Incertitudes affectant les mesures de Physique et de Chimie réalisées en classe

Quelle conduite tenir, en classe, avec les élèves, en ce qui concerne l'évaluation de l'incertitude entachant la mesure d'une grandeur ?

A cette question, il n'est pas de réponse unique, car les mesures réalisées par le professeur, en cours, ou par les élèves en Travaux Pratiques, ou en Travaux de Laboratoire, sont très diverses et relèvent de différentes techniques d'appréciation.

Il n'est pas non plus de réponse simple, car les conditions de travail et d'emploi du matériel scientifique diffèrent souvent beaucoup, dans la pratique courante de l'enseignement, de celles que l'on trouve dans un laboratoire de métrologie universitaire ou industriel, et la transposition est donc délicate, voire impossible.

Nous commencerons donc par envisager le cas le plus simple où la mesure de la même grandeur a pu être effectuée plusieurs fois dans des conditions sensiblement équivalentes (notamment avec des appareils de même classe de précision nominale) et indépendantes (groupes différents, utilisant du matériel différent).

Cette situation n'est pas purement théorique : on la rencontre souvent en Travaux Pratiques de Chimie, et on peut facilement la créer dans plusieurs cas de mesures physiques (pesée de corps numérotés ; mesure de résistances étiquetées ; détermination de la masse volumique d'une même substance à partir d'échantillons différents, détermination de l'accélération de la pesanteur, etc.).

Dans ce cas, nul besoin de formules plus ou moins approchées, ni d'hypothèses par trop invraisemblables : il suffit d'exploiter la dispersion des résultats des différents groupes. Il faut pour cela que celle-ci existe, autrement dit, que les appareils utilisés soient assez sensibles pour la provoquer ; il faut aussi qu'elle soit raisonnable, c'est-à-dire qu'on puisse l'expliquer par les différents aléas qui entachent les mesures.

Il n'est pas nécessaire qu'il y ait un grand nombre de mesures. Avec 7 ou 8 résultats, on peut déjà proposer un intervalle de confiance ayant une forte probabilité de contenir la vraie valeur cherchée, et égal au tiers de l'étendue des mesures (intervalle allant de la plus petite à la plus grande).

Dans une première partie, nous traiterons donc ce type de situation, et nous dirons ensuite quelques mots, dans un deuxième temps, de la manière dont on peut aborder les problèmes lorsqu'on ne réalise qu'une seule mesure de la même grandeur, situation courante en séance d'essais, dans les lycées techniques.

I. INTERVALLE DE CONFIANCE DE LA MESURE D'UNE GRANDEUR, OBTENU A PARTIR DE n RESULTATS.

On a obtenu n mesures indépendantes : x_1, x_2, x_i ... ; x_n ; d'une même grandeur, dont la valeur réelle, inconnue, est X.

Hypothèse.

On admet que si on en avait réalisé un très grand nombre $N \gg n$, les mesures obtenues seraient réparties suivant une loi de Gauss, de moyenne X et d'écart-type σ, également inconnu.

Remarque 1.

Le fait que la moyenne des N mesures théoriques soit X suppose que la méthode utilisée **n'entraîne pas d'erreur systématique.** Dans la pratique, il en est rarement ainsi, c'est pourquoi il serait illusoire de prétendre atteindre la valeur exacte d'une grandeur en multipliant simplement le nombre des mesures, sans porter suffisamment d'attention à la méthode employée.

Remarque 2.

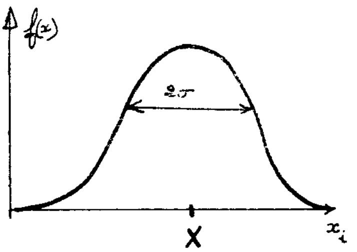
On fait parfois remarquer que l'hypothèse d'une distribution gaussienne n'est pas réaliste puisqu'une telle distribution s'étend symétriquement autour de sa moyenne, de $-\infty$ à $+\infty$, alors qu'une mesure correcte de g, par exemple, ne peut conduire à un nombre négatif. En réalité, le théorème « central limite » montre seulement que sous certaines conditions (assez peu restrictives), une variable aléatoire obtenue par addition de plusieurs autres (le nombre doit parfois être assez important) a *autour de la moyenne* une distribution gaussienne. Quand nous faisons l'hypothèse que la distribution des N mesures serait gaussienne, il faut entendre que nous supposons que cette distribution suivrait la loi normale de Gauss dans un intervalle de 7 ou 8 σ autour de la moyenne X.

