

Le calcul analogique à courant continu

I. INTRODUCTION - GENERALITES.

Le calcul analogique est une spécialité peu connue du calcul automatique, éclipsée par le calcul digital ou numérique. A la différence de ce dernier, dont le principe est l'utilisation des niveaux logiques 0 et 1 associés à l'algèbre binaire, le calcul analogique est basé sur une correspondance continue nombre - tension.

Le qualificatif d'analogique peut surprendre, les calculateurs actuels étant plutôt qualifiables de calculateurs à courant continu. Il est nécessaire de revenir en arrière de quelques décennies pour en comprendre la raison. Depuis longtemps, mathématiciens et physiciens ont cherché à automatiser et à simplifier les opérations mathématiques. Les premières tentatives utilisèrent des analogies entre des équations régissant des phénomènes physiques, par exemple entre l'électricité et la mécanique. Ces premiers calculateurs (intégrateurs mécaniques, analyseur différentiel...) furent donc qualifiés d'analogiques. Leur principal défaut résidait dans le fait qu'ils étaient seulement adaptés à la résolution approchée et qualitative de quelques problèmes. Ensuite, grâce à l'électronique, apparurent les premiers calculateurs à courant alternatif, dans les années 30, antérieurs au premier ordinateur. Ces calculateurs ont été largement perfectionnés, pour aboutir finalement à un modèle prestigieux des années 60, le calculateur « Analac ». Parallèlement se développèrent les calculateurs à courant continu, avec de grandes difficultés techniques car on devait amplifier des signaux continus, tâche très délicate avec des composants classiques, tubes et transistors. C'est l'intégration des circuits qui a permis la réalisation d'amplificateurs à courant continu fiables, les amplificateurs opérationnels, autorisant ainsi la fabrication de calculateurs à courant continu précis et d'un prix bien plus bas que les précédents.

Ce rappel historique ne suffisant pas à définir correctement le calcul analogique, comparons-le au calcul digital.

Calculateur digital :

— Les informations utilisées se présentent sous forme discrète, elles sont discontinues.

Calculateur analogique :

— Les informations utilisées entrent simultanément dans le calculateur et varient continûment.

— Les opérations mathématiques sont effectuées en séquence.

— Un problème à n équations dure environ n fois le temps d'un problème à une équation.

— Intégration approchée.

— Très grande précision.

— Traduction du problème en langage machine par programmation.

— Les résultats sont donnés par valeurs discrètes.

— C'est un instrument de calcul scientifique.

— Les opérations mathématiques sont effectuées simultanément.

— Un problème à n équations dure le même temps qu'un problème à une équation.

— Intégration directe par rapport à t .

— Précision 10^{-3} à 10^{-4} .

— Traduction du problème en langage machine par câblage.

— Les résultats sont donnés sous forme de courbes continues.

— C'est un instrument de simulation.

De cette comparaison, on doit retirer l'idée que le calculateur analogique n'est pas un concurrent, mais plutôt un complément du calculateur digital. Et pour éviter le faux problème de la précision, il serait préférable de parler de simulateur analogique plutôt que de calculateur. Ses avantages fondamentaux sont la rapidité de calcul, la simultanéité des opérations mathématiques et l'intégration directe par rapport au temps. Ses deux principales utilisations sont la résolution des équations différentielles et la simulation de la commande des systèmes (systèmes asservis).

Dans l'enseignement secondaire, nous ne formons pas d'ingénieurs et notre principale préoccupation n'est pas la résolution des équations différentielles, alors pourquoi présenter le calcul analogique ?

Pour plusieurs raisons, la première étant que notre enseignement doit s'adapter aux méthodes modernes du calcul automatique. C'est ce qui a déjà été entrepris avec les ordinateurs ou plus modestement avec les calculatrices programmables, mais nous ne devons pas ignorer le calcul analogique qui, en de nombreuses occasions, fournit des solutions simples, élégantes et rapides. Deux autres raisons militent en faveur du calcul analogique. On peut facilement en comprendre le principe, qui ne fait appel qu'aux lois élémentaires de l'électricité, et on peut aussi aisément entreprendre la réalisation d'un calculateur, deux

aspects du problème pratiquement inabordables dans le cas du calculateur digital.

L'exposé suivant est découpé en trois parties, indépendantes les unes des autres :

- Principe du calculateur analogique.
- Exemple de réalisation.
- Le calcul analogique.

II. PRINCIPE DU CALCULATEUR ANALOGIQUE.

Le calcul analogique est basé sur la correspondance nombre tension, les calculs arithmétiques et algébriques étant réalisables grâce à quelques circuits électroniques simples. L'élément fondamental du calculateur est l'amplificateur opérationnel sous forme de circuit intégré, dont on va rappeler les principes d'utilisation.

a) **Amplificateur opérationnel** (voir fig. 1).

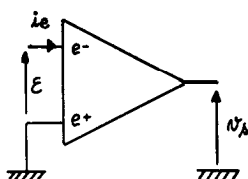


Fig. 1

e^- = entrée inverseuse,

e^+ = entrée non inverseuse.

Cet amplificateur particulier est caractérisé par une amplification en tension pratiquement infinie.

$$v_s = A \cdot E \quad |A| \rightarrow \infty \quad \text{ct} \quad A < 0.$$

La résistance d'entrée est très grande, $R_e = \frac{E}{i_e}$, c'est-à-dire que le courant d'entrée i_e est pratiquement nul. La résistance de sortie est très faible, c'est-à-dire que l'on peut considérer que l'amplificateur se comporte comme un générateur de tension idéal.

La structure interne de l'amplificateur opérationnel lui permet d'amplifier aussi bien les signaux continus que variables (seule la bande passante apporte une limitation en fréquence).

b) Amplificateur inverseur (voir fig. 2).

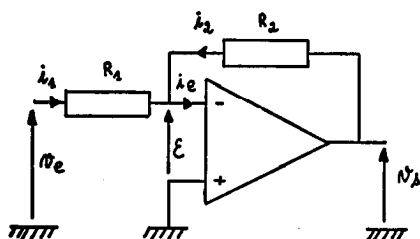


Fig. 2

Equations de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_e = R_1 i_1 + \varepsilon \\ v_s = R_2 i_2 + \varepsilon \\ v_s = A \varepsilon \\ i_1 + i_2 = i_e \\ \varepsilon = R_e i_e. \end{array} \right.$$

Simplifions ces relations. On sait que $|A| \rightarrow \infty$, comme v_s a une valeur finie $-10 \text{ V} < v_s < +10 \text{ V}$, alors ε est très faible, et on peut le négliger devant v_e et v_s . D'autre part, R_e est très grand et $\varepsilon \simeq 0$, donc $i_e \simeq 0$.

Les équations simples sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_e = R_1 i_1 \\ v_s = R_2 i_2 \\ i_1 + i_2 = 0. \end{array} \right.$$

On obtient : $\frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1}$.

On constate que l'amplification de ce dispositif ne dépend que des résistances employées, qui peuvent être très précises et très stables, et non de l'amplification A , sujette à variations.

c) Amplificateur sommateur inverseur (voir fig. 3).

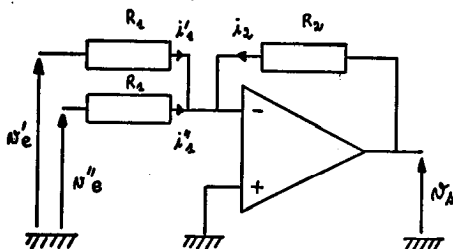


Fig. 3

Equations simplifiées de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_e = R_1 i'_1 \\ v''_e = R_1 i''_1 \\ v_s = R_2 i_2 \\ i'_1 + i''_1 = -i_2 \end{array} \right.$$

On obtient : $v_s = -\frac{R_2}{R_1} (v'_e + v''_e)$.

La sortie v_s est bien la somme $v'_e + v''_e$ mais changée de signe et multipliée par le coefficient $\frac{R_2}{R_1}$. Si on désire la somme $v'_e + v''_e$, on doit utiliser deux dispositifs en cascade.

d) Sommateur à deux entrées (voir fig. 4).

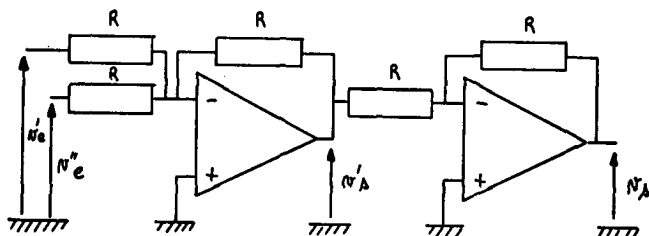


Fig. 4

$$\left. \begin{array}{l} v'_s = -\frac{R}{R} (v'_e + v''_e) \\ v_s = -\frac{R}{R} v'_s \end{array} \right\} \text{ soit } v_s = v'_e + v''_e.$$

e) Amplificateur non inverseur (voir fig. 5).

On peut utiliser deux amplificateurs inverseurs en cascade pour le réaliser, mais il existe une solution plus économique.

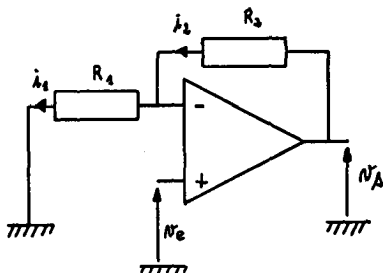


Fig. 5

$$\left. \begin{array}{l} v_s = R_2 i_2 + v_e \\ v_e = R_1 i_1 \end{array} \right\} \text{ soit } \frac{v_s}{v_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Généralement, l'amplification $1 + \frac{R_2}{R_1}$ est ajustée pour obtenir la valeur 10 (ou 100).

f) **Multiplication par une constante** (voir fig. 6).

