

Le coefficient de qualité et ses interprétations

On sait que les systèmes résonnants présentent un comportement caractéristique autour d'une fréquence particulière f_0 , dite fréquence de résonance. On peut la plupart du temps, représenter ces systèmes, au moins en première approximation, par leur modèle électrique : le circuit RLC série.

Ce circuit étant alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude constante et de fréquence f variable, on observe un maximum de courant pour $f = f_0$, ainsi qu'une variation rapide de la phase du courant par rapport à la tension au voisinage de f_0 . Ces phénomènes sont d'autant plus marqués que le circuit est « meilleur », c'est-à-dire que son coefficient de qualité est élevé.

Nous nous proposons ici d'analyser les différentes définitions du coefficient de qualité d'un système résonnant en cherchant à mettre en évidence leur contenu physique, en particulier dans le domaine énergétique.

I. COEFFICIENT DE QUALITE ET BANDE PASSANTE.

Il est naturel, quand on étudie un système résonnant, de tracer le graphe de l'amplitude A_0 du phénomène variable en fonction de la fréquence d'excitation. Les maximums sont différents, et une première nécessité apparaît : normaliser l'amplitude de chacune des courbes par rapport à l'amplitude maximale. On peut alors aisément comparer entre elles les acuités de ces différentes courbes normalisées. Il suffit pour cela de *mesurer la largeur* $f_2 - f_1$ de chaque courbe pour *une même ordonnée* h_0 , en exprimant en hertz cette largeur caractéristique du système étudié .

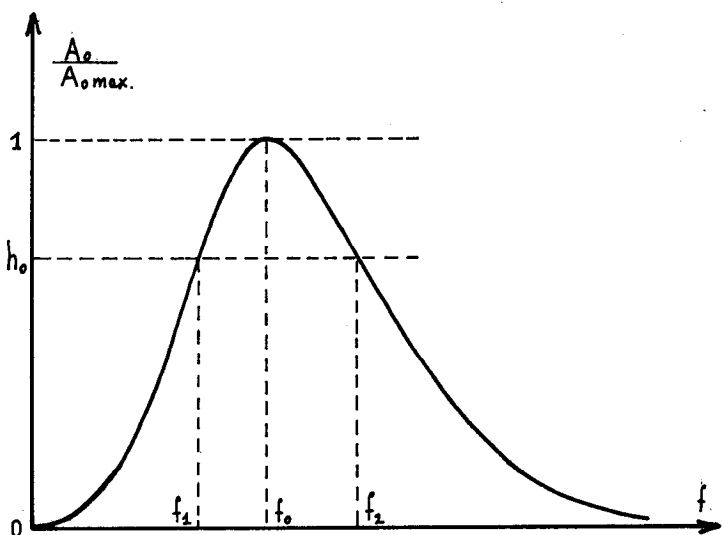


Fig. 1

Le problème consistant à donner une mesure de la qualité d'un système résonnant n'est cependant pas résolu de façon satisfaisante par la simple connaissance de la largeur de bande $f_2 - f_1$ de ce système. En effet, la qualité d'un système résonnant dont la largeur de bande serait de 10 hertz autour d'une fréquence de résonance de quelques centaines de hertz par exemple, n'est pas comparable à celle d'un système ayant même largeur de bande mais cette fois autour d'une fréquence de résonance de quelques mégahertz. On est ainsi amené à *rapporter* la largeur de bande à la *fréquence de résonance* pour définir un coefficient Q caractéristique du système résonnant.

On peut alors poser :

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

et appeler Q , le coefficient de qualité du système résonnant. Ce coefficient, sans dimension, prend des valeurs d'autant plus grandes que la largeur de bande est plus fine et la fréquence de résonance plus élevée. On peut espérer qu'un coefficient de qualité, défini de cette façon, sera susceptible de répondre à la question : comment définir un coefficient susceptible de nous renseigner sur la qualité du système résonnant ?

Mais il faut encore, pour que cette définition de Q soit universelle, préciser la valeur de l'ordonnée h_0 normalisée, pour laquelle on mesure la largeur de bande $f_2 - f_1$. On choisit :

$$h_0 = 1/\sqrt{2} = 0,707$$

convention traditionnelle en électronique. Elle conduit souvent et ici en particulier, à des expressions simples.

