

Réalisation et exploitation d'un échantillon de grande taille de mesures d'une même grandeur

1. RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS ; EXAMEN DES POSSIBILITES DE JUSTIFICATION.

Considérons une grandeur physique bien déterminée (dans l'exemple présenté ci-après, ce sera la densité d'un métal par rapport à l'eau) dont on réalise la mesure par une méthode donnée (ce sera la méthode du flacon).

Habituellement, la répétition des mesures de cette grandeur fournit des résultats dispersés.

Sous certaines conditions, ordinairement satisfaites (pour l'essentiel, multiplicité et indépendance des causes de dispersion), les valeurs obtenues se répartissent suivant le modèle classique dit normal ou de LAPLACE-GAUSS succinctement décrit ci-après.

Précisons, avant d'aller plus loin, que les quelques lignes qui suivent sont destinées à être exploitées à l'occasion d'une approche totalement expérimentale et, initialement, largement empirique du problème qui nous préoccupe. Il y a lieu de les resituer, en temps opportun, dans une construction solide constituant la substance des cours de probabilité organisés classiquement autour des notions suivantes :

- événement,
- famille probabilisable, probabilité,
- variables aléatoires discrètes ou continues,
- fonction de répartition, densité de probabilité,
-

Considérons donc un ensemble de n expériences de mesure dont les résultats constituent un ensemble de n valeurs numériques $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ approchant la valeur réelle X inconnue. On conçoit que, quand n devient suffisamment grand, on puisse chercher à donner de la répartition discrète x_1, x_2, \dots, x_n une représentation continue, représentation dans laquelle nous nous plaçons maintenant.

Soit dn le nombre de résultats de mesure compris dans l'in-

tervalle $[x, x + dx]$. Soit $\frac{dn}{n}$ la probabilité de l'événement « le résultat d'une mesure appartient à l'intervalle $[x, x + dx]$ ». La répartition étudiée est gaussienne pour autant que :

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

expression dans laquelle m est le paramètre de position (moyenne) et σ le paramètre de dispersion (écart-type) de la répartition considérée.

Notons que $\frac{dn}{n}$ est exprimé sous la forme $\frac{dn}{n} = f(x) dx$.

En utilisant une terminologie tout à fait naturelle $f(x)$ est appelée fonction densité de probabilité. Le graphe de cette fonction est la célèbre courbe en cloche de GAUSS (fig. 1).

Cette courbe peut se « lire » de la façon suivante :

- l'aire élémentaire $f(x) \cdot dx$ mesure la probabilité pour le résultat d'une mesure d'appartenir à $[x, x + dx]$,
- l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'abscisses a et b mesure la probabilité pour le résultat d'une mesure d'appartenir à $[a, b]$,
- l'aire comprise entre la courbe entière et l'axe des abscisses ($a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$) est égale à l'unité et mesure la certitude qu'on a de voir le résultat d'une mesure appartenir à $[-\infty, +\infty]$.

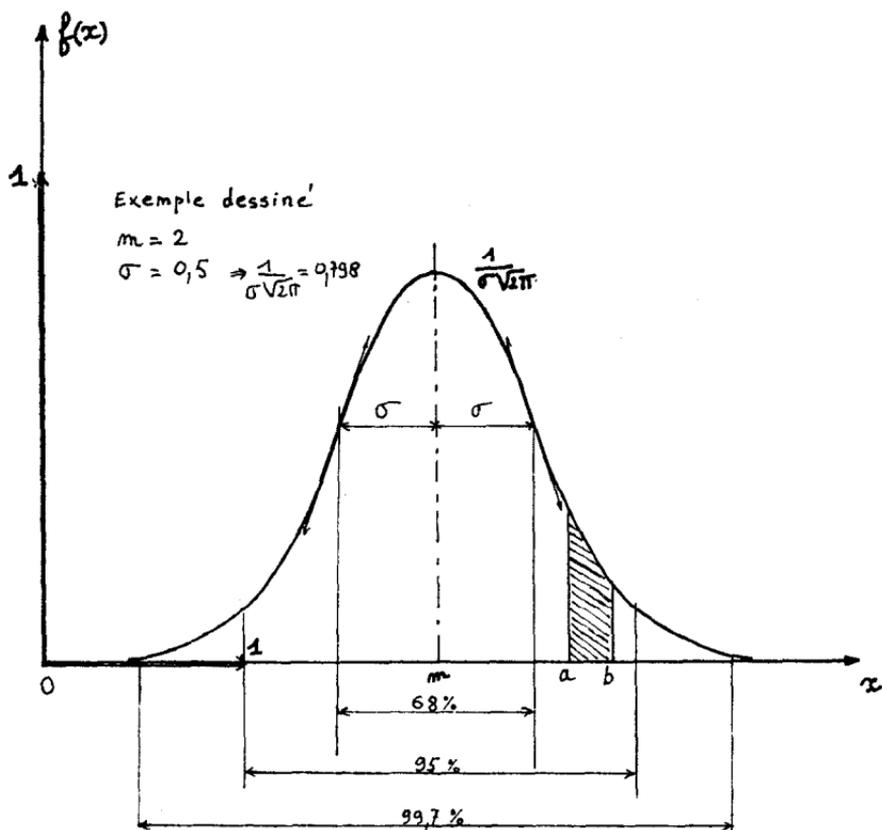
Les valeurs numériques, faciles à retenir, des probabilités d'appartenance d'un résultat aux intervalles :