Il s'agit pour le principe d'un simple diviseur de tension à résistances (potentiomètre).

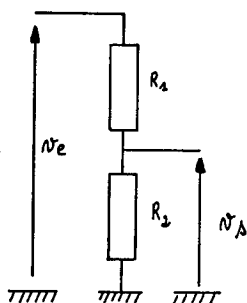


Fig. 6

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = K.$$

En réalité, cette relation n'est valable que si le potentiomètre ne débite pas, c'est-à-dire que l'étage suivant doit présenter une résistance très élevée. C'est pour cette raison que l'on utilise un amplificateur adaptateur d'impédance ou amplificateur suiveur.

g) **Amplificateur suiveur** (voir fig. 7).

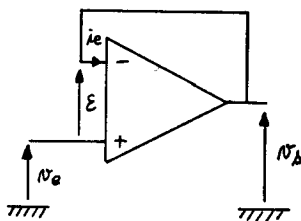


Fig. 7

$$v_s = \varepsilon + v_e \approx v_e.$$

La résistance d'entrée est très grande car $i_e \approx 0$.

h) **Intégrateur** (voir fig. 8).

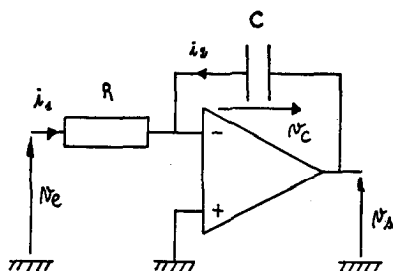


Fig. 8

Equations simplifiées de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_e = R i_1 \\ i_2 = C \frac{d v_c}{dt} \simeq C \frac{d v_s}{dt} \\ i_1 + i_2 = 0. \end{array} \right.$$

On obtient : $\frac{d v_s}{dt} = - \frac{v_e}{RC}.$

En ajoutant un étage inverseur, on supprime le signe (—) et en réglant $RC = \tau$ (constante de temps) à une seconde, on obtient :

$$v_e = \frac{d v_s}{dt}.$$

La tension d'entrée est la dérivée par rapport au temps de la tension de sortie, ce que l'on peut aussi écrire :

$$\int_{T_0}^T v_e dt = [v_s]_{T_0}^T = v_s(T) - v_s(T_0)$$

ou :

$$v_s(T) = \int_{T_0}^T v_e dt + v_s(T_0).$$

$v_s(T)$ est l'intégrale de la tension d'entrée v_e , augmentée de la tension initiale $v_s(T_0)$.

$v_s(T_0)$ représente la tension aux bornes du condensateur à $t = T_0$, on l'appelle condition initiale ou C.I.

Généralement $T_0 = 0$ et on écrit :

$$v_s(t) = \int_0^T v_e dt + \text{C.I.}$$

i) **Multiplication de deux variables** (voir fig. 9).

L'exposé serait incomplet si on ne parlait pas du dispositif multiplieur. Son principe de fonctionnement et sa réalisation sont plus délicats que pour les autres circuits (voir annexe n° 5). Heureusement, ce dispositif existe sous la forme d'un circuit intégré prêt à l'emploi.

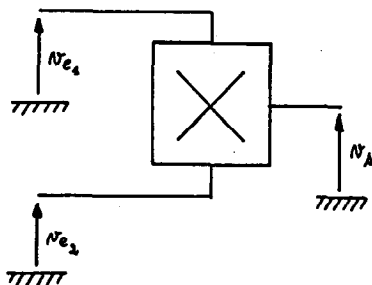


Fig. 9

$$v_s = \frac{v_{e1} v_{e2}}{10}.$$

On peut être surpris de la présence du coefficient diviseur 10. Supposons $v_{e1} = v_{e2} = 10$ volts, la sortie devrait être égale à 100 volts, alors que l'excursion maximale de tension est de 10 volts. On se ramène à une valeur compatible en divisant la tension de sortie par 10.

j) **Représentation symbolique des principales fonctions** (voir fig. 10).

On a vu dans les paragraphes précédents comment sont réalisables les principales fonctions mathématiques.

Pour que le calculateur analogique soit d'un emploi commode, en particulier pour un non praticien de l'électronique, on est conduit à employer un symbolisme pour chaque fonction. De plus, le potentiel zéro (ou masse) ne sera jamais représenté (bien qu'indispensable), ce qui donne des schémas unifilaires.

Les variables du calcul sont en fait des tensions. Par convention, on ne parlera pas de ces tensions, mais des nombres qui leur correspondent.

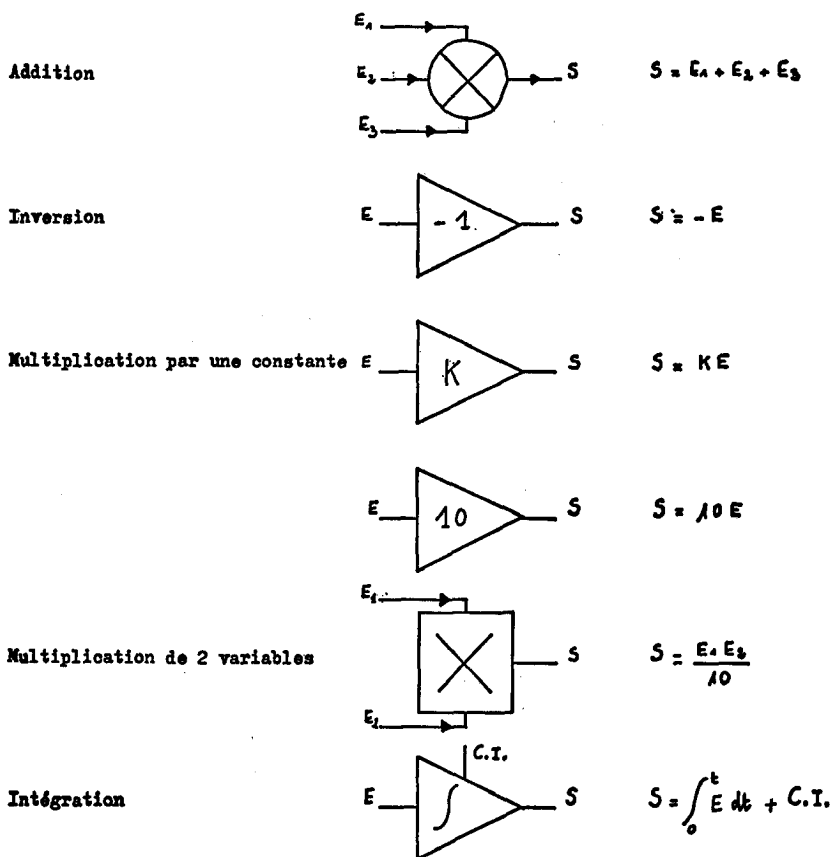


Fig. 10

III. EXEMPLE DE REALISATION D'UN CALCULATEUR ANALOGIQUE.

a) Introduction.

Lorsque l'on veut pratiquer le calcul analogique, deux solutions se présentent : soit acheter un calculateur (solution très onéreuse), soit réaliser soi-même ce calculateur (solution moins rapide, mais plus économique et riche en enseignements). C'est la deuxième solution qu'a adopté l'auteur de cet article en s'inspirant de réalisations existantes. On arrive ainsi à faire une économie dans un rapport d'environ 10, avec bien sûr une baisse dans la précision, mais qui reste encore acceptable pour un appareil destiné à des démonstrations.

Avant de passer à la réalisation, il est nécessaire de faire plusieurs choix. Les amplificateurs opérationnels utilisés doivent être d'un prix peu élevé, d'un type courant, donc d'approvisionnement commode (pour la réalisation et le dépannage), si possible un seul type quelle que soit la fonction réalisée. En conséquence, le choix s'est porté sur le modèle $\mu A 741$ à compensation en fréquence intégrée. Le réglage de la tension de décalage s'effectue par un potentiomètre de $10\text{ K}\Omega$ extérieur. L'alimentation à employer est du type $+15\text{ volts}$ et -15 volts avec le zéro à la masse.

Par souci d'économie, on n'emploie pas de résistances de précision, par contre les résistances ordinaires doivent être triées à l'ohm-mètre. Si on désire une précision supplémentaire, on peut employer des résistances ajustables (si possible en boîtier étanche). Les potentiomètres doivent être de bonne qualité, bobinés de préférence, mais il n'est pas nécessaire d'employer des potentiomètres multi-tours avec bouton compte-tours.

Le cas des intégrateurs est plus délicat. Il faut impérativement s'affranchir de la dérive due aux courants de polarisation (voir annexe n° 4). On peut utiliser un amplificateur spécial, avec circuit d'entrée à transistors à effet de champ, mais d'un prix assez élevé (exemple AD 506 de Analog Devices), ou réaliser un intégrateur avec compensation des courants de polarisation, de réglage délicat, mais donnant satisfaction.

Pour le circuit multiplieur, il est fortement déconseillé d'entreprendre sa réalisation en composants discrets. On fera l'acquisition d'un circuit intégré (par exemple AD 533 de Analog Devices), de précision moyenne, dont on améliorera les performances par des réglages adéquats.

Le câblage sera effectué sur circuits imprimés pour réduire l'encombrement. On pourra utiliser des plaques pré-imprimées au pas de 2,54 (genre VERO BOARD), solution adoptée par l'auteur et convenant parfaitement à un prototype. Les amplificateurs opérationnels ne seront pas soudés mais montés sur des supports (très important pour la mise au point et le dépannage).

Remarque.

Les circuits réels sont plus complexes que les circuits théoriques. Cela est dû à l'existence d'imperfections de l'amplificateur opérationnel et que l'on doit absolument compenser (voir annexes nos 1, 2, 3 et 4).

b) Inverseur (voir fig. 11).