Les fréquences f_1 et f_2 correspondent alors, pour le phénomène variable, à un affaiblissement de 3 décibels par rapport à la valeur maximale de l'amplitude A_0 . On utilise couramment l'expression de « bande passante » pour parler de la largeur de bande $f_2 - f_1$ correspondant à cet affaiblissement de 3 décibels (*).

II. COEFFICIENT DE QUALITE ET REPRESENTATION PAR UN MODELE ELECTRIQUE.

$$\text{La relation } Q = \frac{L\omega_0}{R}.$$

Appliquons la définition précédente au circuit série RLC, modèle électrique simple auquel on peut faire appel pour représenter les systèmes résonnants. Lorsque $f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,

l'amplitude du courant qui traverse le circuit est maximale et égale à V_0/R , V_0 étant l'amplitude constante de la tension sinusoïdale d'alimentation du circuit. La convention adoptée pour h_0 impose que f_1 et f_2 soient solutions de l'équation :

$$\frac{V_0}{R\sqrt{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

dans laquelle ω est la pulsation correspondant à la fréquence f .

Cette équation s'écrit, après simplification :

$$LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0.$$

(On peut constater que la convention adoptée pour la hauteur de référence h_0 , rend le coefficient numérique de $RC\omega$ égal à 1).

(*) Si l'ordonnée représente l'énergie dissipée dans le système (proportionnelle à A_0^2), la mesure de la bande passante correspond à une ordonnée normalisée égale à $(1/\sqrt{2})^2$ c'est-à-dire $1/2$.

Des 4 racines solutions des 2 équations, on ne retient que les solutions positives qui, seules, ont une signification physique.

L'équation en $+RC\omega$ donne :

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}.$$

L'équation en $-RC\omega$ donne :

$$\omega_2 = \frac{+RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}.$$

Et la différence $\omega_2 - \omega_1$ donne $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$.

Le coefficient de qualité $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ peut s'écrire :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}; \text{ ou encore : } Q = \frac{L\omega_0}{R} \text{ qui est une « formule » célèbre.}$$

Une erreur courante.

Si la formule précédente est célèbre, on peut se demander si elle ne l'est pas trop. Car bien des ouvrages ne retiennent que celle-ci et, ce qui est peut-être plus gênant, introduisent la notion de coefficient de qualité à partir de cette dernière. On peut ainsi montrer que la définition de Q à partir de la notion de bande passante se déduit de la relation $Q = L\omega_0/R$, ce qui est bien sûr possible en remontant le calcul précédent en sens inverse. Malheureusement celui-ci est très souvent fait dans le cas où $Q \gg 1$ et on en garde l'impression que la relation $Q = f_0/(f_2 - f_1)$ est *approchée et n'est pas valable pour les faibles valeurs de Q* .

C'est une erreur assez répandue et ceci est d'autant plus regrettable que la définition de Q à *partir de la bande passante* est très générale et d'un grand intérêt en électronique.

Notons cependant que l'expression $Q = L\omega_0/R$ est pratique. Il ne faut pas sous-estimer sa portée. On le verra dans ce qui suit.

Dès maintenant, indiquons qu'elle permet une mesure très commode du coefficient Q d'un circuit série RLC. Il suffit lorsque $\omega = \omega_0$ de faire le rapport de V_c (amplitude de la tension aux

bornes du condensateur) à V_0 (amplitude de la tension d'alimentation du circuit) pour avoir la valeur de Q .

En effet, à la résonance, on a :

$$V_c = \frac{I_0}{C\omega_0} = I_0 L \omega_0 \quad \text{et} \quad V_0 = I_0 R.$$

On en déduit immédiatement :

$$\frac{V_c}{V_0} = \frac{L\omega_0}{R} = Q.$$

Un bon (*) voltmètre permet donc une mesure très facile de Q .

