Quelques aspects des problèmes énergétiques rencontrés dans l'étude des oscillateurs

L'étude théorique des oscillateurs est très souvent limitée aux phénomènes linéaires. Traditionnellement, elle consiste à rechercher les solutions d'une équation différentielle de la forme : $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$; les solutions de l'équation sans second membre représentent les oscillations libres et permettent d'en déterminer les différents régimes possibles ; l'étude des oscillations forcées, représentées par une solution particulière de l'équation avec second membre, conduit à définir l'impédance de l'oscillateur et à discuter le phénomène de résonance.

Cette présentation, fondée sur la théorie des équations différentielles, est formellement exclue par les commentaires du nouveau programme de Terminale. Elle ne peut néanmoins être ignorée du professeur, et d'ailleurs, la démarche proposée n'est autre qu'une présentation expérimentale des résultats de l'étude théorique mentionnée ci-dessus. Les commentaires suggèrent également quelques exercices au sujet des problèmes énergétiques qui peuvent alors être soulevés. Le but de cet article est de développer ces suggestions, et de montrer en particulier que l'on peut établir de nombreux résultats sans résoudre explicitement l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur amorti (ce qui dépasserait évidemment le niveau d'une classe Terminale). Nous commencerons par l'étude du cas des oscillateurs non amortis, pour lesquels nous ferons quelques remarques relatives à l'utilisation de l'équation de conservation de l'énergie, puis nous passerons au cas des oscillations libres et forcées des oscillateurs amortis par frottement visqueux ; nous ne considérerons que des oscillateurs à un degré de liberté.

1) OSCILLATEURS LIBRES NON AMORTIS.

a) Conservation de l'énergie pour un oscillateur mécanique.

Modélisons un oscillateur mécanique quelconque par une masse m, attachée à l'extrémité d'un ressort à boudin de masse négligeable, de raideur k, dont l'autre extrémité est fixe ; la masse est assujettie à se déplacer sans frottement sur un axe

horizontal Ox parallèle à l'axe du ressort ; son abscisse x est comptée à partir de sa position d'équilibre (ressort non tendu pour $x = 0$).

Pour l'étude théorique du mouvement de cet oscillateur, on peut partir de l'équation différentielle du mouvement exprimant la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{1}$$

On peut aussi partir de l'intégrale première de l'équation (1), qui exprime la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \mathrm{E}, \tag{2}$$

où E est une constante au cours du mouvement : c'est l'énergie mécanique totale du système, égale à la somme de l'énergie cinétique de la masse et de l'énergie potentielle du système, que l'on peut considérer comme emmagasinée dans le ressort.

Mathématiquement, on passe aisément de (1) à (2) par la méthode qui permet de manière générale d'établir le théorème de l'énergie cinétique : on multiplie les deux membres de (2) par $\dot{x}$ et on intègre :

$$m\dot{x}\ddot{x} = -kx\dot{x}$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2\right) = 0. \tag{3}$$

Inversement, on passe de (2) à (1) par dérivation par rapport au temps.

Les commentaires de programme suggèrent de prendre l'équation (1) comme point de départ et non l'équation (2). Deux arguments au moins permettent de comprendre cette recommandation :

(*i*) Le premier argument est purement pédagogique. Dans un premier temps, on affirmerait donc comme une loi fondamentale que l'énergie mécanique est conservée. Mais ultérieurement, on serait bien forcé de constater que l'oscillateur s'amortit. On invoquerait bien sûr l'effet des frottements, et l'on expliquerait que, si l'énergie mécanique diminue, cette « perte » est compensée par une « production de chaleur » égale à sa diminution. Assurément, le très bon élève apprendrait ainsi ce qu'est la démarche effective du chercheur, qui retouche en l'affinant la modélisation des phénomènes lorsqu'elle n'est pas complètement satisfaisante. Mais toute étude quantitative passera nécessairement par la généralisation de l'équation (1) :

$$m\ddot{x} = -kx + F_f, \qquad (1')$$

où F_f est la force de frottement, et il y a tout lieu de craindre que l'élève moyen ou médiocre garde le sentiment que les physiciens ne sont pas des gens sérieux : ils proclament comme fondamentale une loi de conservation (2), dont ils se débarrassent dès que « ça ne marche plus » pour la remplacer par une modification (1') de sa conséquence (1).