Les résistances de $39\text{ K}\Omega$ sont à appairer, la résistance de $22\text{ K}\Omega$ sert à compenser les courants de polarisation, le réglage fin est effectué par le potentiomètre de $10\text{ K}\Omega$.

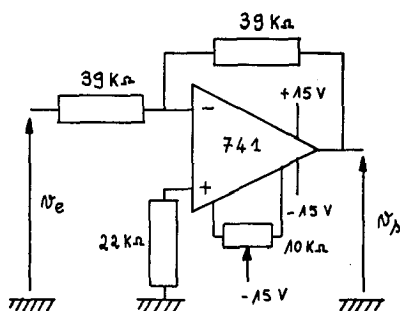


Fig. 11

c) Multiplication par une constante.

1° Constante K (voir fig. 12).

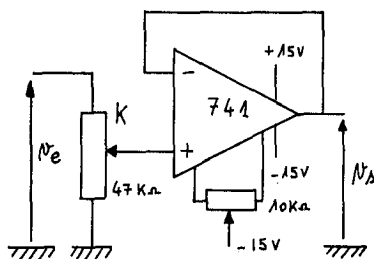


Fig. 12

L'axe du potentiomètre de 47 K Ω (K) doit être accessible sur la face avant.

2° Constante 10 (voir fig. 13).

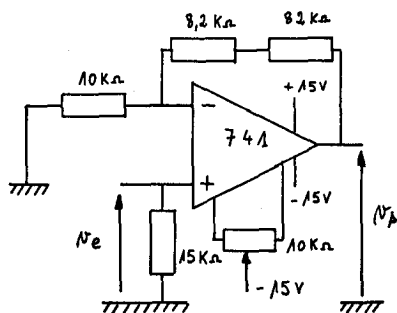


Fig. 13

Rappel :
$$\frac{v_s}{v_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Si on choisit $R_1 = 10 \text{ K}\Omega$, cela entraîne $R_2 = 90 \text{ K}\Omega$ (valeur non normalisée). On peut adopter un potentiomètre de $100 \text{ K}\Omega$ réglé à $90 \text{ K}\Omega$ ou deux résistances en série de $8,2 \text{ K}\Omega$ et $82 \text{ K}\Omega$.

d) **Sommeur à trois entrées** (voir fig. 14).

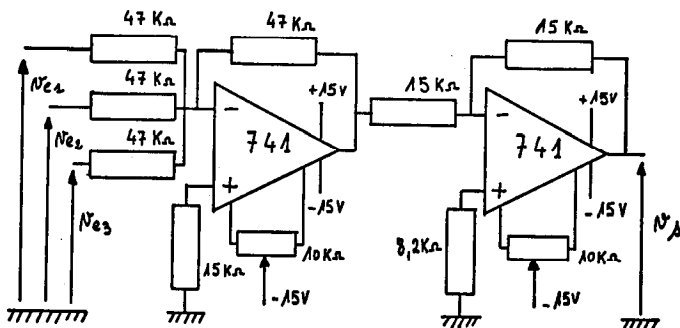


Fig. 14

Les résistances de $47 \text{ K}\Omega$ et de $15 \text{ K}\Omega$ sont à appairer.

e) **Intégrateur avec condition initiale** (voir fig. 15).

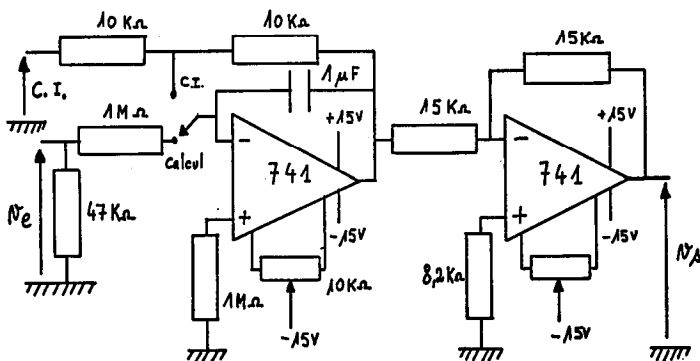


Fig. 15

On réalise la constante de temps $\tau = 1 \text{ s}$ avec $R = 1 \text{ M}\Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$. Ce choix est un compromis. En raison des courants de polarisation, il serait préférable d'employer $C = 10 \mu\text{F}$ (ou une valeur supérieure) et $R = 100 \text{ K}\Omega$ (voir annexe n° 4). Mais C doit être un vrai condensateur (non un condensateur électrochimique) de valeur parfaitement connue (pour $C = 10 \mu\text{F}$ le volume est trop important).

Sur la position C.I. du commutateur, on charge le condensateur à une tension égale à $(-C.I.)$ et l'étage inverseur rétablit $(+C.I.)$ en sortie. Si aucune tension n'est appliquée, $C.I. = 0$, le dispositif fonctionne alors en décharge de condensateur ou remise à zéro (R.A.Z.). La charge (ou la décharge) de C s'effectue avec une constante de temps $\tau' = 10\text{ K}\Omega \times 1\text{ }\mu\text{F} = 0,01\text{ s}$.

Les résistances de $47\text{ K}\Omega$, $1\text{ M}\Omega$ et le potentiomètre de $10\text{ K}\Omega$ du premier amplificateur servent à compenser les courants de polarisation et la tension de décalage (voir annexe n° 4).

En fonctionnement, la résistance de $47\text{ K}\Omega$ n'intervient pas, donc $\tau = RC = 1\text{ s}$ exactement, car la sortie de chaque fonction (susceptible d'être reliée à l'entrée de l'intégrateur) est équivalente à un générateur de tension idéal.

f) Adaptateur d'impédance (voir fig. 16).

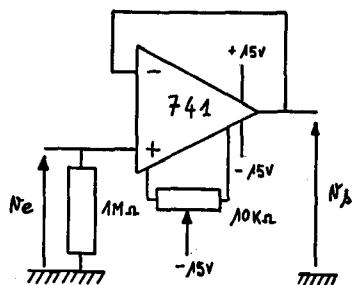


Fig. 16

Bien qu'inutile en calcul analogique, l'adaptateur d'impédance sera utilisé pour relier le calculateur à des éléments extérieurs (voir en simulation de systèmes asservis).

g) Génération des variables.

1° Echelon E : tension variable de -10 V à $+10\text{ V}$ (voir fig. 17).

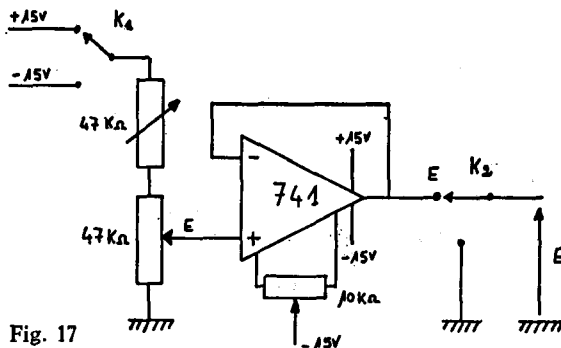


Fig. 17

La tension E est réglée par le potentiomètre de $47\text{ K}\Omega$ dont l'axe est sorti sur la face avant. La résistance variable de $47\text{ K}\Omega$ permet d'ajuster $\pm 10\text{ V}$ en fin de course du potentiomètre.

Le contacteur $K1$ inverse la polarité de E , le contacteur $K2$ réalise la fonction échelon (si on le désire, par exemple en asservissements) par une variation brutale de 0 à E (ou de E à 0).

2° Tension fixe : $\pm 10\text{ V}$ et $\pm 1\text{ V}$ (voir fig. 18).

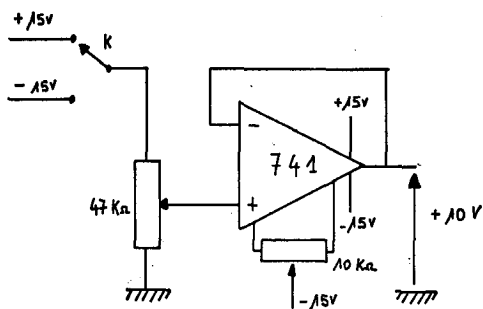


Fig. 18

Le potentiomètre de $47\text{ K}\Omega$ permet d'ajuster la sortie à $\pm 10\text{ V}$ ou $\pm 1\text{ V}$.

h) Multiplieur (voir fig. 19).

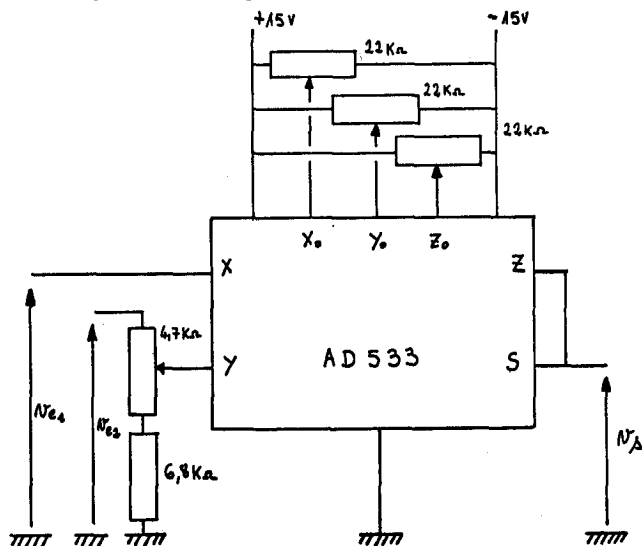


Fig. 19

Le schéma est donné à titre indicatif pour le modèle AD 533. Il sera nécessaire de consulter les documents du constructeur pour la réalisation et les réglages (qui sont au nombre de quatre et interdépendants).

i) Remarque.