Un autre aspect du coefficient de qualité apparaît ici : il chiffre la surtension développée à la résonance aux bornes du condensateur, par rapport à la tension d'alimentation. Si cette dernière est de 24 volts, pour donner un exemple, et avec Q de l'ordre de 10 (valeur très courante), on obtient 240 volts aux bornes du condensateur !

Il est clair qu'une surtension du même ordre apparaît aux bornes de la bobine. Cependant, celle-ci possède toujours une résistance ohmique (c'est parfois la seule résistance du circuit RLC) qui empêche que l'on puisse mesurer la tension « aux bornes de L ». C'est d'ailleurs la raison pour laquelle, dans la mesure de Q à l'aide d'un voltmètre, on relève la tension aux bornes du condensateur et non aux bornes de la bobine.

III. COEFFICIENT DE QUALITE ET PHASE.

Nous avons déjà indiqué que la phase variait rapidement autour de la fréquence de résonance. Il est intéressant de préciser ce phénomène sur le modèle électrique.

Lorsque le circuit RLC est alimenté par une tension sinusoïdale $V_0 \cos \omega t$, le courant s'écrit :

$$i = I_0 \cos (\omega t + \varphi)$$

en appelant φ la phase du courant par rapport à la tension.

Un calcul simple donne :

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}.$$

(*) Voir plus loin le paragraphe intitulé « Influence de l'appareil de Mesure ».

Les valeurs de ω pour lesquelles on obtient $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$ sont les racines positives de l'équation :

$$LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

comme on peut le voir en remplaçant $\operatorname{tg} \varphi$ par ± 1 dans la relation précédente.

Or, cette double équation est exactement celle qui nous a servi à calculer les valeurs f_1 et f_2 des fréquences correspondant à un affaiblissement de 3 décibels.

Le coefficient de qualité $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ s'interprète donc

aisément en termes de phase. La fréquence de résonance $f_0 = 1/2 \pi \sqrt{LC}$ est caractérisée par $\varphi = 0$; les fréquences qui limitent la bande passante par $\varphi = \pi/4$ pour f_1 et $\varphi = -\pi/4$ pour f_2 .

La figure 2 donne un exemple de la variation de φ en fonction de la fréquence. Le graphe correspond à $Q = 5$.

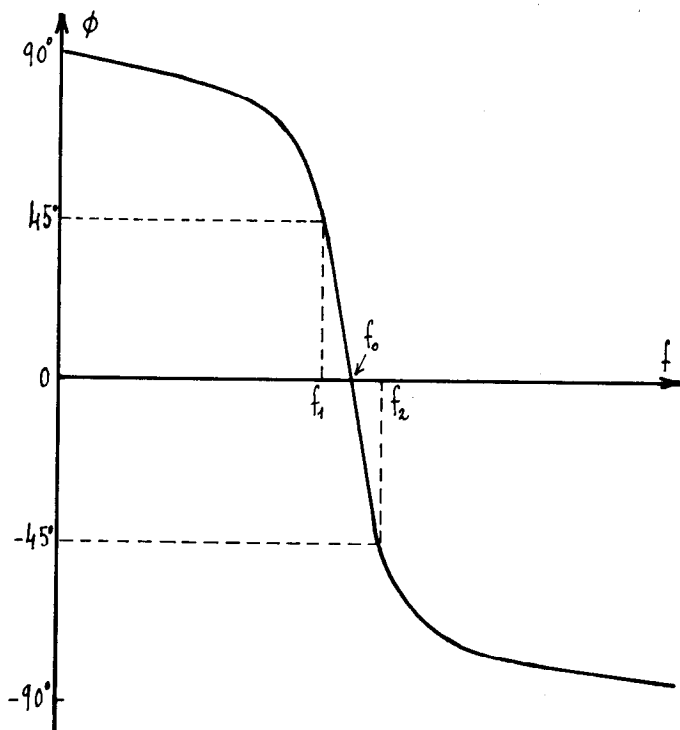


Fig. 2

L'étude est facilitée si l'on écrit $\operatorname{tg} \varphi$ sous la forme :

$$\operatorname{tg} \varphi = Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

La courbe n'est pas symétrique par rapport à f_0 . Cependant, pour les valeurs courantes de Q , la dissymétrie est peu sensible comme on peut le vérifier déjà pour $Q = 5$.