$$[m \pm \sigma], [m \pm 2\sigma], [m \pm 3\sigma]$$

sont rappelées sur le graphe.

Remarque.

Les grandeurs représentées en abscisse (x, dx, m, σ, \dots) sont homogènes à la grandeur dont on effectue la mesure ; la densité de probabilité $f(x)$ est homogène à l'inverse de la grandeur étudiée ; une aire dans le plan du graphe représente donc une grandeur purement numérique (en l'occurrence une probabilité) avec, comme unité, l'aire du rectangle construit sur les vecteurs unitaires de chacun des axes.



La part des résultats précédents à présenter à des débutants et la manière d'assurer cette présentation peuvent faire l'objet d'options fort diverses.

Si la démarche employée et les contenus mis en place sont, *a priori*, variés, par contre les justifications qu'on peut envisager sont toujours les mêmes et se réduisent à l'un ou/et l'autre des deux discours :

- « si nous pouvions faire un très grand nombre de mesures, nous verrions que... »,
- « on démontre mathématiquement et nous admettrons que... ».

Il est certain que ni l'une, ni l'autre de ces démarches n'est idéale pour entraîner l'adhésion de l'auditoire et le faire se pénétrer convenablement de la situation qu'on cherche à décrire.

Il est non moins certain qu'il est aberrant de chercher à mettre le théorème central limite à la portée d'élèves du second degré.

Par contre, il paraît relativement facile et, en tout cas, nécessaire en matière de formation, d'entreprendre un travail expérimental à conclure par le discours « ...ayant réalisé un grand nombre de mesures, nous voyons que... ».

Suivant cette idée, en 1971, alors que j'étais I.P.R. à Clermont-Ferrand, j'ai demandé aux professeurs de quatre lycées de cette ville, de bien vouloir, au fil d'une année et dans le cadre de leurs activités normales, procéder dans toutes leurs classes de seconde à la mesure d'une même grandeur de façon à constituer un vaste échantillon ($n > 1000$) sur lequel on pouvait espérer voir apparaître les propriétés rapidement rappelées ci-dessus.

Je profite de l'occasion pour renouveler mes remerciements à tous ceux qui ont participé à ce travail. Nous nous intégrions, à l'époque, dans le mouvement révélé au niveau de l'enseignement secondaire par le B.U.P n° 505 de mai 1968, mais aussi, nous nous trouvions quelque peu en avance relativement aux usages encore solidement ancrés concernant le calcul d'incertitude.

II. REALISATION DE L'EXPERIENCE.

Grandeur à mesurer.

Pour diverses raisons, les unes pratiques (prix de revient minime, disponibilité du matériel,...), les autres scientifiques (bonne définition et fixité dans le temps), on a choisi, comme grandeur à mesurer, la densité d'un métal par rapport à l'eau. L'idéal aurait été d'opérer sur un échantillon unique ce qui est parfaitement irréalisable compte tenu du nombre de mesures projeté; au degré de précision envisagé il a suffi de prélever les quelques dizaines d'échantillons mis en circulation, dans un même lot de barres de laiton (\varnothing 20 mm); trois tailles d'échantillon ont été fabriquées (hauteurs respectives : 30, 40 et 50 mm).

Méthode et matériel.

Les mesures ont été effectuées par la méthode du flacon. Les flacons étaient des poudriers de 125 cm³; le bord supérieur du col avait été légèrement rodé à l'émeri et l'affleurement de l'eau était réalisé en glissant une petite plaque de verre dans le plan du bord rodé (fig. 2).