Choix des valeurs des résistances.

Pour limiter l'influence des courants de polarisation, on a intérêt à choisir des résistances de faible valeur (voir annexe n° 3). Par contre, un amplificateur opérationnel ne peut débiter qu'un courant maximum de quelques mA. Une sortie doit, en plus, être capable d'alimenter plusieurs entrées de fonction, par exemple trois (voir fig. 20).

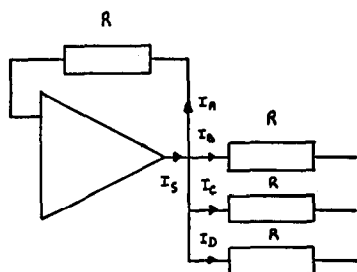


Fig. 20

Soit $|v_s| = 10$ volts et si $R = 50 \text{ K}\Omega$.

$$I_A = I_B = I_C = I_D = \frac{10 \text{ V}}{50} = 0,2 \text{ mA},$$

donc $I_S = 4 \times 0,2 \text{ mA} = 0,8 \text{ mA}$, ce qui est acceptable.

j) Structure générale du calculateur.

Il est, à présent, nécessaire de définir combien d'exemplaires de chaque fonction doivent être réalisés. Idéalement, ce nombre doit être le plus élevé possible, en pratique on réalise un compromis prix du calculateur/puissance de calcul.

L'auteur a adopté la configuration suivante, qui permet un grand nombre d'applications, comme on pourra en juger par la suite :

- deux sommateurs soit $4 \times \mu\text{A 741}$
- trois inverseurs soit $3 \times \mu\text{A 741}$
- quatre constantes K soit $4 \times \mu\text{A 741}$
- deux constantes 10 soit $2 \times \mu\text{A 741}$
- deux adaptateurs d'impédance .. soit $2 \times \mu\text{A 741}$

- un multiplieur soit $1 \times \text{AD } 533$
- trois intégrateurs avec C.I. soit $6 \times \mu\text{A } 741$
ou $3 \times \text{AD } 506$ et $3 \times \text{A } 741$
- un échelon E soit $1 \times \mu\text{A } 741$
- une tension fixe $\pm 10 \text{ V}$ soit $1 \times \mu\text{A } 741$
- une tension fixe $\pm 1 \text{ V}$ soit $1 \times \mu\text{A } 741$

Bilan en circuits intégrés :

$24 \times \mu\text{A } 741$	ou	$21 \times \mu\text{A } 741$
$1 \times \text{AD } 533$		$3 \times \text{AD } 506$
		$1 \times \text{AD } 533$

La répartition de la face avant est aussi très importante car d'elle dépend une utilisation aisée du calculateur. Une répartition est proposée (voir photographie n° 1), mais elle pourra évidemment être modifiée.

La photographie n° 2 donne une vue de l'intérieur du calculateur.

k) Performances du calculateur.

On juge les performances d'un calculateur analogique sur la précision de ses opérateurs élémentaires. Cette précision varie de 10^{-4} à 10^{-3} pour les calculateurs professionnels, elle est presque toujours plus faible pour l'opérateur de multiplication entre deux variables.

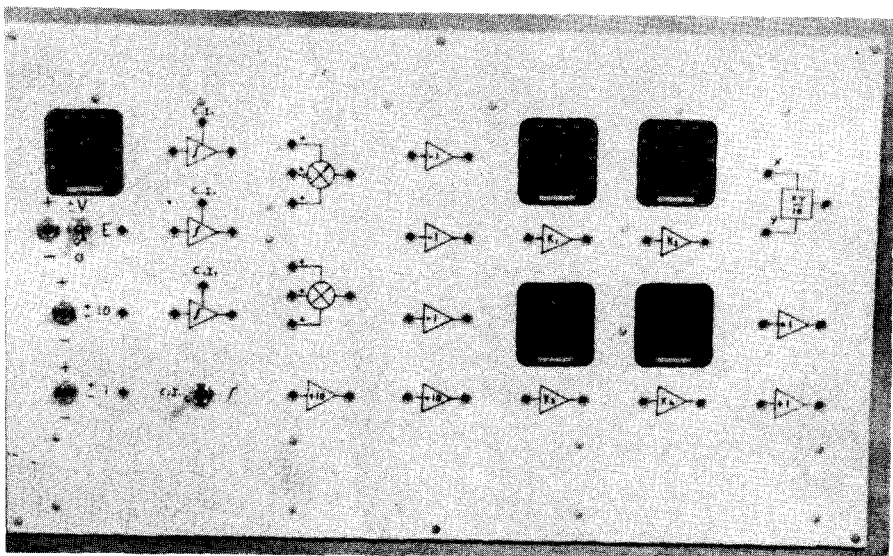
Dans la réalisation ci-dessus, la précision est de l'ordre de 10^{-2} . Elle est surtout liée à la qualité des composants employés. On peut l'améliorer en appariant parfaitement les résistances. La précision de l'intégrateur dépend de sa constante de temps (produit résistance capacité) à ajuster parfaitement et de sa dérive que l'on devra réduire le plus possible (moins de 1 mV/seconde). La précision des variables dépend essentiellement de celle de l'alimentation stabilisée qui devra être particulièrement soignée. L'auteur utilise une alimentation du commerce, à l'extérieur du calculateur.

Remarque relative à la précision du multiplieur.

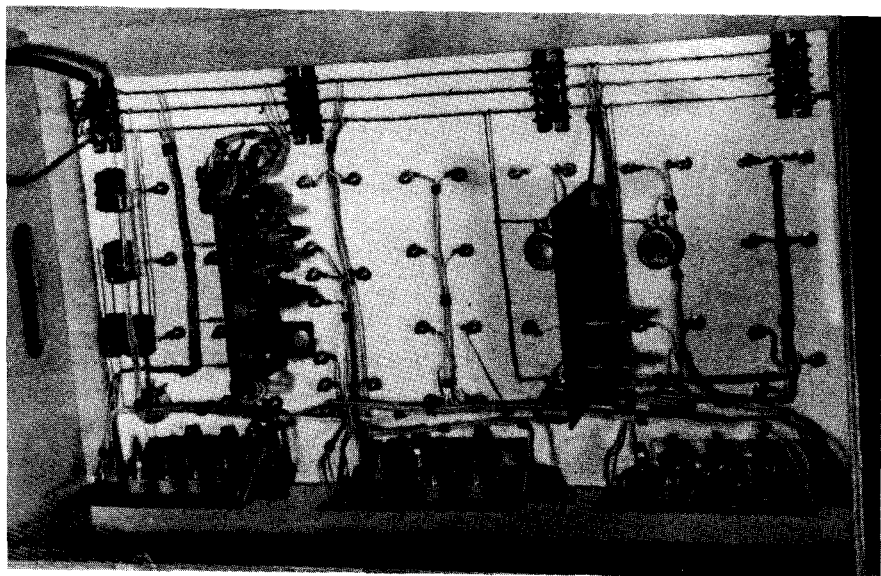
Son cas est particulier. Un multiplieur précis coûte très cher (environ 1 000 F) et même ainsi, les résultats peuvent être faux.

Le constructeur indique parfois la précision relative à la pleine échelle, quelle est sa signification ?

Considérons un exemple. Soit une précision de 1 % pour une pleine échelle de 10 V, cela donne une erreur absolue $\Delta S = 0,1 \text{ V}$ pour $S = 10 \text{ V}$.



Photographie n° 1



Photographie n° 2

Cette erreur absolue est alors la même quelle que soit la valeur de la sortie :

$$- \text{ si } x = y = 10 \text{ V alors } S = \frac{xy}{10} = 10 \text{ V,}$$

$$\text{alors } \frac{\Delta S}{S} = 1 \% ;$$

$$- \text{ si } x = y = 1 \text{ V alors } S = \frac{xy}{10} = 0,1 \text{ V,}$$

$$\text{alors } \frac{\Delta S}{S} = 100 \%.$$

Cet opérateur est à employer avec précautions, les variables devant être amplifiées avant multiplication.

IV. LE CALCUL ANALOGIQUE.

A) Généralités.

1° DÉFINITION.

Fondamentalement, on fait correspondre un nombre et une tension. Technologiquement, le domaine de variation de la tension est limité, dans notre cas : $-10 \text{ V} < \text{tension} < +10 \text{ V}$.

Cette limitation n'existant pas pour les nombres, on est alors amené à établir une échelle arbitraire de correspondance. Par exemple, la tension $+5 \text{ V}$ représentera le nombre $+5$, $+50$ ou tout autre nombre positif si on le désire. Il se pose donc un problème de calibration des équations mathématiques pour assurer leur compatibilité avec le calculateur.

2° TRAITEMENT D'UN PROBLÈME.

Traiter un problème en calcul analogique revient à utiliser un certain nombre d'opérateurs élémentaires (sommateurs, intégrateurs, etc.) et à les associer suivant un schéma particulier.

Le câblage du calcul analogique correspond à la programmation du calcul digital.

Remarque.

Dans un opérateur, l'information circule toujours de l'entrée vers la sortie, dans le sens des flèches.

3° RÉSULTATS D'UN PROBLÈME.

Les résultats d'un problème sont des tensions ou plus exactement des suites continues de tensions. Les résultats apparai-

tront donc sur des voltmètres (numériques de préférence) ou sur une table traçante XY (instrument indispensable pour les équations différentielles).

B) Exemples de problèmes résolus sur calculateur analogique.

Quelques exemples de problèmes résolus sur le calculateur expérimental décrit précédemment vont être présentés. Cette liste n'est pas exhaustive et le lecteur intéressé pourra consulter la bibliographie pour de plus amples renseignements.

