k V_M^2 \right) V_M \cos(\omega_0 t) + \frac{k}{4} V_M^3 \cos 3 \omega_0 t.$$

Le terme de pulsation $3 \omega_0$ est « piégé » par le circuit bouchon LC qui présente pour cette pulsation une impédance bien inférieure à celle de R , de sorte que R est pratiquement traversé par le terme fondamental de i : i_1 (appelé premier harmonique), d'où :

$$v_1 = V_M \cos(\omega_0 t) = -R i_1$$

$$V_M \cos(\omega_0 t) = R \left(\frac{1}{R_N} - \frac{3}{4} k V_M^2 \right) V_M \cos(\omega_0 t)$$

soit :

$$V_M = \frac{2}{\sqrt{3} k} \cdot \sqrt{\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R}}$$

II. ETUDE GRAPHIQUE.

On considère à nouveau l'oscillateur comme un système bouclé et on introduit les non linéarités de la chaîne directe :

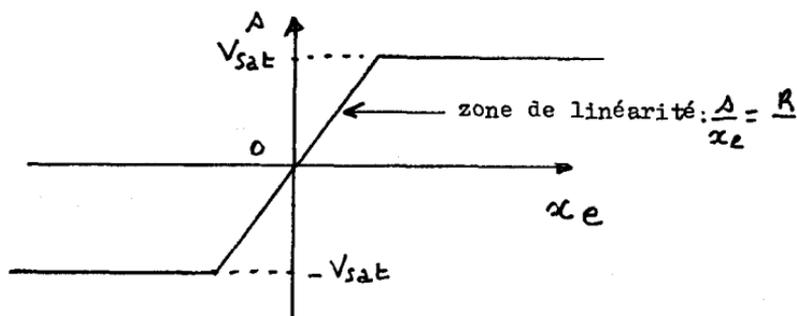


Fig. 16

La condition d'amorçage étant réalisée, les oscillations sinusoïdales de pulsation ω_0 ont une amplitude indéterminée inférieure à V_{sat} . Si on augmente R_2 , le gain de l'amplificateur croît, il en est de même pour les amplitudes de s et de x_r ; il en découle, par l'intermédiaire de $x_e = x_r$, un renforcement de s et ainsi de suite jusqu'à la saturation où s est écarté.

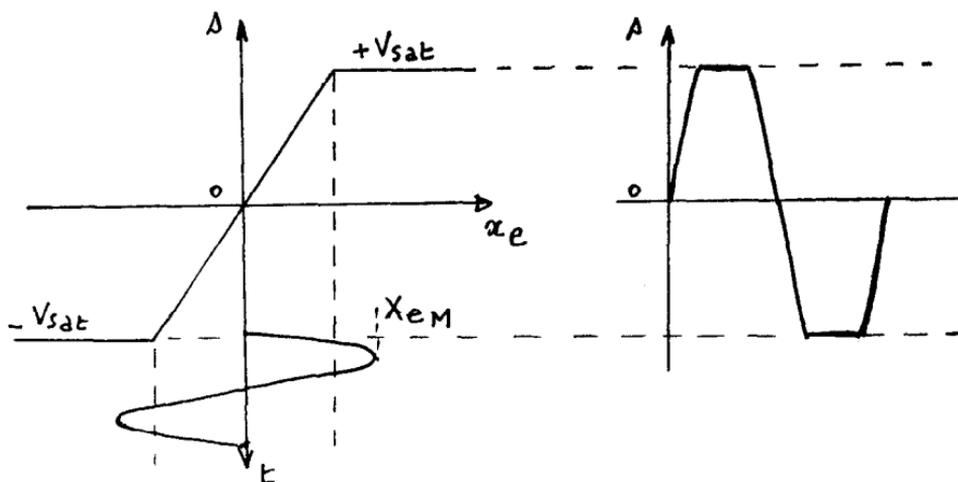


Fig. 17

A cause de la bonne qualité du circuit sélectif accordé sur ω_0 , le signal s de période $T = 2\pi/\omega_0$ est filtré : le signal x_r est pratiquement sinusoïdal.

Soit s_1 le terme fondamental de la décomposition en série de Fourier de s ; le circuit sélectif impose la relation :

$$\frac{x_r}{s_1} = \frac{R}{R + R_3} = \frac{X_{rM}}{S_{1M}}$$

rapport des amplitudes.

L'amplitude S_{1M} est, comme le montre la fig. 17, une fonction de l'amplitude de $x_e = X_{eM}$:

pour $X_{eM} \leq R_1 V_{sat}/(R_1 + R_2)$ $S_{1M} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot X_{eM}$,

pour $X_{eM} > R_1 V_{sat}/(R_1 + R_2)$ la valeur de S_{1M} se calcule par décomposition en série de Fourier de la sinusoïde :

$$(R_1 + R_2)x_e/R_1,$$

écrite pour les valeurs $\pm V_{sat}$.

S_{1M} admet une limite supérieure lorsque $s(t)$ prend la forme d'un créneau, $MAX(S_{1M}) = 4 V_{sat}/\pi$.

On donne l'allure du graphe $S_{1M}(X_{eM})$ à la fig. 18.

