La représentation isométrique de la Transformation de Lorentz

La transformation de LORENTZ permet de calculer les coordonnées d'un événement dans un repère galiléen en fonction des coordonnées de ce même événement dans un autre repère galiléen, dans le cadre de la thorie de la Relativité restreinte mise au point par EINSTEIN au début du siècle.

Hélas, cette opération trouve difficilement une interprétation intuitive. Nous avons du mal à nous la représenter car nous ne disposons pas d'exemples concrets simples qui la font intervenir.

Aussi, un dessin plausible de cette transformation permettra de mieux se faire une idée de ce qui se passe. L'objet de cet article est d'exposer une représentation graphique de la Transformation de LORENTZ qui visualisera la Transformation elle-même et des conséquences immédiates comme la contraction des longueurs, la dilatation des temps et l'effet DOPPLER.

La feuille de papier sur laquelle ces caractères sont imprimés n'ayant que deux dimensions, nous ne représenterons que la transformation spéciale de LORENTZ qui ne fait intervenir qu'une dimension d'espace en plus du temps.

REPRESENTATION DE L'ESPACE - TEMPS, D'UN REPERE GALILEEN.

L'espace-temps de MINKOWSKI est l'espace affine dont les différents points sont appelés événements. Il sera représenté par la feuille de papier, un point de la feuille étant un événement (fig. 1).

Pour repérer un événement, il nous faut une base de l'espace affine (c'est-à-dire : deux vecteurs ($\vec{i}$ pour la coordonnée d'espace, $\vec{j}$ pour le temps) et une origine Ω). Nous pouvons maintenant déterminer les coordonnées d'un événement A par les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ dans la base $\vec{i}, \vec{j}$. *Cette base de l'espace affine est la représentation du repère galiléen* par rapport auquel sont données les coordonnées d'un événement (c'est-à-dire le lieu et la date où il s'est produit) (fig. 2).

Dans cet article, la cordonnée temporelle d'un événement sera ct (c = vitesse de la lumière), ainsi les 2 coordonnées d'un événement auront même unité.

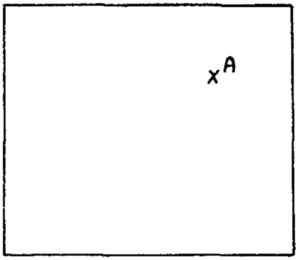

Fig. 1. — L'espace temps et un événement A.

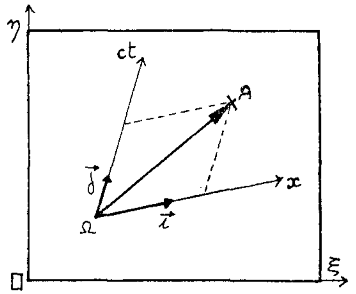

Fig. 2. — Le repère galiléen $\Omega\, x\, ct$.

Une remarque d'importance : le rectangle de papier, qui représente l'espace-temps affine, est intuitivement regardé comme un espace euclidien de dimension deux. Ce qui, en clair, veut dire que le dessinateur voit une feuille de papier sur laquelle sont dessinés des vecteurs ; pour lui, la longueur du vecteur est celle qu'il mesure avec sa règle, l'angle entre deux vecteurs est celui qu'il mesure avec son rapporteur. On peut mathématiser la chose en énonçant : « La feuille de papier est un espace euclidien repéré par les axes $\square\zeta$ et $\square\eta$ orthonormés. » (voir fig. 2).

LA TRANSFORMATION DE LORENTZ. PASSAGE D'UN REPERE GALILEEN A UN AUTRE.

L'espace n'ayant qu'une dimension, les événements ont tous lieu sur la même droite que l'on repère soit par Ox, soit par O'x' en mouvement par rapport à Ox à la vitesse v. Sur la fig. 3, on a dessiné Ox et O'x' décalés pour plus de compréhension.

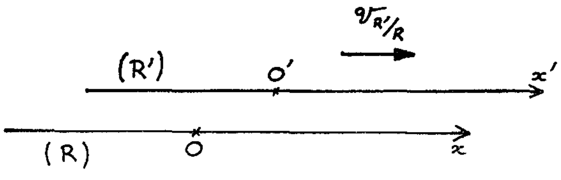

Fig. 3. — Les axes d'espace des repères galiléens (R) et (R').

Nous avons ainsi deux repères galiléens (R) et (R') qui ont chacun leur temps : ct et ct'.