1° ADDITION DE DEUX NOMBRES (voir fig. 21).

Exemple : $S = 5,05 + 1,82$.

Les deux nombres sont générés par une source de tension fixe (ici $+10$ V) associée à deux coefficients K (réglés respectivement à $0,505$ et $0,182$), l'addition étant réalisée à l'aide d'un sommateur, la troisième entrée est laissée en l'air.

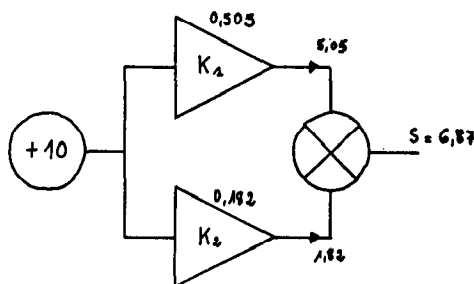


Fig. 21

Remarque.

Sur un calculateur professionnel, les coefficients sont ajustés à l'aide d'un bouton compte-tours. Dans notre cas, on ajuste chaque coefficient K à sa valeur correcte à l'aide d'un voltmètre et d'une source de tension étalon (par exemple 10 V).

2° SOUSTRACTION DE DEUX NOMBRES (voir fig. 22).

Exemple : $S = 5,05 - 1,82$.

L'opérateur de soustraction n'existe pas, on le remplace par une addition algébrique $S = 5,05 + (-1,82)$ en utilisant un inverseur.

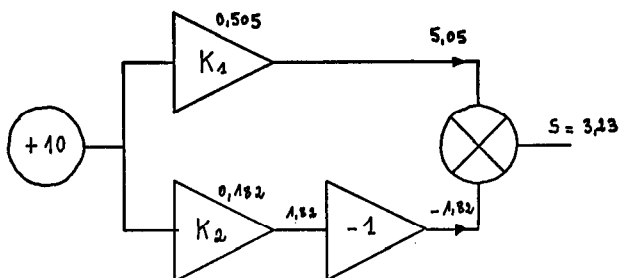


Fig. 22

3° MULTIPLICATION DE DEUX NOMBRES (voir fig. 23).

Exemple : $S = 5,20 \times 1,80 = 9,36$.

On utilise le multiplieur, mais en tenant compte de son défaut : la précision.

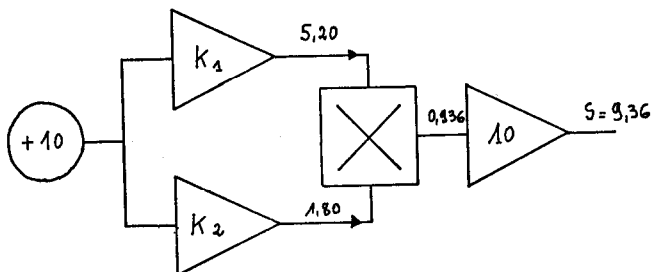


Fig. 23

Remarque.

Il n'existe pas habituellement d'opérateur de division, on le réalise avec un multiplieur associé à un intégrateur.

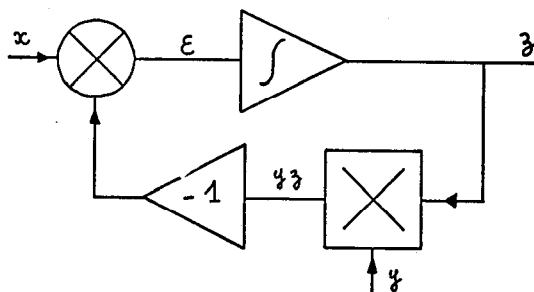


Fig. 24

$$\varepsilon = x - yz.$$

Ce système bouclé est un asservissement, l'intégrateur se fige à la valeur z lorsque $\varepsilon = 0$,

alors $x = yz$ et $z = \frac{x}{y}$.

On améliore la rapidité en accélérant l'intégration.

4° TRACÉ DE COURBES.

Ces exemples nécessitent l'utilisation d'une table traçante XY.

a) *Tracé de droites* soit $y = ax + b$.

On combine les opérations décrites précédemment pour générer $y = ax + b$.

Cas général (voir fig. 25).

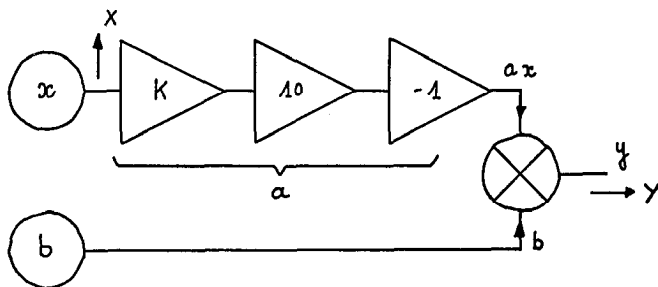


Fig. 25

Exemple : voir photographie n° 3,

pour $y = 2x + 1$

$$y = -2x + 1$$

$$y = \frac{-1x}{2} + 1$$

$$y = \frac{1x}{2} + 1.$$

b) *Tracé de paraboles* soit $y = ax^2 + bx + c$.

Cet exemple nécessite l'utilisation du multiplieur.

Cas général (voir fig. 26).

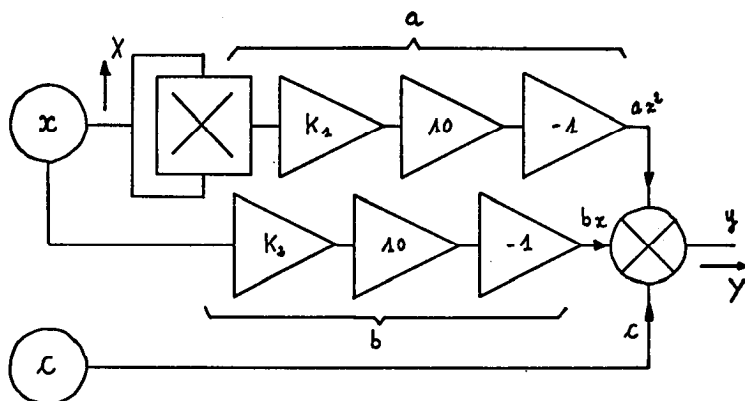


Fig. 26

Exemple : voir photographie n° 4,

pour

$$y = 0,1 x^2 + 0,2 x + 1$$

$$y = -0,1 x^2 + 0,2 x + 1$$

$$y = 0,1 x^2 - 0,2 x + 1$$

$$y = -0,1 x^2 - 0,2 x + 1.$$

5° INTÉGRATION.

Exemple simple (voir fig. 27).

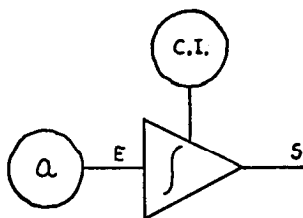
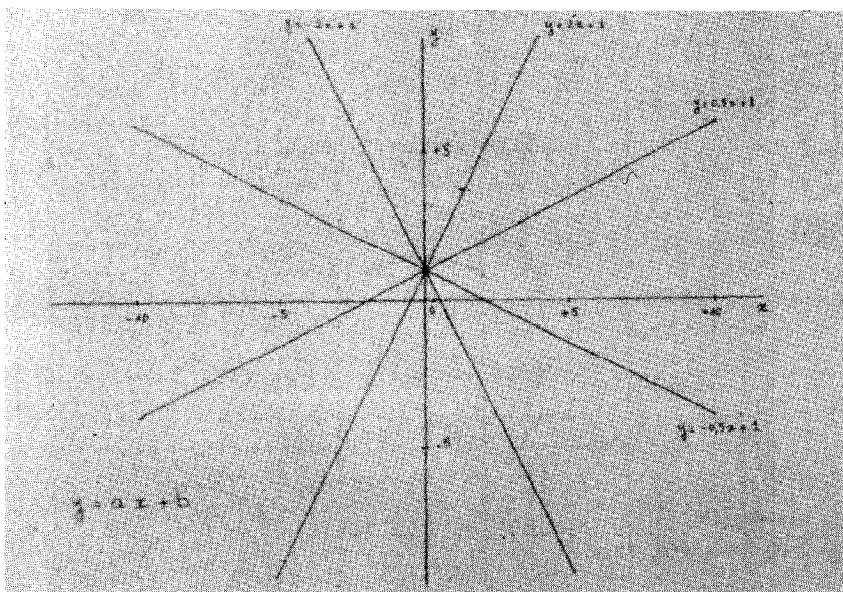


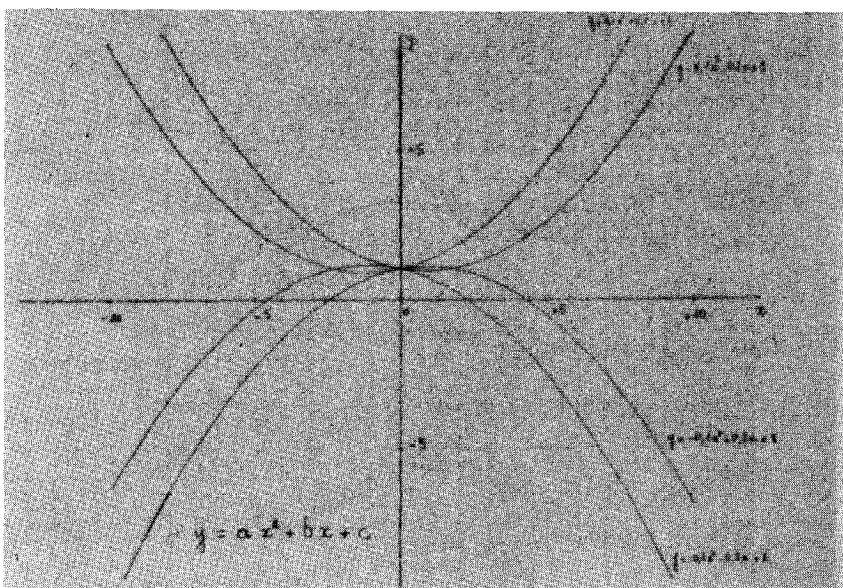
Fig. 27

$$S = \int_0^t E dt + \text{C.I.}$$

- a) Si $E = a = \text{cte}$ et si $\text{C.I.} = 0$
alors $S(t) = at$.
- b) Si $E = a = \text{cte}$ et si $\text{C.I.} = b$
alors $S(t) = at + b$.