IV. COEFFICIENT DE QUALITE ET ENERGIE.

Energie emmagasinée à la résonance.

On définit parfois le coefficient Q comme le rapport de l'énergie emmagasinée dans le circuit à la résonance, à l'énergie dissipée dans le circuit pendant une période. C'est une définition fort utile et qui mérite qu'on s'y arrête d'autant plus *qu'elle peut donner lieu à des interprétations abusives*. Voyons pour cela les caractéristiques de l'énergie emmagasinée dans le circuit lorsqu'il est alimenté par une tension sinusoïdale $V_0 \cos \omega t$.

A l'instant t , on peut écrire la charge q du condensateur sous la forme $q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$. L'énergie électrique qu'il emmagasine alors est

$$W_C = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} q^2/C.$$

Au même instant, un courant $i = \frac{dq}{dt}$ circule dans la bobine et l'énergie accumulée sous forme magnétique dans celle-ci

$$\text{s'écrit : } W_L = \int_0^t L i di = \frac{1}{2} L i^2.$$

L'énergie emmagasinée dans le circuit à cet instant est donnée par la somme $W_C + W_L$, alors égale à :

$$\frac{1}{2C} Q_0^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + LC\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)].$$

Cette énergie varie sinusoïdalement dans le temps avec la pulsation 2ω (on peut le vérifier en développant le crochet), sauf lorsque $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Pour cette valeur de ω , l'énergie emmagasinée dans le circuit devient *indépendante du temps* et égale

$$\frac{1}{2} Q_0^2/C. \text{ Si l'on remarque que la relation } i = \frac{dq}{dt} \text{ impose à}$$

l'amplitude I_0 du courant de satisfaire à l'égalité $|I_0| = \omega |Q_0|$, on peut aussi écrire que l'énergie emmagasinée dans le circuit

à la résonance est égale à $\frac{1}{2} LI_0^2$.

On retrouve le fait connu qu'à la résonance l'énergie électrique oscille entre la bobine et le condensateur, passant alternativement d'une forme cinétique $\left(\frac{1}{2} LI_0^2 \right)$ à une forme potentielle $\left(\frac{1}{2} Q_0^2/C \right)$, la somme des énergies emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine étant toujours égale à la même valeur quel que soit l'instant choisi (on peut faire l'analogie avec un pendule entretenu).

Energie emmagasinée et énergie maximale.

Si la résonance est caractérisée par une valeur constante de l'énergie emmagasinée, il peut être intéressant de savoir *si cette énergie est en même temps maximale*. Ce fait est toujours (plus ou moins) sous-entendu quand on parle de l'énergie emmagasinée à la résonance.

Pour répondre à cette question, écrivons la somme $W_C + W_L$ sous une forme un peu différente de la précédente :

$$W_C + W_L = \frac{1}{2C} Q_0^2 \left[\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \cos^2(\omega t + \varphi) \right].$$

Le terme entre crochets prend, suivant les valeurs de t , une élancement maximale égale à :

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \text{ si } \frac{\omega}{\omega_0} > 1 \quad \text{et égale à 1 si } \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1.$$

Etudions l'amplitude de $W_C + W_L$ dans les deux cas :

$$1) \frac{\omega}{\omega_0} > 1.$$

L'amplitude de $W_C + W_L$ est alors égale à :

$$\frac{1}{2C} Q_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{2C} \frac{I_0^2}{\omega_0^2} = \frac{V_0^2}{2C\omega_0^2} \frac{1}{|Z|^2}$$

V_0 étant l'amplitude de la tension d'alimentation et $|Z|$ le module

de l'impédance du circuit, égal à : $\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$.

Dans le domaine étudié $\frac{1}{|Z|^2}$ est une fonction monotone et décroissante de ω ; l'amplitude de l'énergie emmagasinée ne passe pas par un maximum dans ce domaine.

$$2) \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1.$$

L'amplitude de $W_C + W_L$ est dans ce cas égale à :

$$\frac{1}{2C} Q_0^2 = \frac{1}{2C} \frac{I_0^2}{\omega^2} = \frac{V_0^2}{2C} \frac{1}{\omega^2 |Z|^2}.$$

Cherchons si $X = \omega^2 |Z|^2$ passe par une valeur minimale dans le domaine où $\frac{\omega}{\omega_0} \leq 1$.