(*ii*) Il existe aussi une raison plus fondamentale : la conservation de l'énergie à elle seule ne suffit pas pour justifier que la masse se met en mouvement quand on l'abandonne sans vitesse initiale après avoir tendu le ressort, ou ne s'arrête pas définitivement quand elle atteint son élongation maximale (pas plus qu'elle ne suffit pour justifier qu'une pierre tombe si on la lâche sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur). En termes mathématiques, l'équation (1) n'est pas la seule conséquence possible de (2) ; il en existe une autre, solution parasite introduite lors du passage de (1) à (2) par la multiplication par $\dot{x}$; c'est la solution :

$$x = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} = \text{Cte}, \ \dot{x} = 0.$$

Plus généralement (cf. appendice 1), une loi de conservation telle que (2) n'est pas suffisante pour permettre de déterminer l'évolution d'un système ; il faut pour cela une équation d'évolution, telle que (1).

Signalons au passage néanmoins que l'équation (2), outre son intérêt physique, permet une démonstration, facile en Terminale, du fait que les seules solutions de (1) sont sinusoïdales (cf. appendice 2).

b) **Conservation de l'énergie pour un oscillateur électrique.**

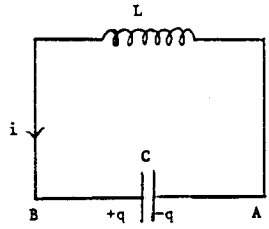

Fig. 1

Une bobine d'inductance L est branchée aux bornes A et B d'un condensateur de capacité C. On a, avec les notations de la figure : $V_A - V_B = L\frac{di}{dt} = -\frac{q}{C}$, et $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, d'où :

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0. \tag{4}$$

La multiplication par $\dot{q}$ donne :

$$L\dot{q}\ddot{q} + \frac{1}{C} q\dot{q} = 0, \tag{5}$$

d'où :

$$\frac{1}{2} L\dot{q}^2 + \frac{1}{2C} q^2 = E \tag{6}.$$

Les équations (4), (5), (6) sont identiques aux équations (1), (2), (3), avec l'analogie électro-mécanique bien connue :

$$x \longleftrightarrow q$$

$$v = \dot{x} \longleftrightarrow i = \dot{q}$$

$$m \longleftrightarrow L$$

$$k \longleftrightarrow \frac{1}{C}$$

Lors des oscillations de l'oscillateur mécanique décrites par :

$$x = a \cos \omega_0 t, \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

il y a transformation incessante d'énergie cinétique en potentielle, et inversement, leur somme restant constante. De même, lors des oscillations de l'oscillateur électrique décrites par :

$$q = q_M \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad q_M = \sqrt{2\,CE}, \quad \omega_0 \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

il y a transformation incessante d'énergie magnétique $\frac{1}{2} Li^2$, emmagasinée dans la bobine, en énergie électrique $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$, emmagasinée dans le condensateur, leur somme restant constante.

Il paraît clair que, dans le cas électrique, il serait encore moins souhaitable que dans le cas mécanique de déduire (4) comme conséquence de (6). Les énergies emmagasinées dans les bobines et condensateurs ont un caractère encore plus abstrait que les énergies cinétiques et potentielles, et troublent souvent le débutant. L'analogie qui précède aidera à le convaincre de

leur existence, et plus encore probablement celles qui vont être exposées ci-dessous.

2) OSCILLATEURS AMORTIS.

a) Oscillations libres amorties.