Résultats de statistique que nous admettons.

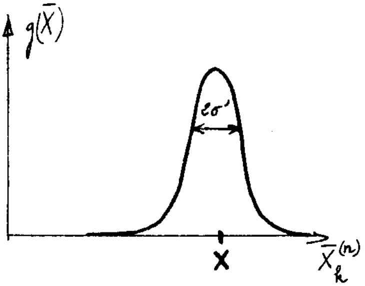
Si on avait P groupes de résultats comportant chacun n mesures, on aurait pu, chaque fois, calculer la moyenne $\overline{X}_k^{(n)}$ de ces n mesures, k variant de 1 à P.

Si P était lui-même très grand, on pourrait tracer la courbe de répartition des $\overline{X}_k^{(n)}$.

On trouverait encore une répartition de Gauss, centrée sur la même moyenne X, mais d'écart-type $\sigma' = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



Distribution
des mesures.



Distribution des moyennes
de n mesures.

Ce dernier résultat est très général et ne dépend pas de la loi de répartition initiale des x_i.

Revenons à notre problème initial qui est la détermination d'un intervalle ayant une forte probabilité de contenir la vraie valeur X d'une grandeur, lorsqu'on a n mesures indépendantes $x_1, \dots x_i, \dots x_n$ de cette grandeur.

Cet intervalle s'appellera *intervalle de confiance.*

La probabilité correspondante, qu'on exprime en %, s'appelle *le niveau de confiance.* On dit qu'on détermine un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, ou au niveau de confiance 99 %. Bien entendu, plus on désire que l'intervalle de confiance ait une forte probabilité de contenir X, plus il faut l'élargir, et pour une même série de mesures, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 99 % est plus large que celui qui correspond au niveau de confiance 95 %.

Tous ces intervalles de confiance, quelle que soit la méthode utilisée pour les déterminer, et quel que soit le niveau de confiance choisi, sont centrés sur la moyenne $\overline{X}$ des n mesures :

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x_i}{n}.$$

$\overline{X}$ a en outre la propriété d'être le meilleur estimateur de X, c'est-à-dire que si, dans des calculs, on désire utiliser la grandeur inconnue X, c'est $\overline{X}$ qu'on prendra pour cela, comme valeur approchée de X.

Nous allons donner deux méthodes pour déterminer un intervalle de confiance affecté d'un niveau de confiance donné (95 % ou 99 %).

● La première utilise comme donnée intermédiaire le nombre $s = \sqrt{\dfrac{\Sigma (x_i - \overline{X})^2}{n-1}}$ qui est le meilleur estimateur de σ. C'est ce nombre s qui est directement calculé par de nombreuses machines à calculer. On peut être surpris de la présence du terme $n - 1$ au dénominateur de la fraction. En fait, si l'écart-type de la série des n données vaut bien $\sqrt{\dfrac{\Sigma (x_i - \overline{X})^2}{n}}$, ce que l'on cherche à estimer, c'est l'écart-type σ de la distribution inconnue des N mesures : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma (x_j - X)^2}{N}}$ $(N \gg n)$.

On montre facilement, en mathématiques, que le fait de diviser par $n - 1$ rétablit l'équilibre, c'est-à-dire que si nous disposions de P lots de n mesures, P étant très grand, la moyenne des $s_k^{(n)}$, calculés de la manière précédente (k variant de 1 à P), vaudrait bien σ, écart-type de la distribution théorique initiale des $x_j \cdot (j = 1 \dots N)$.

