Vitesse de phase et vitesse de groupe

Lors de l'étude des phénomènes vibratoires, il est souvent intéressant de mesurer la vitesse de propagation du phénomène.

Suivant les variables utilisées pour cette mesure, on peut en fait déterminer deux grandeurs qui sont, le plus souvent, différentes : l'une est la vitesse de phase, l'autre est la vitesse de groupe. Aussi nous semble-t-il nécessaire de définir ces deux grandeurs afin de voir par quelles méthodes on obtient l'une et l'autre.

1. RAPPELS SUR LA PROPAGATION D'UNE ONDE ; EQUATION D'ONDE.

Quel que soit le phénomène vibratoire physique qui se propage, on dit qu'il se fait par onde s'il est caractérisé par une grandeur qui obéit à des conditions mathématiques précises.

Dans le cas d'une propagation suivant une direction unique $x'x$, la grandeur caractéristique U doit répondre à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{V^2}\frac{\delta^2 U}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 U}{\delta x^2} \qquad (1)$$

avec : $U = f(x, t)$.

Les solutions possibles pour U sont de la forme :

$$U = f\left(t \pm \frac{x}{V}\right).$$

En particulier, une fonction sinusoïdale du type :

$$a = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \varphi\right]$$

est solution de (1).

En effet, avec φ non fonction de x, de t et de ω :

$$\frac{\delta^2 a}{\delta t^2} = -\omega^2 a$$

$$\frac{\delta^2 a}{\delta x^2} = -\frac{\omega^2}{V^2} a \qquad \text{et donc} \qquad \frac{\delta^2 a}{\delta x^2} = \frac{1}{V^2}(-\omega^2 a) = \frac{1}{V^2}\frac{\delta^2 a}{\delta t^2}.$$

Par la suite, nous pourrons raisonner sur une fonction sinusoïdale puisqu'un état ondulatoire quelconque peut se représenter par une série ou une intégrale de Fourier, somme de fonctions d'ondes planes sinusoïdales

2. PROPAGATION DANS LE CAS D'UNE FONCTION SINUSOIDALE UNIQUE.

Soit une onde dont l'équation est :

$$a = \mathrm{A} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{\mathrm{V}} \right) + \varphi \right]$$

$\omega \left(t - \frac{x}{\mathrm{V}} \right) + \varphi$ est l'angle de phase ou plutôt la fonction de phase $\Phi_{x,\,t}$ avec :

$$\Phi_{x,\,t} = \omega \left(t - \frac{x}{\mathrm{V}} \right) + \varphi,$$

V représente la vitesse de propagation de cette phase, on l'appelle vitesse de phase V_φ. Rappelons que :

$$\omega \frac{x}{\mathrm{V}_\varphi} = \frac{2\pi x}{\mathrm{V}_\varphi \cdot \mathrm{T}} = \frac{2\pi x}{\lambda} = kx$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{d'où} \quad k = \frac{\omega}{\mathrm{V}_\varphi}$$

et :

$$\boxed{\mathrm{V}_\varphi = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{k}} \qquad (2)$$

Pour repérer un état de vibration dont la fonction de phase $\Phi_{x,\,t}$ reste constante ($k\pi$ ou $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ par exemple), il faut

que : $$d\Phi_{x,\,t} = \frac{\delta \Phi}{\delta t} \cdot dt + \frac{\delta \Phi}{\delta x} \cdot dx = 0$$

c'est-à-dire : $$\omega\, dt - k\, dx = 0$$

d'où : $$\frac{\omega}{k} = \frac{dx}{dt},$$

ce qui a bien les dimensions d'une vitesse : $V_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ est bien la vitesse de propagation de la phase.

3. CAS D'UNE ONDE.

Soit une onde caractérisée par une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences différentes. Si, dans le milieu de propagation, la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, l'onde totale ne changera pas de forme au cours de la propagation. Si, au contraire, les différentes ondes se propagent à des vitesses différentes, l'onde totale changera de forme au cours de la propagation : les « composantes » de l'onde *se dispersent.*

Dans le premier cas, le milieu est dit non dispersif ; V_φ est indépendant de ω donc de λ.