Pour un oscillateur mécanique amorti par frottement fluide, l'équation du mouvement a la forme :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}. \tag{7}$$

En multipliant par $\delta x = \dot{x}\,\delta t$, on obtient :

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x}\,\delta t + k\,x\,\dot{x}\,\delta t = h\,\dot{x}^2\,\delta t$$

soit :

$$m\,\dot{x}\,\delta\dot{x} + k\,x\,\delta x = -h\,\dot{x}\,\delta x. \tag{8}$$

Le résultat n'est autre évidemment que l'application à ce cas particulier du théorème de l'énergie cinétique :

$$m\,\dot{x}\,\delta\dot{x} = \delta\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2\right)$$

est la variation d'énergie cinétique de la masse pendant la durée δt ; elle est égale à la somme $-k\,x\,\delta x - h\,x\,\delta x$ des travaux des forces appliquées pendant cette durée. On peut dire aussi : la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle $\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$ n'est pas constante, en raison de l'existence d'une force de frottement ; sa variation pour une durée très petite δt :

$$\delta\left(\frac{1}{2}\,kx^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2\right) = -h\dot{x}\,\delta x = -h\,\dot{x}^2\,\delta t \tag{9}$$

toujours négative, est égale au travail de cette force de frottement.

Pour une durée quelconque, on a donc :

$$\Delta\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2\right) \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2\right)_{t=t_2} - \left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2\right)_{t=t_1}$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} h\,\dot{x}\,\delta x = -\int_{t_1}^{t_2} h\,\dot{x}^2\,\delta t. \tag{10}$$

Un intérêt de ce calcul est sa transposition facile au cas de l'oscillateur électrique lorsqu'on ne néglige plus la résistance R du circuit LC :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \qquad (11)$$

donne : $$\delta\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}\right) = -Ri^2\,\delta t \qquad (12)$$

avec $i = \dot{q}$ comme précédemment. On voit que la variation de la somme de l'énergie emmagasinée dans la bobine et de l'énergie emmagasinée dans le condensateur est, en module, égale à la chaleur dégagée par effet Joule.

On peut aussi utiliser les équations (9) ou (12) pour mettre en évidence la signification énergétique du coefficient de qualité Q de l'oscillateur, au moins lorsque les oscillations sont peu amorties, ce qui est le seul cas où sa définition présente un intérêt. Montrons-le par exemple dans le cas de l'oscillateur électrique. Si l'oscillateur est très peu amorti, l'étude expérimentale montre que la variation de i à l'allure d'une sinusoïde dont l'amplitude diminue au cours du temps et dont la période est très voisine de $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$. (La justification théorique n'est pas possible en Terminale, mais le résultat est cependant prévisible par continuité à partir du cas limite où l'amortissement est nul). Pendant la durée T_0 comprise entre les dates t_1 et $t_1 + T_0$, on peut donc écrire avec une bonne approximation :

$$i(t) \simeq I_M \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (13)$$

et la variation ΔE de l'énergie E de l'ensemble du condensateur et de la bobine est :

$$\Delta E = -\int_{t_1}^{t_1 + T_0} R\,I_M^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\,dt = -\frac{R\,I_M^2\,T_0}{2} = -\frac{\pi R\,I_M^2}{\omega_0} \qquad (14)$$

Le coefficient de qualité, défini à l'aide de la largeur de la « bande passante » lors de l'étude des oscillations forcées, est :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}. \qquad (15)$$

L'énergie totale emmagasinée dans l'ensemble du condensateur et de la bobine pendant la durée considérée est, sous réserve de la validité de l'approximation (13) :

$$E = \frac{1}{2} L I_M^2.$$

On a donc :

$$\Delta E = -\frac{\pi R I_M^2}{\omega_0} = -\frac{\pi}{Q} L I_M^2 = -\frac{2\pi}{Q} E. \qquad (16)$$

La signification énergétique du facteur de qualité Q est ainsi mise en évidence :

$$Q = \frac{2\pi E}{|\Delta E|} = 2\pi \times \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{énergie perdue par « période »}}. \qquad (17)$$

Dans la mesure où E décroît lentement au cours du temps, sa décroissance relative $\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{2\pi}{Q}$ est très petite pendant une « période » T_0 ; on peut donc écrire :