Cette méthode fait intervenir explicitement un coefficient t dit de Student, qui dépend de l'effectif n de la série de mesures, et du niveau de confiance choisi.

Ainsi lorsque l'on dit que l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est $\left(\overline{X} - t \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$, cela signifie que la double inégalité :

$$\boxed{\overline{X} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leqslant X \leqslant \overline{X} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad (1)$$

a la probabilité 0,95 d'être satisfaite.

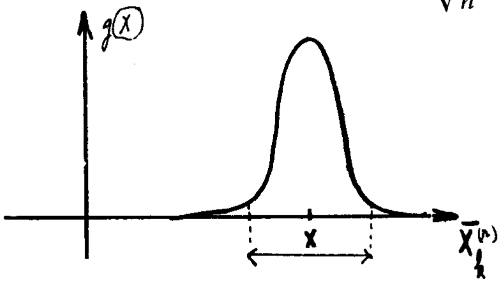
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
$t_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25

n	12	14	16	18	20	30	50	100	∞
$t_{95\%}$	2,20	2,16	2,13	2,11	2,09	2,04	2,01	1,98	1,96
$t_{99\%}$	3,11	3,01	2,95	2,90	2,86	2,76	2,68	2,63	2,57

Remarques sur les valeurs du coefficient t de Student.

Lorsque $n \to \infty$, s tend vers l'écart-type réel σ.

Considérons alors la valeur de t correspondant pour $n \to \infty$ au niveau de confiance 95 % : $t_{95\%}(\infty) = 1{,}96$. Souvenons-nous, maintenant que la variable aléatoire $\overline{X}$ est distribuée selon une loi normale de moyenne X et d'écart-type $\sigma' = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



$2.\left(1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1{,}96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ représente donc le demi-intervalle, centré sur X, contenant 95 % des moyennes $\overline{X}$.

On peut dire ceci autrement :

« La probabilité pour qu'une moyenne isolée $\overline{X}^{(n)}$ soit comprise dans l'intervalle $\left(X - 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ X + 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, est 0,95. »

Ou encore :

« La probabilité pour que $|X - \overline{X}| \leqslant 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, vaut 0,95. »

Mais cette dernière inégalité s'écrit encore :

$$|\overline{X} - X| \leqslant 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

autrement dit : la probabilité pour que X appartienne à l'intervalle $\overline{X} - 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est de 95 %.

Nous retrouvons très exactement, dans le cas où $n \to \infty$, et où, par conséquent $s \to \sigma$, les termes mêmes de notre assertion initiale (1).

Dans le cas où n est faible, le coefficient t est supérieur à la simple valeur tirée de la loi normale (1,96 pour 95 %, 2,57 pour 99 %, etc.), justement parce que s n'est qu'un estimateur de σ (et que $s \simeq \sigma$ que pour n grand).

● La deuxième méthode, plus simple à mettre en œuvre, est réservée aux petits nombres de mesures. Elle utilise uniquement l'étendue r de la série des mesures ; r est la différence entre les mesures extrêmes x_M et x_m. Cette méthode conduit, en moyenne, à un intervalle de confiance un peu plus large que celui que donne la méthode précédente. Lorsque n ne dépasse pas 12, elle est pratiquement aussi efficace (annexe à la norme NF X06-042). En fait, cette méthode utilise également les coefficients t de Student qui sont intégrés dans le calcul des coefficients q.

Si on ne l'utilise pas pour les valeurs élevées de n, c'est tout simplement parce que dans ces conditions, elle est beaucoup plus sensible que la méthode utilisant le coefficient s à la non normalité de la distribution initiale des x_i. En effet, elle n'appréhende l'échantillon des n mesures que par ses valeurs extrêmes, et, lorsque n est élevé, ces valeurs extrêmes sont très variables d'une loi de distribution à l'autre.

Les coefficients q permettant de déterminer un intervalle de confiance à un niveau de confiance déterminé sont donnés ci-après.