Dans le second cas, le milieu est dit dispersif ; V_φ varie avec ω, donc avec λ.

3.1. Propagation d'un extrémum d'amplitude.

Soit l'onde envisagée ci-dessus, décrite par une fonction somme de fonctions sinusoïdales de fréquence moyenne ν_0, k varie autour de k_0, ω autour de ω_0. Appelons V_φ la valeur moyenne des diverses vitesses de phase.

A un instant donné, il existe un point d'amplitude maximale, c'est-à-dire pour lequel les phases concordent au mieux. Cherchons comme précédemment (§ 2) les conditions de propagation de cet extrémum : il faut qu'au cours de la propagation, x et t variant simultanément, on ait pour chaque valeur du couple (x, t) concordance des phases, donc pour tout couple (x, t) :

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\omega} = 0 \ \left(\text{ou } \frac{\delta\Phi}{\delta\nu} = 0\right) \qquad \text{or} \qquad \Phi_{(\omega,\, x,\, t)} = \omega t - kx + \varphi$$

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\omega} = t - x\,\frac{\delta k}{\delta\omega} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{t}{x} = \frac{\delta k}{\delta\omega}.$$

Si le rapport $\dfrac{t}{x} = \dfrac{\delta k}{\delta\omega}$ est constant, on définit une vitesse de propagation de cet extrémum, appelée vitesse de groupe V_g.

$$\boxed{V_g = \frac{d\omega}{dk}} \qquad (3)$$

Si la relation $\omega = f(k)$ n'est pas simple, la notion de vitesse de groupe est d'autant meilleure que la variation de fréquence $\Delta\nu$ autour de ν_0 est faible pour l'onde considérée. Comme le point d'amplitude extrémale est facilement reconnaissable, on peut dire que la vitesse de groupe est la vitesse de propagation du signal (voir fig. 1) que repère cette amplitude extrémale.

3.2. Conséquences expérimentales.

Toute détermination de vitesse liée à la longueur d'onde donne V_φ avec $V_\varphi = \dfrac{\lambda}{T}$.

Toute détermination de vitesse basée sur une durée de propagation et la distance correspondante donne V_g car on étudie la propagation d'un signal.

Exemple : La détermination de l'indice de réfraction du sulfure de carbone pour $\lambda = 550$ nm, donne, par la méthode du miroir tournant appliquée à la mesure de V, le résultat suivant : $n = 1{,}75$ (en utilisant $n = \dfrac{c}{V}$). Or, les Tables de Données indiquent $n = 1{,}63$; la différence provient du fait que $n = \dfrac{c}{V_\varphi}$ alors que la méthode de mesure utilisée conduit à V_g.

$$\boxed{V_\varphi = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}} \qquad \boxed{V_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

3.3. Relations entre vitesse de phase et vitesse de groupe.

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(k \cdot V_\varphi)}{dk} = V_\varphi + k \cdot \frac{dV_\varphi}{dk} = V_\varphi - \lambda\,\frac{dV_\varphi}{d\lambda}.$$

On voit que si V_φ ne dépend pas de λ, $\dfrac{dV_\varphi}{d\lambda} = 0$ et $V_g = V_\varphi$, c'est le cas pour les milieux non dispersifs.

4. APPLICATION AU CAS DES BATTEMENTS.

Soit la superposition de deux ondes de fréquences ν et ν' voisines, de même amplitude et de même direction. L'onde totale peut être décrite par :

$$Y = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V_\varphi}\right)\right] + A \sin\left[\omega'\left(t - \frac{x}{V'_\varphi}\right)\right]$$

soit en développant :

$$Y = 2\,A \sin\left[\frac{\omega + \omega'}{2}\,t - \left(\frac{\omega}{V_\varphi} + \frac{\omega'}{V'_\varphi}\right)\frac{x}{2}\right] \ldots$$

$$\ldots \cos\left[\frac{(\omega - \omega')}{2}\cdot t - \left(\frac{\omega}{V_\varphi} - \frac{\omega'}{V'_\varphi}\right)\frac{x}{2}\right]$$

en remarquant que :