Au degré de précision requis, un calcul préliminaire avait montré que l'on pouvait opérer à la température de la salle, les

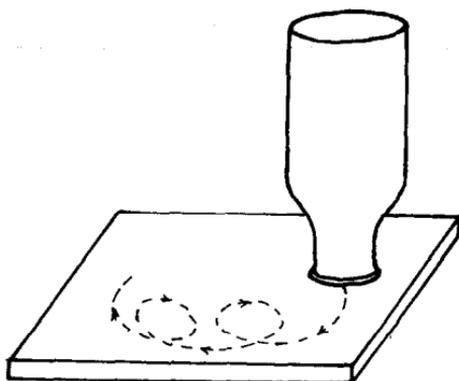


Fig. 2

corrections de température à envisager pour tenir compte des écarts autour de la température moyenne d'une salle normalement chauffée, sont parfaitement négligeables. Les balances utilisées étaient des Roberval « force 2 kg » disponibles dans tous les laboratoires scolaires accompagnées des non moins traditionnelles boîtes de masses marquées en laiton.

Les expérimentateurs.

L'expérience a réuni une trentaine de classes de 2^{me} A, AB, C et T comportant en moyenne une quinzaine de binômes de T.P. Chaque binôme pouvant réaliser deux ou trois mesures susceptibles de donner lieu à compte rendu, on pouvait compter sur une collecte de 1 000 à 1 500 résultats.

Présentation des résultats.

Pour chaque mesure effectuée, le binôme avait à remplir une fiche ronéotypée (210 × 297) comportant :

- identité des expérimentateurs,
- numéro de l'échantillon de laiton,
- numéro de la balance,
- numéro de la boîte de masses marquées,
- détail des masses marquées ayant servi à établir les trois équilibres, consigné dans le tableau reproduit ci-après :

1er équilibre	2me équilibre	3me équilibre
..... × 100 =		
..... × 50 =		
— — —		
— — —		
— — —		
..... × 0,1 =		
_____	— id —	— id —
$m_1 =$	$m_2 =$	$m_3 =$

La disposition ici décrite avait pour but d'éviter, dans la mesure du possible...!, les erreurs de décompte des masses marquées, introduisant, quand elles portent sur des masses divisionnaires, des fluctuations du même ordre de grandeur que les autres aléas expérimentaux et par-là même indétectables *a posteriori*,

■ calculs de $m_1 - m_2$, $m_3 - m_2$ et $d = \frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2}$.

III. RESULTATS.

Conformément aux prévisions, 1 190 fiches ont été centralisées. Parmi elles, 103 ont été éliminées, une analyse des étapes initiales (déterminations de m_1 , m_2 , m_3) ayant mis en évidence des erreurs flagrantes.

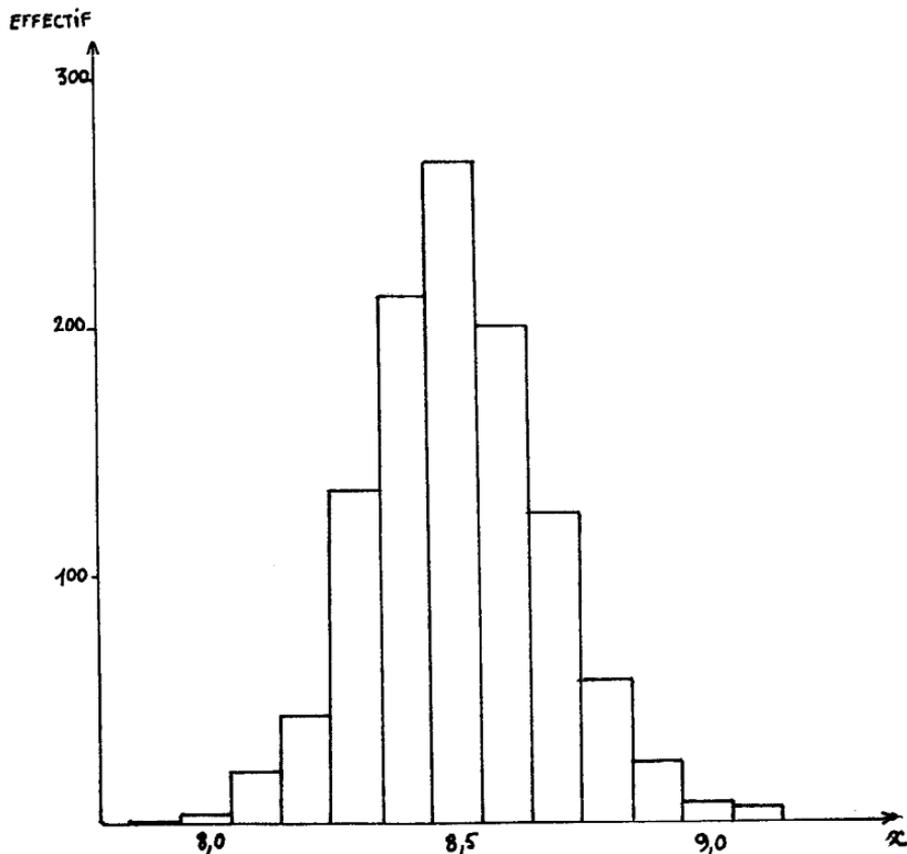
Sans entrer dans le détail de la répartition des résultats en sous-ensembles (établissements, taille des échantillons de laiton,...) ce qui donnerait lieu à des observations intéressantes mais non fondamentales, les 1 087 résultats obtenus ont été répartis par classes de largeur 0,1. Le tableau ci-après fournit les effectifs de chaque classe caractérisée par son centre.