L'intervalle de confiance est $(\overline{X} - q \cdot r\ ;\ \overline{X} + q \cdot r)$; au niveau de confiance 95 %, par exemple, la probabilité pour que la double inégalité :

$$\overline{X} - q \cdot r \leqslant X \leqslant \overline{X} + q\, r$$

soit satisfaite, est de 0,95.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_{95\ \%}$	6,35	1,30	0,72	0,51	0,40	0,33	0,29	0,26
$q_{99\ \%}$	31,8	3,01	1,32	0,84	0,63	0,51	0,43	0,37
n	10	12	14	16	18	20	30	
$q_{95\ \%}$	0,23	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,09	
$q_{99\ \%}$	0,33	0,28	0,24	0,21	0,19	0,18	0,12	

EXEMPLES REELS D'APPLICATION DE CES METHODES, TIRES DE MANIPULATIONS D'ELEVES

1. Simple pesée d'un objet, en classe de Seconde A.

N° du groupe ayant effectué la pesée	N° de l'objet							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	110,7	109,5	180,7	181,4	110,1	110,6	110,5	109,4
2	110,9	109,7	180,8	181,4	110,3	110,8	110,7	110,1
3	110,7	110,0	180,63	*185,5*	110,1	110,6	110,4	110,3
4	111,0	110,0	181,0	181,3	110,2	110,7	110,5	110,2
5	110,8	110,1	180,9	181,5	110,2	110,7	110,5	110,1
6	110,8	110,0	180,7	181,5	110,2	110,8	110,4	110,1
7	**110,9**	**110,1**	**181,0**	**181,5**	**110,2**	**110,8**	**110,6**	**110,5**
8	110,7	110,0	180,89	181,5	110,1	110,7	110,5	110,2
moyenne	110,81	109,91	180,82	181,44	110,16	110,71	110,51	110,11
Δm 95 %	0,09	0,18	0,12	0,08	0,06	0,06	0,09	0,12

Remarques :

a) La dispersion des mesures n'est pas vraiment suffisante pour appliquer les méthodes précédentes ; il aurait fallu peser au cg près.

b) Le lot de balances permet, lorsqu'on les utilise toutes, de ramener l'incertitude sur la mesure d'une masse, au niveau de confiance 95 %, à environ 0,1 g ; par contre, si l'on effectue une pesée avec une balance prise au hasard dans ce lot, il semble bien que l'intervalle de confiance à 95 % soit proche de 0,25 g ($2\,\sigma$, σ estimé par la moyenne des s).

c) Le groupe n° 7 a toujours trouvé un résultat supérieur à la moyenne. Cela veut-il dire que la balance correspondante est fausse ?

En analysant plus finement les résultats du groupe 7, et en les comparant aux résultats moyens, les tests statistiques indiquent que ces différences ne sont pas vraiment significatives. On peut néanmoins se poser la question.

d) Un groupe dont les résultats sont toujours très différents de la moyenne, parfois en dessous et parfois en dessus, manipule certainement assez mal. C'est presque le cas, ici, pour le groupe 3 qui, d'une part a fourni le seul résultat aberrant, et de l'autre a souvent donné les résultats extrêmes.

e) Alors que l'objet n° 7 a certainement une masse supérieure à celle de l'objet n° 8 (110,5 g contre 110,1 g), le groupe n° 6 a trouvé 110,4 g pour l'objet n° 7 tandis que le groupe n° 7 a trouvé 110,5 g pour l'objet n° 8. Evidemment, si chacun avait eu conscience qu'en effectuant une pesée, il donnait un résultat approché à 0,25 g près, les groupes 6 et 7, seuls, n'auraient pas déduit de leurs mesures que la masse de l'objet 8 était supérieure à celle de l'objet 7. La possibilité d'erreur existe toutefois.

Cela nous rappelle que certains appellent sensibilité moyenne d'un lot de balances, la plus petite variation de masse décelable, en deux pesées différentes, en limitant à 5 % le risque de 1re espèce (risque de soutenir que la masse a varié alors que c'est faux), et à 5 % le risque de 2me espèce (soutenir que la masse n'a pas varié alors qu'elle a effectivement varié).