$$\frac{\omega + \omega'}{2} = \omega_M \; ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{V_\varphi} + \frac{\omega'}{V'_\varphi}\right) = \left(\frac{\omega}{V_\varphi}\right)_M = k_M = \frac{2\pi}{\lambda_M}$$

$$\frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{\Delta\omega}{2} \; ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{V_\varphi} - \frac{\omega'}{V'_\varphi}\right) = \frac{1}{2}\,\Delta\left(\frac{\omega}{V_\varphi}\right) = \frac{\Delta k}{2},$$

il vient :

$$Y = 2\,A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\,t - \frac{\Delta k}{2}\,x\right) \sin\left(\omega_M t - k_M x\right) \qquad (4)$$

L'équation (4) correspond à la propagation d'une onde sinusoïdale de fréquence égale à la fréquence moyenne :

$$\nu_M = \frac{1}{2}\,(\nu + \nu')$$

mais dont l'amplitude varie avec x et t, elle est *modulée.*

Soit : $$\frac{\Delta\omega}{2} = \omega_{mod} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta k}{2} = k_{mod}$$

(4) s'écrit :

$$Y = 2\,A \cos\left(\omega_{mod}\cdot t - k_{mod}\,x\right) \sin\left(\omega_M t - k_M x\right)$$

où : $\mathcal{A} = 2\,A \cos\left(\omega_{mod}\cdot t - k_{mod} x\right)$ est l'amplitude modulée.

$\mathcal{A}$ contient un terme de propagation ; comme précédemment, $\Phi_{x,\,t} = (\omega_{mod}\cdot t - k_{mod}\cdot x)$ reste constant au cours du déplacement si $d\Phi = 0$, soit :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_{mod}}{k_{mod}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

si, et c'est le cas dans nos hypothèses, $\Delta\omega$ et Δk sont très petits, la limite du rapport $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$ est $\dfrac{d\omega}{dk} = V_g$.

Le signal se déplace à la vitesse V_g, différente (dans le cas général) de la valeur moyenne $V_M = \dfrac{\omega_M}{k_M}$.

La fig. 1 ci-après permet la « visualisation » graphique de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe dans le cas d'un phénomène de battements.

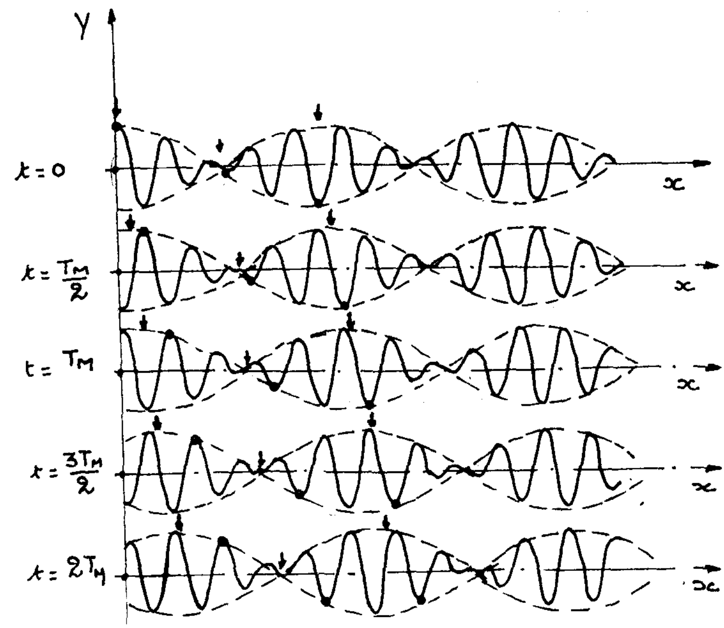

Fig. 1. — Les flèches ↓ suivent les battements qui se déplacent à la vitesse de groupe V_g ; les cercles suivent les crêtes individuelles de l'onde qui se déplacent à la vitesse moyenne de phase V_{φ_M}.