En utilisant la relation $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, on met X sous la forme :

$$X = \frac{R^2}{\omega_0^2} [\omega_0^2 \omega^2 + Q^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2].$$

Cette fonction passe par un minimum pour :

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

minimum (*) qui n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$. Pour $Q = 5$, l'écart en fréquence est de 1 %.

La conclusion est évidente : l'amplitude de l'énergie emmagasinée *n'est pas maximale à la résonance* mais à une fréquence inférieure à f_0 , d'autant plus proche de cette dernière que Q est grand. C'est un abus de langage que de dire : l'énergie emmagasinée est maximale à la résonance. Il faut en particulier se garder de cette confusion lorsqu'on a affaire à des circuits présentant des coefficients de qualité modestes, ou lorsque l'on fait de la métrologie de précision.

Limite de la notion de circuit résonnant.

La condition $Q > 1/\sqrt{2}$ est intéressante à noter. On vérifie que l'amplitude de l'énergie emmagasinée ne fait que décroître

(*) Il est intéressant de comparer cette valeur de ω_m à celle de la pulsation naturelle ω_{nat} du même circuit RLC en oscillation libre.

On a $\omega_{nat} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ (voir la 5^{me} partie de l'article).

lorsque la fréquence augmente pour des valeurs de $Q \leq 1/\sqrt{2}$. La notion même de circuit résonnant *perd alors toute signification*. La valeur $1/\sqrt{2}$ représente la limite inférieure que peut prendre le Q d'un circuit série RLC, quand on le considère comme circuit résonnant. La définition énergétique de Q permet d'exprimer cette limite qui n'apparaissait pas dans la définition basée sur la bande passante du circuit.

Remarque.

Si l'on voulait donner une définition énergétique de la fréquence de résonance f_0 , on pourrait la définir comme la fréquence pour laquelle l'énergie emmagasinée dans le circuit est non pas maximale mais indépendante du temps.

Définition énergétique de Q .

Les difficultés précédentes étant levées, on peut chercher une définition énergétique précise du coefficient de qualité.

Pour ce faire, posons-nous la question suivante : quelle énergie faut-il fournir (de l'extérieur) au circuit résonnant pour maintenir constante l'énergie permanente emmagasinée dans le circuit à la résonance ?

Il faut bien en effet, compenser par une injection d'énergie, les pertes liées aux oscillations internes de l'énergie entre la bobine et le condensateur. C'est bien sûr le générateur de tension qui injecte dans le circuit, à chaque oscillation, une énergie égale à l'énergie perdue.

Lorsque les pertes se limitent aux pertes par effet Joule, un calcul élémentaire montre que l'énergie W_R , dissipée *par période* dans le circuit, est donnée par :

$$W_R = \frac{1}{2} R I_0^2 \frac{2\pi}{\omega}$$

I_0 étant toujours l'amplitude du courant sinusoïdal qui traverse le circuit à la pulsation ω .

On a vu que l'énergie $W_C + W_L$ emmagasinée dans le circuit *à la résonance* pouvait s'écrire :

$$W_C + W_L = \frac{1}{2} L I_0^2.$$

Pour $\omega = \omega_0$, le rapport $\frac{W_C + W_L}{W_R}$ prend une valeur simple :

$$\frac{\text{Energie emmagasinée à la résonance}}{\text{Energie dissipée par période à la résonance}} = \frac{L\omega_0}{2\pi R} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Le rapport de l'énergie emmagasinée à la résonance à l'énergie dépensée pour maintenir cette dernière constante, est donc relié d'une façon très simple au coefficient de qualité du circuit.

En d'autres termes, plus la qualité du circuit est élevée, moins on dépense d'énergie pour maintenir à un niveau constant l'énergie emmagasinée dans le circuit à la résonance.

Influence des autres pertes.