Il semble qu'ici, avec une telle définition de la sensibilité, on serait amené à proposer, pour la mesurer, une valeur proche de 0,5 g.

2. Estérification, en classe de Terminale E.

La classe comprend 8 groupes. D'un mélange équimolaire initial d'acide acétique et de butanol (quelques gouttes d'acide sulfurique servant de catalyseur), chaque groupe a reçu 8 tubes. L'un des tubes servant de témoin, les 7 autres sont placés au bain-marie et sont analysés à tour de rôle.

Les groupes en déduisent le pourcentage d'acide disparu.

Au bout de :	Groupes 1	2	3	4	5	6	7	8	Moyenne	Δ 95 %
7 mn	31	28	34	25	24	33	30	30	29,4	3,0
15 mn	44	43	46	45	38	46	46	47	44,4	2,4
25 mn	52	57	54	56	50	56	57	58	55,0	2,3
35 mn	58	61	60	61	55	61	63	62,6	60,2	2,2
50 mn	60,5	64	64	64	60,5	64	64	67	63,5	1,8
65 mn	64	67	66	67	63	67	66	67	65,9	1,3
80 mn	65	68	67	68	66	67	69	67	67,1	1,0

Remarques :

a) La courbe représentant le pourcentage de l'acide acétique disparu en fonction de la durée t, est beaucoup plus précise si on la trace à partir des moyennes collectives.

On peut estimer l'asymptote à 68 %.

En traçant sur du papier semi logarithmique, le complément à 68 % de l'acide disparu, on obtient une droite, ce qui établit que la première courbe est une exponentielle.

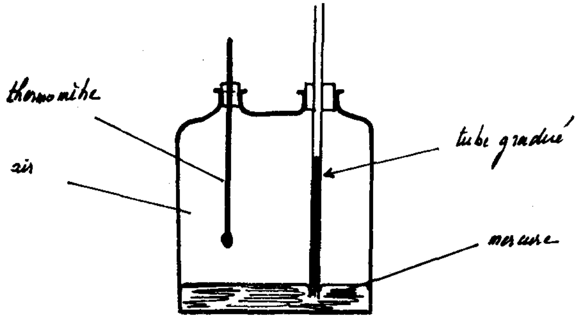
On détermine facilement la constante de temps τ de la réaction.

Pourcentage de l'acide disparu $= 68\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, avec $\tau \simeq 20$ mn.

b) La courbe collective permet de rattraper des maladresses individuelles. Le groupe n° 8, par exemple, aurait pu penser qu'au bout de 50 minutes, la réaction est achevée ; pour le groupe n° 5, au contraire, de 65 à 80 mn, la réaction semble se porsuivre au même rythme que précédemment...

3. Mesure de $\beta = \left(\dfrac{p - p_0}{p_0 \vartheta}\right)_{V = c^{ste}}$

classes de Seconde AB (1977).



Mode opératoire :

On chauffe au bain-marie, et lorsque l'ensemble refroidit, on note la pression p et la température ϑ.

Chaque élève trace sa courbe $p = f(\vartheta)$, l'approche par une droite, estime p_0, pression à 0° C et calcule le coefficient

$$\beta = \frac{p - p_0}{p_0 \vartheta}.$$

Voici les résultats qui ont été relevés dans deux classes :

$10^4 \beta =$	32	30	35	24	36	36	35	34	
	36	32	26	36	37	21	24	36	
	33	28	27	31	38	31	35	34	25

Exploitation :

$$\beta_{moyen} = 31{,}7 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}.$$

$$n = 25 \text{ mesures} \ ; \quad s = 4{,}8\ 10^{-4} \ ; \quad \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}96 \cdot 10^{-4}.$$

Intervalle de confiance à 95 % : $(2{,}97 \cdot 10^{-4} \ ; \ 33{,}7 \cdot 10^{-4})$.