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{2\pi E}{Q T_0} = -\frac{\omega_0 E}{Q}. \qquad (18)$$

Par intégration, on obtient :

$$E = E_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}. \qquad (19)$$

On peut en déduire la décroissance exponentielle de l'intensité maximale :

$$I_M = \sqrt{\frac{2E}{L}} = \sqrt{\frac{2E_0}{L}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \qquad (20)$$

Cela permet de comprendre que l' « enveloppe » de la courbe donnant les oscillations amorties de i soit constituée de deux exponentielles.

La transposition de tout ce calcul à l'oscillateur mécanique est immédiate.

b) **Oscillations forcées.**

Si une différence de potentiel $v(t) = V_M \cos \omega t$ est imposée aux bornes d'un circuit (ou plutôt d'un dipôle) RLC, on a :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = v(t).$$

L'énergie fournie par le dispositif qui impose la d.d.p. est, pendant la durée δt :

$$v\, i\delta t = L\ddot{q}\dot{q}\,\delta t + \frac{q\dot{q}}{C}\,\delta t + R\dot{q}^2\,\delta t$$

$$= \delta\left(\frac{1}{2}\,Li^2 + \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}\right) + Ri^2\,\delta t.$$

Cette énergie est donc la somme des variations des énergies emmagasinées et de l'effet Joule.

L'expérience montre que i et q varient sinusoïdalement à la pulsation ω ; l'énergie totale fournie en une période T est donc intégralement transformée en effet Joule puisque les énergies emmagasinées reprennent la même valeur après une durée T.

Lorsque $\omega \neq \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, les énergies maximales $\dfrac{1}{2}\,L\,I_M^2$ et $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{Q_M^2}{C}$ emmagasinées par la bobine et le condensateur au cours de la période ne sont pas égales ; par ailleurs, i et v ne sont pas en phase et le produit vi ne garde pas un signe constant : pendant une partie de la période, le dipôle restitue de l'énergie au générateur. A résonance ($\omega = \omega_0$) ces énergies sont au contraire égales ; comme i et q sont en quadrature, on a transformation incessante d'énergie magnétique en énergie électrique et inversement, leur somme E restant constante, comme dans les oscillations libres. Mais dans ce cas, cette transformation d'énergie ne se fait plus sans pertes, en raison de la résistance non nulle du dipôle ; le générateur apporte juste l'énergie nécessaire pour compenser ces « pertes ». On note d'ailleurs que l'énergie $|\Delta E|$ dissipée en une période est :

$$|\Delta E| = \frac{R\,I_M^2\,T_0}{2} = \frac{\pi R I_M^2}{\omega_0} = \frac{2\pi}{Q} \times \frac{1}{2}\,L\,I_M^2 = \frac{2\pi}{Q}\,E\ ;$$

on retrouve ainsi la signification énergétique du coefficient de qualité Q du circuit.

Là encore, nous ne développerons pas l'analogie mécanique qui est immédiate, la d.d.p. imposée étant remplacée par une force $F(t) = F_M \cos \omega t$ qui s'exerce sur la masse attachée au ressort, dans la direction sur laquelle elle peut se déplacer.

CONCLUSION.

La méthode qui vient d'être développée peut être appliquée à de nombreux autres problèmes. Comme nous l'avons remar-

qué, elle n'est autre que celle qui conduit à l'établissement du théorème de l'énergie cinétique. C'est cette même méthode qui permet d'ailleurs d'établir l'expression de l'énergie emmagasinée dans un condensateur ou dans une bobine, à l'aide des équations qui décrivent l'établissement de la charge ou du courant, respectivement quand on branche une f.é.m. e aux bornes d'un dipôle (R, C) ou (R, L) :

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = e \Rightarrow R\dot{q}^2\,\delta t + \delta\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = e\,i\delta t$$

et : $$L\frac{di}{dt} + Ri = e \Rightarrow Ri^2\,\delta t + \delta\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = e\,i\delta t.$$