Si les pertes ne se limitent pas seulement aux pertes par effet Joule (courants de Foucault, rayonnement, hystérésis), l'énergie dissipée pour maintenir constante l'énergie emmagasinée à la résonance tiendra compte de toutes les pertes et le coefficient de qualité du circuit s'exprimera par le même rapport que précédemment.

La définition énergétique de Q que nous avons donnée prend donc un caractère tout à fait général. Au facteur 2π près, elle correspondra toujours au rapport de l'énergie emmagasinée (à la résonance) à l'énergie qu'il faut dépenser (par période) pour maintenir à un niveau constant cette énergie emmagasinée dans le circuit.

Influence de l'appareil de mesure.

Cette définition énergétique est souvent la seule qui présente un intérêt pratique. Elle revêt donc une importance particulière. A titre d'exemple, voyons comment elle permet de tenir compte de la présence d'un appareil de mesure lors de la détermination expérimentale d'un coefficient de qualité.

Si l'on utilise par exemple la méthode du voltmètre (comme indiqué dans les pages qui précèdent), celui-ci présente une résistance interne R_V non infinie et consomme de ce fait une énergie qui peut ne pas être négligeable. Le voltmètre est monté en parallèle sur le condensateur de capacité C ; un calcul classique montre qu'il peut être représenté par une résistance équivalente *montée en série* avec le circuit RLC et de valeur R_{eq} donnée par :

$$R_{eq} = \frac{R_V}{1 + \omega_0^2 C^2 R_V^2}.$$

Pour une période, l'énergie W_V consommée à la résonance par le voltmètre s'écrit alors :

$$W_V = \frac{1}{2} R_{eq} I_0^2 \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Cette énergie entre dans le bilan de l'énergie dissipée par période à la résonance et de ce fait le coefficient de qualité *mesuré* Q_{mes} sera représenté par :

$$Q_{mes} = \frac{L\omega_0}{R + R_{eq}}$$

R étant la résistance ohmique ordinaire du circuit. Cette relation s'écrit :

$$\frac{1}{Q_{mes}} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_V}$$

$Q = \frac{L\omega_0}{R}$ étant le coefficient de qualité du circuit RLC

et $Q_V = \frac{L\omega_0}{R_{eq}}$ étant par extension le « coefficient de qualité »

chiffant les pertes dues à l'appareil de mesure couplé au circuit RLC que l'on teste.

On aura bien sûr tout intérêt à utiliser un voltmètre tel que : $Q_V \gg Q$.

Si on ne peut se placer dans ces conditions, Q sera déduit de la valeur de Q_{mes} et de Q_V .

On pourrait étendre ce type de calcul à n'importe quelle perturbation venant influencer sur la mesure d'un coefficient de qualité.

Pour conclure sur cet aspect du coefficient Q, signalons que la définition énergétique est particulièrement utilisée lorsque le modèle électrique du circuit RLC est mal adapté au système résonnant étudié, L et R étant difficiles à définir. C'est le cas des cavités résonantes, des circuits à constantes réparties, des diélectriques, des oscillations mécaniques,...

Energie ou puissance ?

De même qu'on s'était posé la question de savoir si l'énergie emmagasinée était maximale à la résonance, de même on peut se poser celle de savoir si l'énergie dissipée dans le circuit est maximale à la résonance. L'énergie dépensée par période T est :

$$\frac{1}{2} R I_0^2 T = \frac{1}{2} R \frac{V_0^2}{|Z|^2} T.$$

Elle est maximale pour $\frac{T}{|Z|^2}$ maximal, soit $\omega |Z|^2$ minimal. On

peut chercher les valeurs de ω qui annulent la dérivée de $\omega |Z|^2$ en fonction de ω . Elles sont racines de l'équation :

$$3\omega^4 - \omega_0^2 \left(2 - \frac{1}{Q^2} \right) \omega^2 - \omega_0^4 = 0$$

qui n'a qu'une solution > 0 .

Cette solution est d'ailleurs $\omega \simeq \omega_0$ dans la condition où $Q \gg \frac{1}{\sqrt{2}}$. Là encore, contrairement à une idée répandue, on constate que l'énergie dissipée par période n'est pas maximale à la résonance.