Or : $$\frac{1}{273} = 36{,}6 \cdot 10^{-4}.$$

Alors que le coefficient t de Student correspondant au risque 5 % vaut 2,06, que celui correspondant au risque 1 % vaut 2,81 (valeurs extrapolées à partir du tableau précédent), pour obtenir, à partir de 25 mesures, et du seul fait du hasard une valeur moyenne égale à $31{,}7 \cdot 10^{-4}$ quand la valeur réelle est $36{,}6 \cdot 10^{-4}$, il faudrait un coefficient de Student égal à :

$$t = \frac{36{,}6 - 31{,}7}{0{,}96} = 5{,}1.$$

Les tables de Student montrent que la probabilité correspondante est largement inférieure à 10^{-3} ; autrement dit, la méthode utilisée comportait une erreur systématique (on pense à des fuites au niveau des bouchons...).

Les coefficients que nous avons donnés montrent seulement que la valeur réelle de β est extérieure à l'intervalle de confiance à 99 % : (29,0 ; 34,4).

Autrement dit, la probabilité pour que l'écart observé soit dû au hasard est inférieure à 1 %.

4. Chute libre des corps ; mesure de g par étincelage. Classe de Première C (1979).

On utilise la relation : $r = g\,\vartheta^2$; $\vartheta = 10^{-2}$ s.

Résultats :

g = 9,75 ; 9,65 ; 9,90 ; 9,80 ; 9,8 ; 10 ; 10 ; 9,8 ; 9,8 (m. s^{-2}).

Exploitation :

Première méthode : moyenne = 9,83.

$s = 0{,}11$; $\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}038$; $t = 2{,}31$; $t\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}088$

à 95 % : $\boxed{9{,}74 < g\,(\mathrm{m \cdot s^{-2}}) < 9{,}92}$

Deuxième méthode : $r = 10 - 9{,}65 = 0{,}35$.

$q_{95\,\%} = 0{,}26$; $q \cdot r = 0{,}091$

à 95 % : $\boxed{9{,}74 < g\,(\mathrm{m \cdot s^{-2}}) < 9{,}92}$

5. Mesure du poids d'un objet A à l'aide d'un ressort étalonné au préalable. Classe de Seconde T_1 (1978).

Mode opératoire :

On a utilisé des masses marquées, et pris $g = 10\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

Mesurer le poids A revient donc à encadrer sa masse.

La masse de A est connue par ailleurs avec une bonne précision : $m = 62{,}662$ g. Deux classes ont manipulé, par demi-groupes. Les mesures de la masse A sont exprimées en grammes.

2_4. Groupe A :	65	64	63	63	62	62	62	61
2_4. Groupe B :	67	65	63	62	62	62	62	61
2_6. Groupe A :	65	63	61	60	60	60	58	
2_6. Groupe B :	66	65	65	63	63	62,5	62	61

Exploitation :

Les résultats précédents, comme tous les autres cités plus haut n'ont rien d'exceptionnel. Ici, bien que la dispersion soit un peu faible — il aurait fallu, pour que tout soit parfait, estimer le demi-gramme — il se trouve que les résultats tirés de l'exploitation collective des mesures d'une classe sont meilleurs que ceux de chacun des demi-groupes, et que ceux provenant de la juxtaposition des deux classes sont encore meilleurs.

Le professeur concerné, s'en est, bien sûr réjoui ; il pourra arriver qu'il n'en soit pas ainsi, ce qui ne contredit pas la théorie puisque celle-ci statue sur les « moyennes ».

Groupe d'élèves concerné	Effectif des mesures	Valeur moyenne	Etendue r	$q \cdot r_{(95\ \%)}$	$\frac{ts}{\sqrt{n}}$ (95 %)	Intervalle à 95 % (étendue)
2_4 A	8	62,8	4	1,2	1,1	61,6 — 64,0
2_4 B	9	62,9	6	1,6	1,5	61,3 — 64,5
2_4 (A + B)	17	62,8	6	0,9	0,8	61,9 — 63,7
2_6 A	7	61,0	7	2,3	2,3	58,7 — 63,3
2_6 B	8	63,4	5	1,5	1,4	61,9 — 64,9
2_6 (A + B)	15	62,3	8	1,3	1,3	61 — 63,6
$2_4 + 2_6$	32	62,6	9	0,8	0,7	61,9 — 63,3