5. **COURBES DE DISPERSION.**

On peut contrôler la validité des résultats expérimentaux en étudiant la courbe de dispersion du phénomène. On trace :

$$\omega = f(k) \qquad \text{ou} \qquad \nu = f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ (fig. 2).}$$

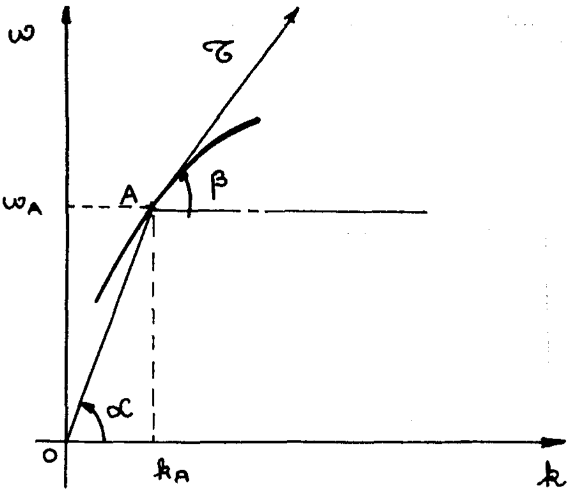

Fig. 2

Soit A un point de la courbe et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe en A. V_φ et V_g se définissent par :

$$V_\varphi = \frac{\omega_A}{k_A} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$V_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = \operatorname{tg} \beta.$$

Si OA est tangent à la courbe, alors $V_g = V_\varphi$.

Applications.

- Ondes lumineuses : le tracé de $\nu = f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ permet de déterminer directement V_g et V_φ et par-là même $n_\lambda \left(n_\lambda = \frac{C}{V_\varphi}\right)$.
- Ondes mécaniques (ondoscope, échelle de perroquet) :

Nous avons vu (Echelle de perroquet. Ondoscope [même numéro, mêmes auteurs]) que l'on pouvait écrire :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{C}{J}} \sin \frac{\Delta\phi}{2} = 2\sqrt{\frac{C}{J}} \sin \frac{kl}{2}.$$

La fig. 3 ci-après nous montre que, dans les conditions habituelles d'utilisation de ces deux appareils $\Delta\phi \ll 2\pi$, on peut confondre OA et la tangente $\mathcal{T}$ et donc admettre que :

$$V_g = V_\varphi.$$

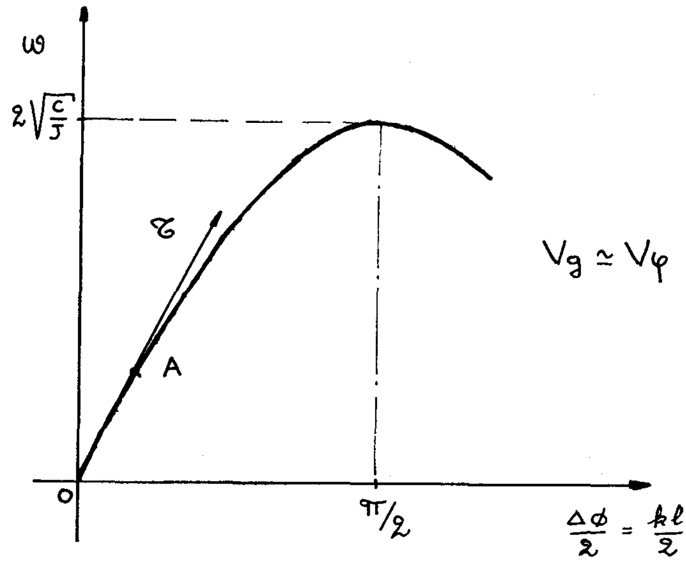

Fig. 3

Michèle CLEMENTE,
(*Lycée Marseilleveyre - Marseille*)

André DURUPTHY,
(*Lycée Joliot-Curie - Aubagne*)

Nicole GEIGER,
(*Lycée Tarascon - Tarascon*)

I.R.E.S.P. de Luminy (*Marseille*).

BIBLIOGRAPHIE

BERKELEY. — *Ondes.* Collection U. Armand Colin. Paris 1972.

Julien BOK, Pierre MOREL. — *Mécanique. Ondes.* Hermann. Paris 1968.

J.-P. MATHIEU. — *Optique électromagnétique.* Eyrolles.