Par contre, la puissance moyenne dissipée dans le circuit est $\frac{1}{2} RI_0^2$ quelle que soit la période T. Elle est bien maximale pour I_0 maximal ; c'est-à-dire à la résonance. Si l'on écrit la puissance dissipée sous la forme $\frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi$, on remarque que la puissance maximale correspond aussi à $\varphi = 0$.

La recherche de la résonance peut alors se faire *expérimentalement* par la recherche de la fréquence pour laquelle la *puissance moyenne dissipée* dans le circuit est maximale (ceci pourrait aussi être une définition de la fréquence de résonance), ou pour laquelle la phase φ du courant par rapport à la tension passe par la valeur zéro.

On peut résumer la question de la définition énergétique de Q ainsi :

$$Q = 2\pi f_0 \frac{\text{Energie emmagasinée dans le circuit}}{\text{Puissance moyenne dissipée dans le circuit}}$$

les mesures étant faites à la fréquence particulière f_0 pour laquelle la puissance moyenne dissipée est maximale, ou ce qui revient au même, pour laquelle la phase φ s'annule.

V. COEFFICIENT DE QUALITE ET REGIME NATUREL.

Le coefficient Q peut aussi être défini à partir de l'oscillation libre naturelle du circuit RLC.

Si le condensateur est primitivement chargé à la valeur Q_0 et si l'on ferme l'interrupteur, la charge q , suit en régime oscillant la loi de variation :

$$q = Ae^{-at} \cos (\omega_{nat} t + \varphi)$$

avec : $\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_{nat} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

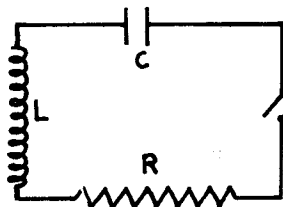


Fig. 3

A et φ sont données par les conditions initiales. Ici q , au temps $t = 0$, prend la valeur Q_0 et $i = \frac{dq}{dt}$ est nul pour $t = 0$.

On obtient $A = Q_0 \sqrt{1 + \alpha^2 / \omega_{nat}^2}$ et $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\alpha}{\omega_{nat}}$.

Si on s'intéresse à la décroissance de l'enveloppe exponentielle des oscillations, on peut chercher à calculer le temps τ au bout duquel l'énergie initiale $(1/2 C) \cdot Q_0^2$ est divisée par e (base des logarithmes népériens). Ce temps correspond à une valeur

de $q \tau = \frac{Q_0}{\sqrt{e}}$.

On a alors : $q \tau = A e^{-\alpha \tau} = \frac{A}{\sqrt{e}}$ qui donne $\tau = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L}{R}$.

Le coefficient de qualité Q s'identifie alors au produit $\omega_0 \tau$ et l'on peut écrire :

$$Q = 2\pi \frac{\tau}{T_0}$$

Q s'exprime ainsi simplement en fonction du temps τ au bout duquel l'énergie initiale est divisée par e . La référence est encore T_0 , période correspondant à la résonance, et non T_{nat} . Cependant, dès que $Q \gg 1$, ces deux périodes se confondent comme le montre l'expression :

$$\omega_{nat} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Cette dernière définition de Q donnée en fonction d'une grandeur τ caractéristique du régime naturel montre à l'évidence que l'énergie primitive du système oscillant se conserve d'autant plus longtemps que Q est grand. Elle nous procure ainsi une interprétation physique supplémentaire pour le coefficient de qualité. Elle a aussi l'avantage de faire le lien entre les mesures que l'on peut faire en régime permanent et celles que l'on peut faire en régime transitoire.

CONCLUSION.

L'analyse systématique des différentes définitions du coefficient de qualité nous a permis de préciser les différents sens possibles de celui-ci en évitant les interprétations abusives, dont on a vu plusieurs exemples.

Cette mise au point nous a semblé d'autant plus utile que la notion de circuit résonnant est largement utilisée en électronique et pour établir les modèles de bien des systèmes physiques, en mécanique, en acoustique, en optique, en physique des solides et dans d'autres disciplines encore.

J.-P. VALENTIN,
Groupe pédagogique
(*Faculté des Sciences de Besançon*).