L'interprétation physique des différents termes de ces équations conduit aux résultats cherchés, que l'on obtient donc sans résoudre explicitement l'équation différentielle. On peut aussi montrer que, lors de la décharge d'un condensateur, ou si l'on supprime brusquement le générateur dans le circuit (R, L), l'énergie emmagasinée est entièrement récupérée en effet Joule. On peut étudier également ainsi des questions qui dépassent le niveau et le programme de la classe Terminale : oscillateurs couplés, énergie emmagasinée dans plusieurs circuits couplés par induction mutuelle, etc...

Il serait évidemment fastidieux de traiter devant les élèves de multiples exemples d'exercices du même type, mais un ou deux exemples bien choisis peuvent permettre d'établir une liaison entre les questions qui figurent au programme de Terminale et la loi de conservation de l'énergie, dont l'étude constitue l'un des grands chapitres du programme de Première.

Appendice 1.

L'objet de cet appendice est de justifier l'affirmation énoncée au § 1. a : la loi (2) de conservation de l'énergie mécanique n'est pas suffisante pour déterminer complètement l'évolution d'un système conservatif.

Soit un système conservatif dont la position est définie par un seul paramètre x ; si on connaît en fonction de x la valeur $E_p(x)$ de son énergie potentielle (définie à une constante additive près), la conservation de l'énergie conduit à une équation de la forme :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x) = E, \qquad \text{(A1)}$$

où E est une constante.

La « force » (*) qui s'exerce sur le système est :

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}. \qquad \text{(A2)}$$

Pour connaître la loi de variation de x en fonction de t, ou, ce qui revient au même, de t en fonction de x, on intègre l'équation différentielle (A1), qui donne :

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}}. \qquad \text{(A3)}$$

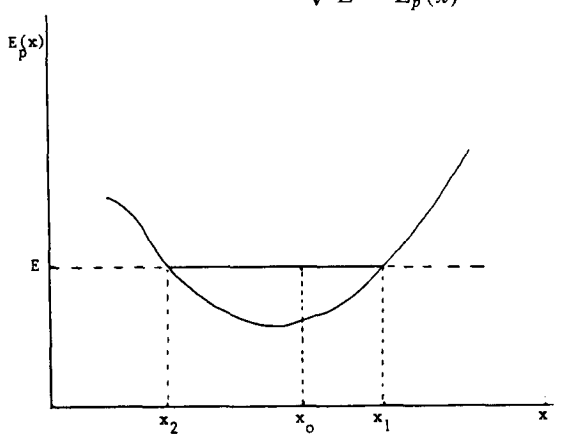

Fig. 2

(*) Les guillemets rappellent qu'il s'agit d'un système caractérisé par un paramètre x, non nécessairement du mouvement d'un point sur un axe ; la « force » peut très bien être un moment par rapport à un axe, m un moment d'inertie, x un angle, etc.

On choisit le signe à l'aide de la condition initiale. Supposons par exemple qu'à la date $t = t_0$, on ait $x = x_0$, avec à cette date $x = v_0 > 0$.

(E est déterminé par : $E = E_p(x_0) + \frac{1}{2} m v_0^2$). On doit choisir le signe + et on en déduit :

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}}. \qquad \text{(A4)}$$

L'équation (A4) donne la loi du mouvement. Elle est valable jusqu'à la date t_1 où x atteint, si elle existe, la valeur x_1 pour laquelle $E_p(x_1) = E$ (cf. fig. 2) ; (on montre que l'intégrale (A4) est convergente si $x \to x_1$, bien que $E_p(x_1) = E$, pourvu que $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x = x_1} = -F(x_1)$ soit non nul).