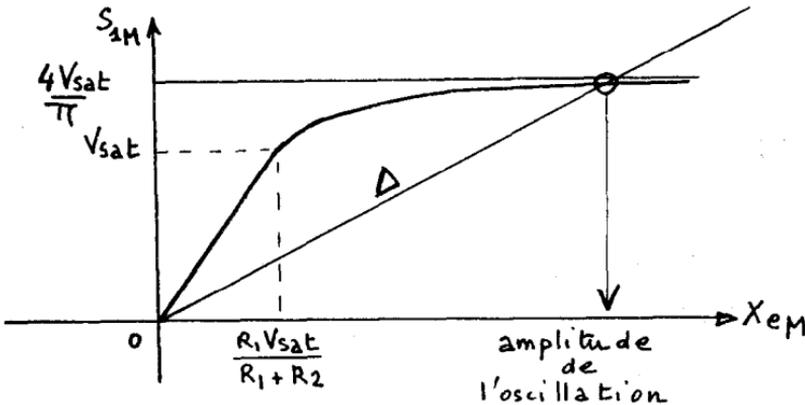


Fig. 18

La tension sinusoïdale délivrée par l'oscillateur est prélevée aux bornes du circuit résonnant, son amplitude est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1M}(X_{eM}) \\ X_{eM} = X_{rM} = \frac{R}{R + R_3} \cdot S_{1M} \text{ (droite } \Delta \text{)}. \end{array} \right.$$

On constate qu'à l'amorçage où la pente de Δ est égale à $\frac{R_1 + R_2}{R_1}$, on obtient une infinité de points communs aux deux courbes ; on voit bien là qu'il n'était pas possible de déterminer une amplitude par la théorie linéaire.

D. STABILITE

a) La forme de l'oscillation est d'autant plus proche de la sinusoïde que le circuit résonnant est très sélectif, donc de très bonne qualité.

b) L'amplitude de l'oscillation est d'autant plus stable que le gain de l'amplificateur est plus élevé.

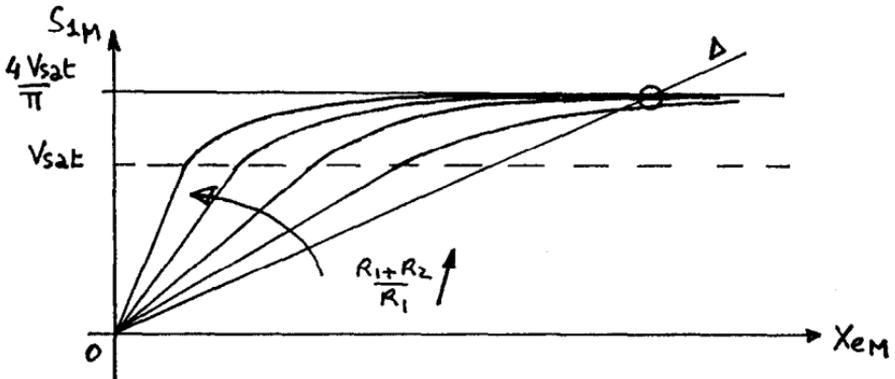


Fig. 19

A la fig. 19, les graphes $S_{1M}(X_{eM})$ sont tracés pour différents réglages du gain linéaire $(R_1 + R_2)/R_1$ de l'amplificateur.

On s'aperçoit que lorsqu'il devient bien supérieur à la pente de la droite Δ , l'amplitude X_{eM} se stabilise au niveau de :

$$\frac{R_3}{R + R_3} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot V_{sat}$$

et ne dépend plus du gain de l'amplificateur.

Par contre, elle est pratiquement proportionnelle à V_{sat} soit aussi à la tension d'alimentation de l'amplificateur opérationnel.

c) La fréquence des oscillations est d'autant plus stable que le circuit résonnant est plus sélectif.

Imaginons au voisinage de ω_0 que la transmittance de la chaîne directe présente un argument ϕ non nul mais faible.

Le circuit résonnant est représenté par le schéma de la fig. 20 :

$$\underline{B} = \frac{1}{1 + R_3 \left(\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right)} ; \underline{A} = A_0 e^{j\phi}$$

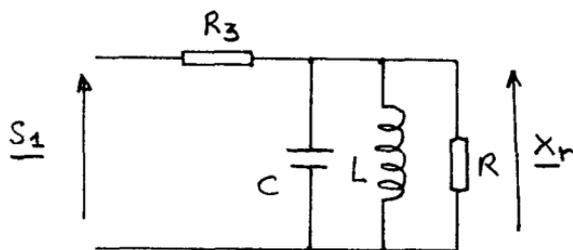


Fig. 20

recherche de la pulsation par la condition de phase :

$$\text{Arg } \underline{A} \underline{B} = 0$$

$$\text{d'où : } \theta = \text{Arctg} \left(R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \frac{R_3}{(R_3 + R)} \right)$$

en posant $R' = \frac{RR_3}{R + R_3}$, il vient :

$$LC \omega^2 - 1 = \frac{L\omega}{R'} \text{tg}(\theta).$$

Soit Q'_0 le facteur de qualité du circuit résonnant $= \frac{R'}{L\omega_0}$,
donc : $LC\omega^2 - 1 \simeq \text{tg}(\theta)/Q'_0$.

On déduit la pulsation des oscillations :

$$\omega \simeq \omega_0 \sqrt{1 + \text{tg}(\theta)/Q'_0}.$$

CONCLUSION.

ω est d'autant plus proche de ω_0 que $Q'_0 \gg \text{tg}(\theta)$.

CARON J.-P.,

(E.N.S.A.M. - Centre de Lille).

BIBLIOGRAPHIE

- DI STEFANO. — *Systèmes asservis*, tome 1. Série Schaum.
 MAINGUENAUD. — *Cours d'automatique*, tome 1. Masson.
 R. LEGROS. — *Calcul transformationnel*. Masson.
 J.-C. GILLE. — *Théorie et calcul des asservissements*. Dunod.
Manuel des circuits intégrés analogiques Texas instruments.
 J.-P. WATTEAU. — *Electronique fondamentale*. Ed. Riber.