Suivant l'usage, chaque classe est semi-ouverte à droite; par exemple la classe 8,0 regroupe les résultats, normalisés à trois chiffres, allant de 7,95 à 8,04 inclus.

Centre de la classe	7,9	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	9,1
Effectif	1	3	20	43	133	211	264	199	123	56	23	6	5

effectif 1 087

L'illustration graphique de ces résultats peut se faire sous la forme d'un histogramme des effectifs (fig. 3).



L'examen des résultats (sous la forme tableau ou sous la forme diagramme) impose l'idée d'une organisation du désordre que constitue la dispersion, organisation dont les traits apparaissent clairement :

— accumulation autour d'une valeur centrale,

- décroissance rapide des effectifs de part et d'autre de l'accumulation centrale,
- possibilité de trouver des valeurs assez éloignées de la valeur centrale sans qu'il y ait lieu de les qualifier d'aberrantes.

Notons dès à présent que nous venons de faire apparaître le résultat le *plus important* qu'il y ait lieu d'attendre de l'étude entreprise : la dispersion des résultats, phénomène évident dès qu'on a effectué un tout petit nombre de mesures, mais alors difficilement maîtrisable, est en réalité organisée suivant une loi qui n'émerge que si on réalise un grand nombre de mesures.

Dans cette situation il y a lieu, bien sûr, de rechercher une modélisation mais, comme d'habitude le maniement du modèle est d'importance secondaire par rapport à une bonne compréhension du phénomène, elle doit servir et non remplacer cette compréhension.

IV. MODELISATION.

Le problème de la modélisation étant ainsi posé, on peut le résoudre à divers niveaux.

On peut tout d'abord penser aux éléments faisant l'objet du premier paragraphe du présent article. L'inventaire des outils mathématiques à la disposition d'un élève, fût-il de première ou de terminale, incite à beaucoup de prudence. En particulier, l'in-

troduction de l'expression : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ peut,

à juste titre, être considérée comme inopportune. A ce propos, il y a lieu de réfléchir au fait que l'existence d'une touche e^x sur les calculatrices de poche est susceptible de modifier certains points de vue de façon révolutionnaire.

On peut, tout aussi bien, limiter ses ambitions à une étude du type suivant et déjà substantielle :

- passage de l'histogramme des effectifs à une courbe telle que les trapèzes curvilignes qu'y découpent les limites de classes aient des aires égales à celles des rectangles correspondants constituant l'histogramme ; la forme « courbe en cloche » apparaît sans ambiguïté,
- mise en place de la quantité m définie comme abscisse de l'axe de symétrie de la courbe en cloche ; existence d'une

relation entre m et $\frac{1}{n} \sum x_i$,

- mise en place de la quantité σ définie comme écart des points d'inflexion à la valeur centrale ; à un stade plus avancé de l'étude, existence d'une relation entre σ et

$$\sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_i - m)^2},$$

- étude du contenu de quelques intervalles particuliers et mémorisation des valeurs numériques correspondantes :

l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ contient 95 % des mesures,

l'intervalle $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ contient 99,7 % des mesures.

On dispose ainsi, assez tôt, d'un modèle parfaitement utilisable qui pourra être affiné, sans être remis en question, au fur et à mesure des acquisitions des élèves, en particulier en ce qui concerne l'outillage mathématique.

Il est maintenant instructif de rechercher dans quelle mesure la modélisation par la loi normale est adéquate à l'exemple qui nous sert de support.