A la date t_1, $x = x_1$ et $\dot{x} = 0$, l'équation (A1) est vérifiée, et elle ne permet pas à elle seule de conclure que le système repart et ne reste pas indéfiniment au point d'abscisse x_1. On ne peut l'affirmer qu'en revenant à l'équation fondamentale de la dynamique, dont (A1) est une conséquence :

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dE_p}{dx}. \qquad \text{(A5)}$$

Pour $t = t_1$ et $x = x_1$, on a donc : $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = \frac{F(x_1)}{m} < 0$;

un développement de $x(t)$ au voisinage de $t = t_1$ doit donc s'écrire :

$$x(t) = x_1 + \frac{(t - t_1)^2}{2} \ddot{x}(\vartheta), \qquad \text{(A6)}$$

ϑ étant compris entre t et t_1, et par conséquent $\ddot{x}(\vartheta) < 0$ si t est assez voisin de t_1. C'est ce qui montre que x ne reste pas constant et décroît pour $t > t_1$; il en résulte que $\dot{x}$ est négatif pour $t > t_1$, et est donc donné par :

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}. \qquad \text{(A7)}$$

La loi du mouvement pour $t > t_1$ sera donc :

$$t = t_1 - \int_{x_1}^{x} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}} \qquad \text{(A8)}$$

solution valable jusqu'à la date t_2 où x en décroissant atteint éventuellement une valeur x_2 pour laquelle $E_p(x_2) = E$; si une telle valeur existe :

$$t_2 = t_1 - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}}. \qquad \text{(A9)}$$

A la date t_2, on se trouve dans une situation analogue à celle rencontrée à la date t_1, la différence étant que $x(t_2) > 0$. Une 3me phase du mouvement commence alors, pour laquelle à nouveau $x > 0$, et on a donc pour $t > t_2$:

$$t = t_2 + \int_{x_2}^{x} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}}, \qquad \text{(A10)}$$

jusqu'à la date t'_1 pour laquelle à nouveau $x = x_1$. Dans le cas du « puits de potentiel » considéré, on voit donc que le mouvement se poursuit de manière périodique, et que sa période est donnée par :

$$T = 2 \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}}. \qquad \text{(A11)}$$

Les commentaires du programme de Première suggèrent d'étudier qualitativement des problèmes de ce type, mais cette étude n'est possible que parce que l'on sait que les « points » x_1 et x_2, pour lesquels la « force » $F = -\frac{dE_p}{dx}$ n'est pas nulle, ne sont pas des positions d'équilibre du système.

On trouvera dans les traités de mécanique l'étude complète des équations de la forme de l'équation (A1), complétée par l'examen des cas particuliers où $F(x_1) = 0$ (ou $F(x_2) = 0$), situation pour laquelle le « point » x_1 (ou x_2) correspond à une position d'équilibre du système.

Appendice 2.

Il est clair que l'on peut trouver à l'équation (1) des solutions sinusoïdales de la forme : $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$, à condition de choisir :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Une façon simple de montrer qu'il n'y en a pas d'autres consiste à remarquer qu'une solution de (1) étant nécessairement solution de (2), on peut la chercher sous la forme :

$$x = a \cos \psi(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \psi(t), \qquad \text{(A12)}$$

où $\psi(t)$ est *a priori* inconnu. On aura alors :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - \frac{1}{2} kx^2 \ldots$$

$$= E - E \cos^2 \psi(t) = E \sin^2 \psi(t) \qquad \text{(A13)}$$

Mais par ailleurs, (A12) donne :

$$\dot{x} = - \sqrt{\frac{2E}{k}} [\sin \psi(t)] \dot{\psi}(t).$$

D'où :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{mE}{k} [\sin^2 \psi(t)] \dot{\psi}^2(t). \qquad \text{(A14)}$$

L'identification de (A13) et (A14) donne :

— soit $\sin \psi = 0$, $\cos \psi = \pm 1$, ce qui est la solution parasite

$$x = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad \dot{x} = 0,$$

— soit $\dot{\psi}^2(t) = \frac{k}{m}$, d'où : $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi$, où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

φ étant constant (le choix d'un signe — en prenant la racine n'apporte pas de solution nouvelle).

J.-P. BARRAT,

U.E.R. de Sciences
(Université de Caen).