Remarques :

a) Cet exemple semble particulièrement riche sur le plan pédagogique.

b) Seule, la méthode de l'étendue a été traitée en classe. On vérifie bien qu'elle donne des résultats tout à fait compatibles avec celle de l'écart-type *s*, quoique un peu plus larges.

c) Alors que les mesures des élèves sont à 4 g près (2 fois l'écart-type de la série des 32 mesures), les 32 résultats conduisent à une « incertitude » de 0,7 g (au niveau de confiance 95 %).

En fait, l'estimateur $\bar{X} = 62{,}6$ g, donne la valeur exacte.

II. INCERTITUDE SUR UNE MESURE ISOLEE.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intéressés à la détermination d'un intervalle de confiance à un niveau de confiance déterminé.

Cette activité, qui n'est pas propre aux mesures physiques, bien qu'extrêmement riche sur le plan culturel (sondages, études de marché, contrôle de fabrication, contrôle de réception, etc.), est insuffisante en physique.

Il faut en effet avoir une idée des *causes* de la dispersion des mesures, et des ordres de grandeurs des erreurs provoquées par ces différentes causes, y compris les erreurs systématiques dues à une méthode de mesure.

Dans le cas d'une mesure unique, c'est cette discussion des causes d'erreurs, et cette évaluation des différents ordres de grandeur des différentes erreurs qui doit devenir primordiale.

Dans cette discussion, la prise en considération de la classe des appareils de mesure conserve tout son intérêt. On peut seulement remarquer que l'intervalle d'incertitude déduit de la classe, n'est pas, dans les faits, et quoiqu'en disent les constructeurs, un intervalle de certitude de présence de la vraie valeur, surtout pour une collection d'appareils usagés et indifférenciés.

Evaluer, par différentiation, l'erreur qu'entraîne, sur la grandeur mesurée, erreur donnée, considérée comme plausible, commise sur une grandeur primaire est une activité féconde.

Pour prendre un exemple très simple, dans la mesure de g par un pendule simple, où l'on emploie la formule $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$, il est bon de faire remarquer qu'une erreur de 1 % sur la mesure de l aura deux fois moins d'incidence sur le calcul de g, qu'une erreur de 1 % sur la mesure de T.

L'expression $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\Delta l}{l} + \dfrac{2\,\Delta T}{T}$, par contre, ne saurait donner qu'un ordre de grandeur d'une « incertitude » Δg, pas très bien définie.

Cette formule risque de cacher complètement que les erreurs, en général, se compensent partiellement. La probabilité pour qu'un même opérateur ait mesuré l par excès, en commettant une erreur maximale sur cette mesure, et T par défaut, là encore avec une erreur maximale, est très faible.

De telles relations ne sont applicables en toute rigueur que si Δl et ΔT représentent les largeurs d'intervalles dans lesquels on est *certain* que se situent la longueur exacte du pendule d'une part, et sa période d'autre part.

Si c'est le cas, après avoir tenu compte de la correction d'amplitude, de la raideur du fil, du fait que le pendule n'est pas tout à fait ponctuel, de l'effet de la résistance de l'air..., etc., Δg calculé par la formule ci-dessus, représenterait l'intervalle de *certitude* de présence de la véritable valeur de g.

De telles certitudes sont en général illusoires. D'autre part, l'usage généralisé de ces relations, qui ont privilégié l'aspect « calculable » des incertitudes, empêche peut-être de porter assez d'attention à tout ce qui ne se met pas en équation (ou qui s'y met difficilement).