Photographie n° 3



Photographie n° 4

Application.

Ce dispositif simple est utilisé comme base de temps, $S(t)$ est alors relié à la voie X de la table traçante.

Exemple : $S(t) = at$

si $a = 1$, on a une base de temps de vitesse de balayage 1 volt/seconde,

si $a = 0,1$, la vitesse est de 1 volt pour 10 secondes.

Remarque.

En tracé de courbes, on peut automatiser la manipulation, x étant issu de $S(t) = at + b$. Pour le début de la courbe, on obtient x négatif en utilisant une C.I. négative.

6° EQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE.**a) Cas général.**

Une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, s'écrit :

$$a y(x) + b \frac{dy}{dx} = f(x).$$

On va utiliser la propriété de l'opérateur d'intégration, telle que l'entrée est la dérivée du signal de sortie : $E = \frac{dS}{dt}$.

L'intégration s'effectuant par rapport au temps, la variable x devient nécessairement la variable temps. On résoudra donc le problème :

$$a y(t) + b \frac{dy}{dt} = f(t).$$

Modifions l'écriture de l'équation pour faire apparaître $\frac{dy}{dt}$,

$$\text{soit } \frac{dy}{dt} = \frac{1}{b} [f(t) - a y(t)].$$

On traduit cette relation sous la forme d'un schéma contenant un seul intégrateur, d'entrée $\frac{dy}{dt}$, de sortie $y(t)$ (voir fig. 28).

La condition initiale C.I. de l'intégrateur représente la valeur initiale de y , soit $y(0)$.

Le traitement du problème débute lorsque l'on passe sur la position « calcul » du commutateur de l'intégrateur. On enre-

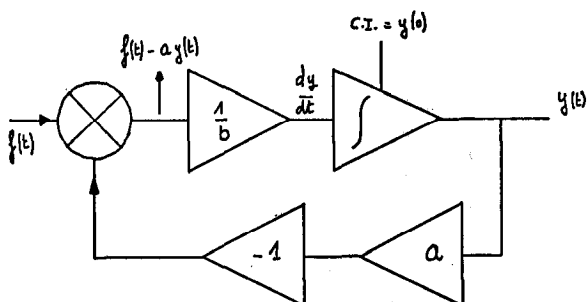


Fig. 28

giste la suite des valeurs de y en Y sur la table traçante, le déplacement en X étant commandé par une base de temps identique à celle décrite précédemment.

b) Exemple de problème.

Charge et décharge d'un condensateur (voir fig. 29) :

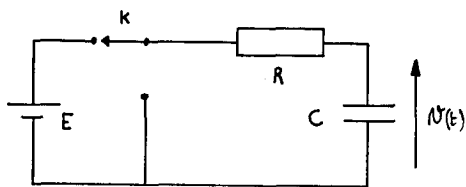


Fig. 29

— charge : $E = RC \frac{dv}{dt} + v$

— décharge : $0 = RC \frac{dv}{dt} + v.$

Considérons la charge du condensateur :

soient : $E = 6$ volts et $\tau = RC = 5$ s

donc : $f(t) = 6 = \text{cte}$; $a = 1$; $b = 5.$

Schéma correspondant à $6 = \frac{5 dv}{dt} + v$ (voir fig. 30).

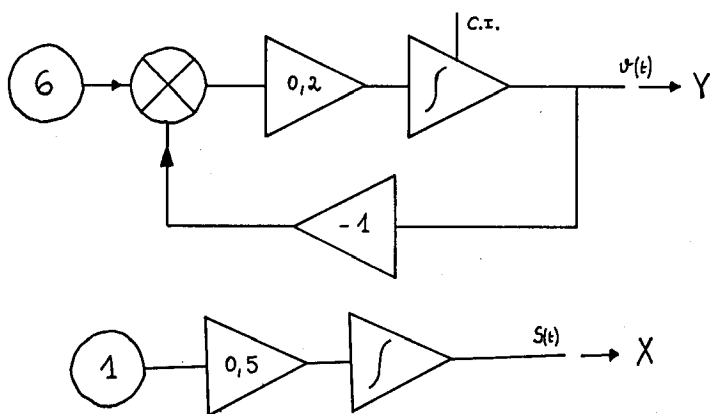


Fig. 30

La base de temps employée est telle que 1 volt correspond à 2 secondes.

Les résultats sont enregistrés sur le graphe de la photographie n° 5.

Deux tracés pour la charge, avec C.I. = $y(0) = 0$
et C.I. = $y(0) = 1$

Un tracé pour la décharge, avec C.I. = $y(0) = 6$
et $f(t) = 0$.

7° EQUATION DIFFÉRENTIELLE DU DEUXIÈME ORDRE.

a) Cas général.

Une équation différentielle du deuxième ordre, à coefficients constants, s'écrit :

$$a y(t) + b \frac{dy}{dx} + c \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

ou : $a y(t) + b \frac{dy}{dt} + c \frac{d^2y}{dt^2} = f(t)$ avec $x = t$.

Il est nécessaire d'employer deux intégrateurs, un premier d'entrée $\frac{d^2y}{dt^2}$, de sortie $\frac{dy}{dt}$, un second d'entrée $\frac{dy}{dt}$, de sortie $y(t)$.

Modifions l'écriture pour faire apparaître $\frac{d^2y}{dt^2}$, soit :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{c} \left(f(t) - a y(t) - b \frac{dy}{dt} \right)$$

ce qui correspond au schéma de la fig. 31.

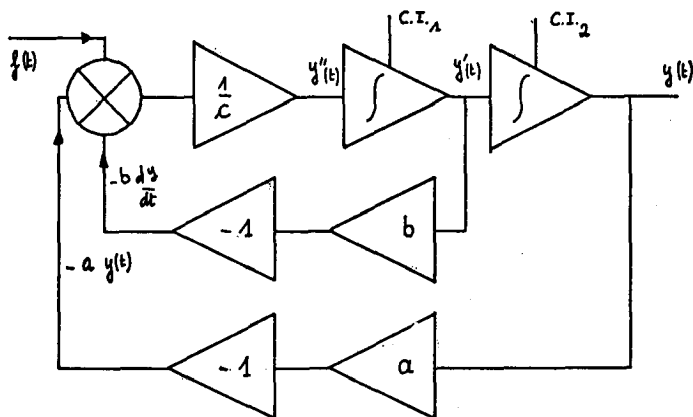


Fig. 31

b) Exemple de problème.

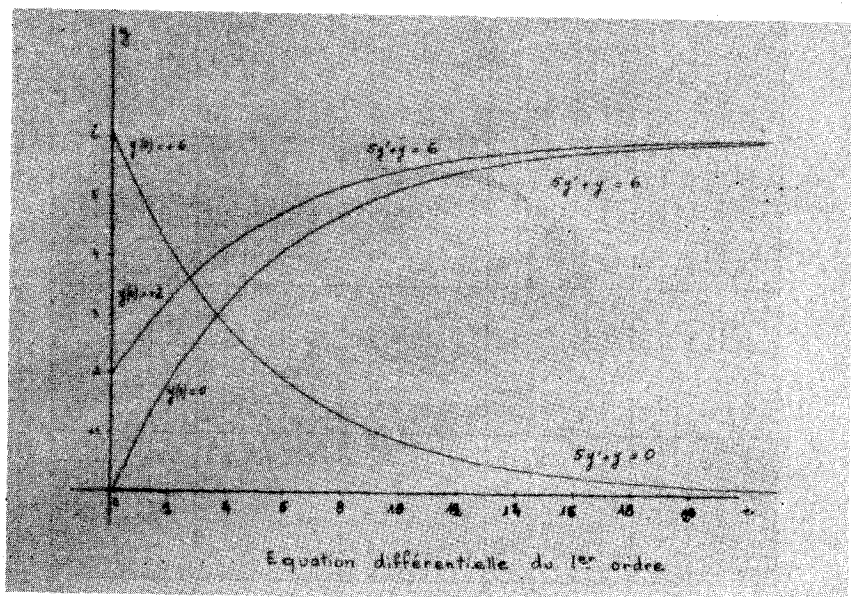
Considérons le problème du pendule à ressort, d'équation $m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$ où m représente la masse accrochée au ressort, k la raideur et y l'élongation algébrique autour de l'élongation moyenne.

On peut aussi écrire : $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} y$.