Dans ce cas, le passage des coordonnées (x, ct) aux coordonnées (x', ct') est donné par la Transformation Spéciale de LORENTZ :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - v\,t) \qquad t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

que nous utiliserons sous la forme :

$$\underline{x' = \gamma(x - \beta\,ct)} \qquad \underline{ct' = \gamma(-\beta x + ct)}$$

avec : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ et $\beta = \dfrac{v}{c}$

ou sous la forme réciproque :

$$\underline{x = \gamma(x' + \beta\,ct')} \qquad \underline{ct = \gamma(\beta x' + ct').}$$

Notons au passage les relations :

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 = 1.$$

Si nous représentons les deux repères galiléens sur notre rectangle de papier, on obtient quelque chose dont l'allure est représentée par la fig. 4.

Deux remarques :

* L'événement origine est le même dans les deux repères (en effet $x = ct = 0$ entraîne $x' = ct' = 0$), il est représenté par le point Ω.

* L'origine des espaces O du repère galiléen (R) décrit la droite $\Omega\,ct$ au cours du temps, pendant que O' origine de (R') décrit $\Omega\,ct'$.

Enfin, si nous voulons trouver, pour un événement A, le rapport de deux coordonnées $\dfrac{x'_A}{x_A}$, il est très tentant de le comparer au rapport des longueurs ΩH' et ΩH ; mais tant que les longueurs des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ ne sont pas les mêmes, les deux rapports ne sont pas égaux.

Ainsi, une représentation graphique sera bonne si :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{i'}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{j'}\| = 1$$

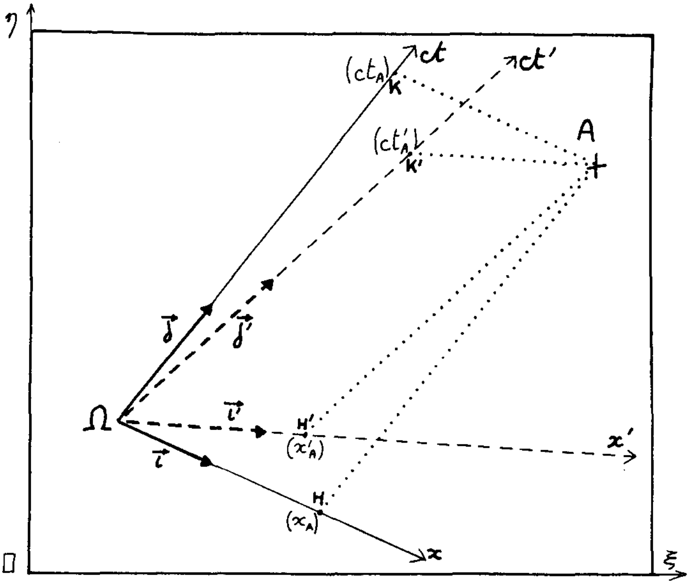

Fig. 4. — Deux repères galiléens ayant même origine (cas de la Transformation Spéciale de Lorentz).

(normes calculées dans le repère euclidien □ξη). Nous pourrons alors comparer des coordonnées en comparant les longueurs du dessin. C'est cette représentation particulière que nous appelons la représentaion isométrique, car les nouveaux vecteurs de base $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ ont même longueur que les vecteurs de base du premier repère : $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

LA REPRESENTATION ISOMETRIQUE.

Calculons tout d'abord les vecteurs $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, pour cela écrivons (cf. fig. 4) :

$$\overrightarrow{\Omega A} = x'\vec{i'} + ct'\vec{j'} = x\vec{i} + ct\vec{j}.$$

Appliquons la transformation de Lorentz à x et ct :

$$\overrightarrow{\Omega A} = \gamma\,(x' + \beta\,ct')\,\vec{i} + \gamma\,(\beta x' + ct')\,\vec{j}.$$

Regroupons :

$$\overrightarrow{\Omega A} = x'\,(\gamma\,\vec{i} + \beta\,\gamma\,\vec{j}) + ct'\,(\beta\,\gamma\,\vec{i} + \gamma\,\vec{j}).$$

Identifions :

$$\underline{\vec{i}' = \gamma\,\vec{i} + \beta\,\gamma\,\vec{j} \qquad \vec{j}' = \beta\,\gamma\,\vec{i} + \gamma\,\vec{j}.}$$

En prenant $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, on obtient la fig. 5.