On peut songer à remplacer les formules classiques :

$$\left(\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\,\Delta T}{T}\right.$$

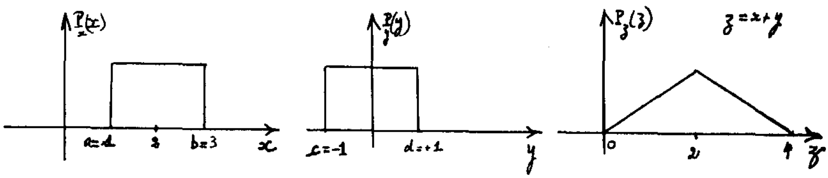
dans le cas du pendule simple ; $\dfrac{\Delta X}{X} = \dfrac{\Delta R}{R} + \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$ dans le cas de la mesure d'une résistance X au pont de Wheatstone, telle que $X = R \cdot \dfrac{a}{b}$, ... etc.) par des formules qui tiennent compte de l'effet « compensatoire » des différentes erreurs. On aurait ainsi, dans les deux cas que nous avons évoqués :

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta X}{X} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

Mais ces relations supposent que Δl, ΔT d'une part, ΔR, Δa, Δb de l'autre sont les intervalles de confiance *au même niveau de* *confiance* des résultats des mesures respectives de l et T, et de R, a, et b.

Elles supposent aussi que les variables aléatoires δl et δT (ou δR, δa et δb) sont du type gaussien ou tout au moins sont stables pour l'addition. C'est le cas de la loi normale de Gauss, de la loi de Poisson, de celle de χ^2 de Pearson et de quelques autres, mais ça n'est pas le cas en général. Si, on construit par exemple une nouvelle variable aléatoire z à partir de deux variables aléatoires x et y distribuées uniformément sur des intervalles (a, b) et (c, d), la nouvelle variable $z = x + y$ a une répartition triangulaire : la distribution uniforme n'est pas stable pour l'addition.



Pour appliquer en toute rigueur ce type de formule, il est donc, en général, impossible de réunir assez de connaissances sur les variables en présence.

Si c'était possible, Δg et ΔX, seraient, dans nos exemples, les intervalles de confiance relatifs à g et X, au même niveau de confiance que l et T d'une part ; R, a et b de l'autre.

De toute manière, l'emploi de ces formules ne change rien à la difficulté qui consiste à évaluer ce qui n'est pas directement calculable.

Que faire ?

Dans certains cas, un appareillage déterminé et une méthode particulière peuvent être testés en procédant à la mesure d'une grandeur étalon.

Si le professeur demande aux élèves de pratiquer ces tests, il pourra réunir assez rapidement une collection de résultats lui permettant d'estimer l'écart-type des erreurs qu'entraîne l'emploi, par les élèves, de cet appareillage et de cette méthode.

Si une comparaison à un étalon n'est pas possible, le fait de conserver les résultats de mesure des élèves permettra tout de même au professeur, grâce à une analyse systématique de type statistique, d'éclairer et de préciser les réflexions qualitatives et quantitatives des élèves sur les mesures qu'ils réalisent.

Prenons l'exemple d'une plate-forme d'électrotechnique, où il est courant de demander aux élèves de mesurer le rendement d'un moteur par telle méthode. Il suffit d'imposer les conditions de l'essai (mesure du rendement pour le point nominal, par exemple), et de recueillir les résultats des différents groupes d'élèves qui viendront travailler sur cette machine — ou sur une machine absolument identique — pour avoir assez rapidement (1 an, 2 ou 3 ans suivant le nombre de sections du lycée qui procèderont à cette mesure) une idée très nette de la dispersion des mesures.

En conclusion, nous dirons que l'approche statistique de la discussion de la mesure d'une grandeur est modeste puisqu'elle ne présage rien des causes des erreurs, mais elle est nécessaire, en définitive, pour vérifier le bien-fondé des hypothèses qu'on est amené à poser pour expliquer la dispersion des mesures.

Elle n'est, certes, pas toujours facile à mettre en œuvre, et il n'est pas nécessaire d'y faire appel à chaque manipulation d'élève, mais les professeurs qui auront la patience de conserver des résultats de mesure de leurs élèves, assortis de notes sur le matériel employé, la classe qui a manipulé, etc., auront le plaisir de constater qu'il est possible d'en tirer des renseignements utiles et variés.

R. MOREAU.