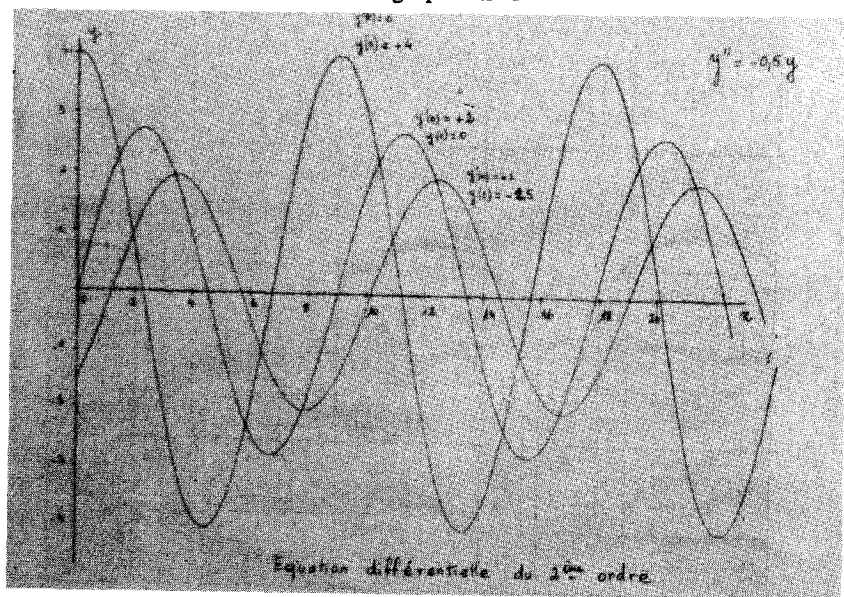
La solution est sinusoïdale, de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$ où m représente la masse accrochée au res-

Le schéma se simplifie, par l'absence de $f(t)$ et de b (voir fig. 32).



Photographie n° 5



Photographie n° 6

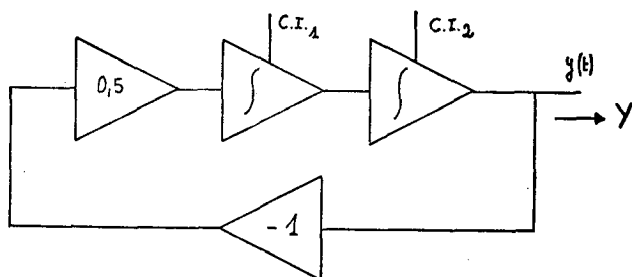


Fig. 32

La base de temps employée est la même que précédemment. Les résultats sont enregistrés sur le graphé de la photographie n° 6 :

C.I.₂ correspond à $y(0)$ (élongation initiale), C.I.₁ à $y'(0)$ (vitesse initiale ou impulsion initiale).

On a tracé les courbes relatives à :

$$\begin{cases} y(0) = +4 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = +2 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = -1,5 \\ y'(0) = +1 \end{cases}$$

Remarques.

— Le dispositif étudié est un générateur sinusoïdal, dont on contrôle parfaitement le départ en jouant sur les deux conditions initiales.

— Dans ce problème, on peut ensuite étudier l'influence d'un frottement sur la décroissance des oscillations, et par essais successifs, on peut ainsi déterminer la valeur du coefficient b produisant une décroissance désirée, comme ferait l'ingénieur pour déterminer un amortisseur. En changeant le signe de b , on peut obtenir des oscillations d'amplitude croissante. En portant $y(t)$ en Y et $y'(t)$ en X, on trace une spirale, etc.

8° SIMULATION DES SYSTÈMES ASSERVIS.

Le calcul analogique est surtout employé en simulation des systèmes asservis et on ne saurait passer sous silence cette application.

Considérons par exemple une régulation de processus, dont le schéma général est donné fig. 33.

Le but de la régulation est d'obtenir : Sortie = Entrée, quelles que soient les perturbations et les variations de l'entrée ou consigne.

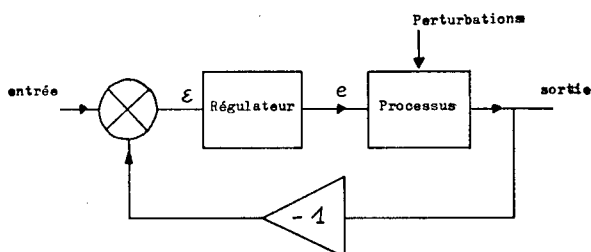


Fig. 33

Par exemple, le processus peut être un four, la sortie est la température (ou plutôt la f.é.m. d'un thermocouple mesurant cette température), e est la d.d.p. de commande appliquée à l'enroulement de chauffage du four. On désire donc que la température soit constante et égale à une valeur désirée appelée consigne.

Des essais préalables ont permis « d'identifier » le processus, c'est-à-dire de déterminer l'équation différentielle associant la sortie à la commande e . Le problème se pose alors de déterminer le régulateur optimal, c'est-à-dire celui qui donne un régime transitoire et une précision désirée. Cette détermination peut se faire par le calcul, ou par des essais successifs comme on va le montrer.

Le régulateur est généralement d'une structure complexe. Choisissons le plus simple, de type proportionnel, tel que $e = A\varepsilon$. Considérons un processus du 2^{me} ordre, simulable simplement par deux cellules R.C., séparées par des adaptateurs d'impédance (coefficient 1). On étudie le comportement de l'ensemble à des variations brutales de consigne (en échelon), en modifiant régulièrement A jusqu'à obtenir le régime désiré (par exemple un seul dépassement) (voir fig. 34 et 35).

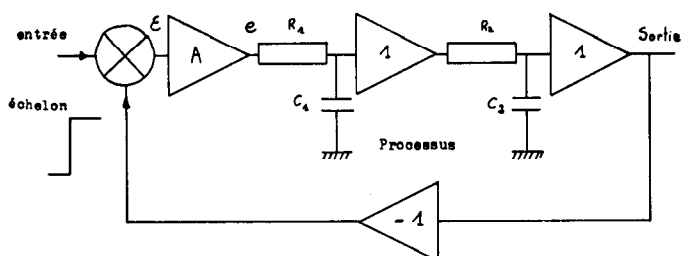


Fig. 34

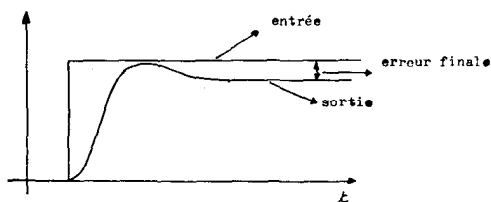


Fig. 35

ANNEXE N° 1

AMPLIFICATEUR DIFFERENTIEL A TRANSISTORS.

Le principe de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel est le même que celui de l'amplificateur différentiel de la fig. 36, seul le nombre d'étages diffère.

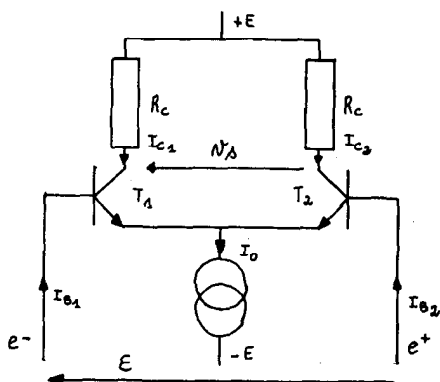


Fig. 36

Supposons pour T1 et T2 le modèle mathématique :

$$\begin{cases} V_{BE} = r I_B + V_d \\ I_C = \beta I_B. \end{cases}$$

Soit ε la tension différentielle d'entrée :

$$\varepsilon = V_{BE1} - V_{BE2}$$

et soit v_s la tension différentielle de sortie :

$$v_s = R_C (I_{C_2} - I_{C_1}).$$

Supposons les transistors parfaitement identiques, alors :

$$\varepsilon = r I_{B_1} + V_d - (r I_{B_2} + V_d) = r (I_{B_1} - I_{B_2})$$

$$\text{et : } \frac{v_s}{\varepsilon} = \frac{R_C (I_{C_2} - I_{C_1})}{r (I_{B_1} - I_{B_2})} = - \frac{\beta R_C}{r} = A$$

A est l'amplification en tension en mode différentiel (Large Signal Voltage Gain).

$$\text{On a défini : } \varepsilon = r (I_{B_1} - I_{B_2})$$

soit : $i_e = I_{B_1} - I_{B_2}$, courant d'entrée différentiel.

Définissons $\varepsilon = R_e i_e$ (dans notre cas $R_e = r$).

R_e est la résistance d'entrée différentielle (Input Resistance).

$$\text{Lorsque : } \varepsilon = 0 : I_{B_1} = I_{B_2} = I_B \quad (i_e = 0)$$

$$\text{et : } I_{C_1} = I_{C_2}$$

$$\text{or : } I_0 = I_{E_1} + I_{E_2} \quad \text{soit } I_0 = 2 (\beta + 1) I_B$$

$$\text{et : } I_B = \frac{I_0}{2 (\beta + 1)}$$

I_B est appelé courant moyen de polarisation (Input Bias Current).

En fait, en raison de dissymétries inévitables, v_s est différent de zéro lorsque $\varepsilon = 0$. Soit v_{s0} cette valeur.

$$\text{On définit : } e = \frac{v_{s0}}{A}.$$

e est la tension de décalage à l'entrée (Input Offset Voltage).

Cette tension de décalage peut être compensée, par exemple en réglant une des résistances R_C .

De même, lorsque $\varepsilon = 0$, I_{B_1} est légèrement différent de I_{B_2} , soit : $I_D = I_{B_1} - I_{B_2}$.

I_D est le courant de décalage à l'entrée (Input Offset current).

Exemple : CARACTÉRISTIQUES DES AMPLIFICATEURS OPÉRATIONNELS
 μA 741 et AD 506

	μA 741	AD 506
$ A $	200 000	50 000
R_e	2 $M\Omega$	$10^{11} \Omega$
I_B	80 nA	5 pA
I_C	20 nA	—
e	1 mV	1 mV

ANNEXE N° 2

INFLUENCE DE LA TENSION DE DECALAGE e .

Considérons l'amplificateur inverseur de la fig. 37.