Sans entrer dans le détail de la mise en œuvre des méthodes propres à parvenir à cette fin, on trouvera ci-après les résultats correspondant à la mise en œuvre de la plus banale d'entre elles :

- adoption pour valeurs des paramètres intervenant dans l'expression de $f(x)$ des quantités :

$$\frac{1}{n} \Sigma x_i = 8,50 = m$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_i - m)^2} = 0,178 = \sigma$$

- calcul dans le modèle ainsi défini des effectifs des classes de largeur 0,1 du tableau de présentation des résultats. Pour ce faire, on passe par l'intermédiaire de la variable réduite :

$$\mu = \frac{x - m}{\sigma} \text{ et on utilise les tables de la fonction :}$$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On trouve ainsi :

Classe	7,9	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	9,1
Effectif théorique	1	5	21	60	130	165	323	165	130	60	21	5	1
Effectif observé	1	3	20	43	133	211	264	199	123	56	23	6	5

Comme on le constate l'accord, sans être désastreux, n'est pas parfait.

Il y aurait lieu à ce propos d'étudier l'influence des erreurs de décompte des masses marquées, comme par exemple lire 2 dg pour 5 dg. Malgré les précautions prises pour les éviter, ces erreurs ont pu être commises par nos jeunes expérimentateurs dont la fiabilité est mesurée par le fait que leurs fiches recèlent des dizaines d'erreurs de soustraction et de division sans parler de centaines d'erreurs d'arrondi.

La construction d'un modèle d'apparition d'erreurs de ce type et l'étude de l'influence sur les résultats peut constituer un sujet intéressant pour amateurs de simulation sur ordinateur.

V. EXPLOITATION.

En utilisant, par anticipation, les résultats contenus dans le dernier article (p. 100), nous notons que $m_1 = \frac{1}{n} \sum x_i$ peut être

considéré comme une valeur parmi les autres valeurs approchées de la grandeur inconnue X qu'on obtiendrait en réalisant des séries de n mesures ; on verra que ces valeurs se dispersent

autour de X suivant une loi normale d'écart-type $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

où σ est l'écart-type de la loi représentant la répartition des x_i .

En se fixant un taux de confiance de 95 %, par exemple, on peut dire que X se trouve dans l'intervalle $[m_1 - 2\sigma', m_1 + 2\sigma']$. L'application numérique donne :

$$2\sigma' = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times \frac{0,178}{\sqrt{1087}} \approx 0,01$$

et sachant que $m_1 = 8,50$,

$$8,49 < X < 8,51$$

A l'évidence, notre lourde opération expérimentale s'avère modestement rentable s'il est seulement question d'obtenir avec précision la valeur de la grandeur étudiée.

Insistons sur le fait que le but ici poursuivi est de dégager de façon convaincante les caractéristiques du phénomène dispersion des résultats dans la situation ordinaire de nos laboratoires d'enseignement et de préparer ainsi de bonnes bases à la mise en œuvre des méthodes d'un usage bien plus commode décrites dans l'article déjà cité.

Notons enfin combien la démarche utilisée est différente dans son esprit de celle qu'on suivait à l'occasion des traditionnels calculs d'incertitude. Remontant une dizaine d'années en arrière, on trouvera dans les pages du B.U.P. une littérature abondante, parfois polémique, à propos du calcul de l'incertitude

$$\text{sur } d = \frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2}.$$

Puisse la nouvelle orientation vider de tels débats de tout ce qu'ils contenaient d'artificiel ou d'inutile.

VI. GENERALISATION.

La distribution de matériel, de consignes et de documents standardisés dans plusieurs établissements, la centralisation, l'exploitation et la redistribution des résultats vers les participants ne constituent pas une opération facile et on ne peut en prévoir la mise en œuvre courante.

Par contre, à l'intérieur d'un établissement, l'accumulation sur quelques années de quelques résultats par binôme de T.P., permet de constituer une collection exploitable dans l'esprit décrit ci-dessus.

Il va sans dire que l'introduction des micro-ordinateurs permet de donner à l'entreprise une dimension particulièrement intéressante. Il faut espérer que bientôt seront nombreux les laboratoires qui, chaque année, enrichiront de quelques dizaines ou centaines de données leur disquette « densité d'un métal », « résistance d'une bobine », « résistivité d'un ferro-nickel »..., ce stock de données étant le bien de tous et les programmes d'exploitation à la discrétion de chacun.

Raymond BRESSON.