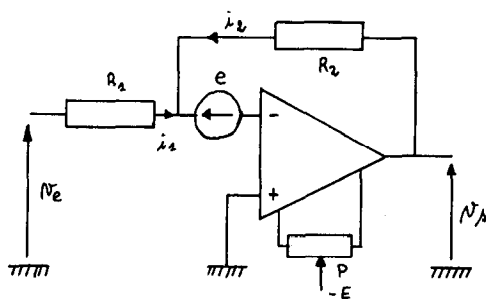


Fig. 37

Equations de fonctionnement :

$$\begin{aligned} v_e &= R_1 i_1 + e + \varepsilon \simeq R_1 i_1 + e \\ v_s &= R_2 i_2 + e + \varepsilon \simeq R_2 i_2 + e \quad (\text{car } \varepsilon \simeq 0) \end{aligned}$$

On obtient :

$$v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e + e \frac{(R_1 + R_2)}{R_1}.$$

On constate que la tension de décalage est amplifiée dans le

rapport $\frac{R_1 + R_2}{R_1}$ et introduit une erreur en sortie.

On compense cette erreur en agissant sur le potentiomètre P dans le cas de l'amplificateur μA 741.

ANNEXE N° 3

INFLUENCE DES COURANTS DE POLARISATION.

Considérons le schéma de la fig. 38.

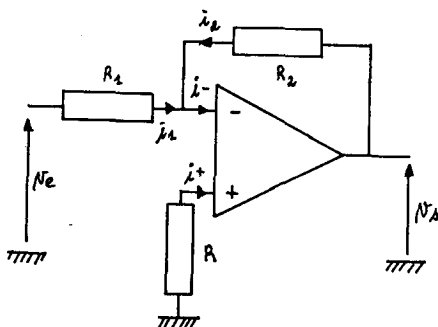


Fig. 38

i^- et i^+ sont les deux courants de polarisation.

Equations de fonctionnement :

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i^- \\ v_e = R_1 i_1 + \varepsilon - R i^+ \\ v_s = R_2 i_2 + \varepsilon - R i^+. \end{cases}$$

On obtient :

$$v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e + R_2 i^- - R \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) i^+.$$

Soit : $\varepsilon r = R_2 i^- - R \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) i^+.$

εr est une tension d'erreur due aux courants de polarisation i^- et i^+ . On peut annuler εr en agissant sur la résistance R.

Considérons $i^- = i^+$ (courant de décalage nul), alors :

$$\varepsilon r = 0 \quad \text{si} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

ANNEXE N° 4

CAUSES D'ERREUR EN INTEGRATION.

1° Erreur due à la d.d.p. de décalage.

Considérons le schéma de la fig. 39.

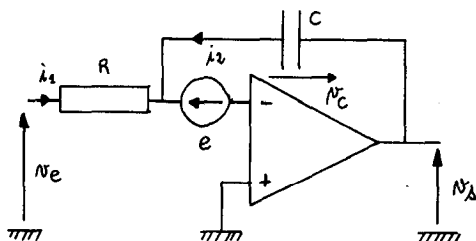


Fig. 39

Equations de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 \simeq \frac{v_e - e}{R} \\ i_2 = C \frac{dv_c}{dt} \simeq C \frac{d(v_s - e)}{dt} = C \frac{dv_s}{dt}. \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_e}{RC} + \frac{e}{RC}.$$

Si $v_e = 0$, la sortie a pour valeur $v_s(t) = \frac{e}{RC} t + \text{cte}$, au

lieu de $v_s = \text{cte}$, donc une dérive due à e .

Exemple : $e = 1 \text{ mV}$ $RC = 1 \text{ s}$,
la dérive de l'intégrateur est de 1 mV par seconde.

2° Erreur due aux courants de polarisation.

Considérons le schéma de la fig. 40.

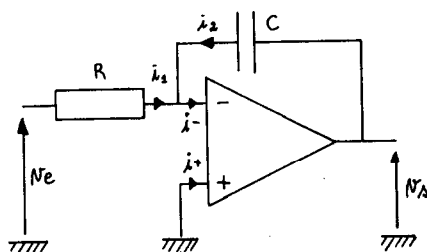


Fig. 40

Equations de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 \simeq \frac{v_e}{R} \\ i_2 \simeq C \frac{dv_s}{dt} \\ \frac{v_e}{R} + C \frac{dv_s}{dt} = i^- \end{array} \right.$$

On obtient :
$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_e}{RC} + \frac{i^-}{C}$$

si $v_e = 0$, alors $v_s(t) = \frac{i^-}{C} t + \text{cte.}$

On observe encore une dérive de l'intégrateur.

Exemples :

a) cas du $\mu A 741$:

$$i^- = 80 \text{ nA} \quad \text{et} \quad C = 1 \text{ } \mu\text{F.}$$

La dérive est de 80 mV par seconde.

On peut la réduire en augmentant C.

b) cas du AD 506 :

$$i^- = 5 \text{ pA} \quad \text{et} \quad C = 1 \text{ } \mu\text{F.}$$

La dérive est alors de 5 μV par seconde.

3° Compensation des erreurs dans le cas de l'amplificateur $\mu A 741$.

Considérons le schéma de la fig. 41.

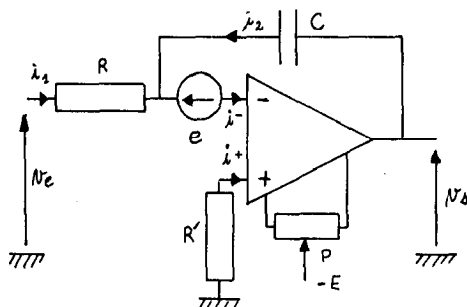


Fig. 41

Equations de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{aligned} i_1 &\simeq \frac{v_e - e + R'i^+}{R} \\ i_2 &\simeq C \frac{d(v_s - e + R'i^+)}{dt} = C \frac{dv_s}{dt} \\ i_1 + i_2 &= i^- \end{aligned} \right.$$

On obtient :

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_e}{RC} + \frac{i^-}{C} - \underbrace{\frac{R'i^+}{RC}}_{\text{erreur}} + \frac{e}{RC}.$$

On réalise une pré-compensation en réglant $R = R'$ (en supposant $i^- = i^+$, alors $\frac{i^-}{C} - \frac{R'i^+}{RC} = 0$), la compensation finale est obtenue en agissant sur P, qui permet d'annuler l'action de e et celle du décalage entre i^- et i^+ .

Remarque.

On effectue le réglage de P (pour obtenir $v_s = \text{cte}$) lorsque $v_e = 0$, c'est-à-dire l'entrée court-circuitée à la masse. En effet, si l'entrée est débranchée, $i_1 = 0$ et $i_2 = i^-$, la compensation n'est plus possible. C'est pour cette raison que dans le schéma réel a été placée une résistance de $47 \text{ K}\Omega$ entre l'entrée de l'intégrateur et la masse ($47 \text{ K}\Omega \ll 1 \text{ M}\Omega$).

ANNEXE N° 5

PRINCIPE DU CIRCUIT INTEGRE MULTIPLIEUR.

Considérons le schéma de la fig. 42.

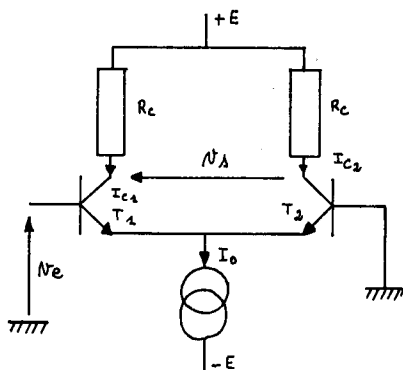


Fig. 42

Supposons pour chaque transistor : $\begin{cases} V_{BE} = r I_B + V_d \\ I_C = \beta I_B. \end{cases}$

On a démontré (annexe n° 1) que : $\frac{v_s}{v_e} = -\frac{\beta R_C}{r}.$

Remarque.

Dans un transistor, on peut montrer que :

$$I_B \simeq I_s \exp \left(\frac{V_{BE}}{V_0} \right)$$

ou :
$$V_{BE} \simeq V_0 \log \frac{I_B}{I_s}$$

soit :
$$\frac{d V_{BE}}{d I_B} \simeq \frac{V_0}{I_B}.$$

Cette quantité représente en fait r .

Si I_{B1} et I_{B2} sont peu différents, r est sensiblement le même pour les deux transistors et :

$$\frac{v_s}{v_e} = - \frac{\beta R_C I_B}{V_0}$$

or :
$$I_B = \frac{I_0}{2(\beta + 1)} \quad (\text{annexe n}^\circ 1),$$

donc on peut écrire :

$$\frac{v_s}{v_e} = - \frac{\beta R_C I_0}{2(\beta + 1) V_0}$$

ou : $v_s = K I_0 v_e$ avec $K = - \frac{\beta R_C}{2(\beta + 1) V_0} = \text{cte.}$

Supposons à présent I_0 variable, soit $I_0 = y$ et soit $v_e = x$, on peut écrire : $v_s = Kxy.$

On a ainsi réalisé un circuit multiplieur.

TRIGEASSOU Jean-Claude,
(L.T.E. Louis-Armand - Poitiers).

BIBLIOGRAPHIE

- H. LILEN. — « *Principes et applications des circuits intégrés linéaires* ». (Editions Radio).
- Y. LOISELET. — « *L'amplificateur opérationnel dans les asservissements* ». (Dunod).
- M. PELEGRIN. — « *Machines à calculer électroniques* ». (Dunod).
- N. STEINBERG. — « *Machines analogiques hybrides* ». (Armand Colin).
- M. DANLOUX-DUMESNILS. — « *Le calcul analogique par courants continus* ». (Dunod).
- C.-A. STEWART et R. ATKINSON. — « *La technique du calculateur analogique* ». (Masson).