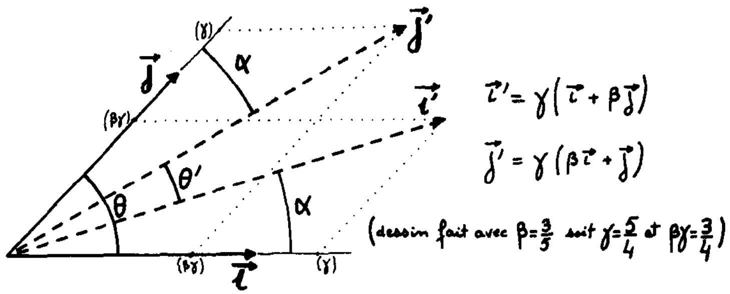

Fig. 5. — $\vec{i}$ et $\vec{j}'$ calculés à partir de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

Les vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ ont même longueur, mais ne sont pas forcément de longueur 1.

Nous allons donc choisir judicieusement l'angle ϑ (entre $\vec{i}$ et $\vec{j}$) pour qu'il en soit ainsi, écrivons donc que $\|\vec{i}'\| = 1$ ou $\vec{i}'^2 = 1$.

$$\vec{i}'^2 = \gamma^2\,(\vec{i}^2 + 2\,\beta\,\vec{i}\cdot\vec{j} + \beta^2\,\vec{j}^2) = \gamma^2\,(1 + \beta^2 + 2\,\beta\,\vec{i}\cdot\vec{j})$$

$\vec{i}'^2 = 1$ entraîne $\vec{i}\cdot\vec{j} = \left(\dfrac{1}{\gamma^2} - 1 - \beta^2\right)\cdot\dfrac{1}{2\,\beta}\ldots$

$$\ldots = (1 - \beta^2 - 1 - \beta^2)\,\frac{1}{2\,\beta}.$$

Soit : $$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{j} = -\beta}$$

c'est-à-dire $\underline{\cos\vartheta = -\beta}$, β étant plus petit que 1, cette condition peut toujours être remplie.

Le lecteur démontrera aisément les autres relations (à partir de $\vec{i}\cdot\vec{j} = -\beta$ et $\dfrac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$).

$$\boxed{\vec{i'} \cdot \vec{j'} = \beta}$$

$$\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j'} = 0 \; ; \; \vec{i'} \cdot \vec{j} = 0} \qquad \boxed{\vec{i} \cdot \vec{i'} = \vec{j} \cdot \vec{j'} = \frac{1}{\gamma}}$$

On obtient ainsi la configuration de la fig. 6, en notant les relations :

$$\cos \vartheta = -\beta \qquad \cos \vartheta' = \beta \qquad \text{soit} \qquad \vartheta + \vartheta' = \pi \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\gamma}$$

et $\quad \alpha + \vartheta' = \dfrac{\pi}{2} \; (v > 0).$

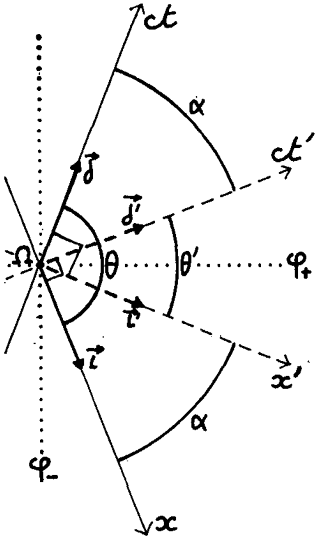

Fig. 6

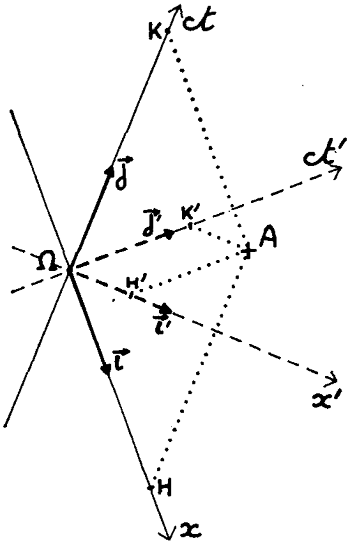

Fig. 7

Quelques remarques :

* Nous avons tracé (fig. 6) les bissectrices (en pointillés) des droites Ωx et Ωct, elles représentent le mouvement de deux photons. Pour la bissectrice intérieure : $x = ct$, c'est un photon qui se propage dans le sens des x positifs ; pour la bissectrice extérieure : $x = -ct$, c'est un photon qui va dans l'autre sens. Comme, d'après les égalités d'angles que nous venons de mon-

trer, les bissectrices en question sont aussi celles des droites $\Omega x'$ et $\Omega ct'$, on a donc pour le photon positif $x' = ct'$ et pour l'autre $x' = -ct'$.

On visualise ainsi l'invariance de la vitesse de la lumière.

* Sur la fig. 7, nous avons représenté un événement A et ses projections H, K, H' et K' sur Ωx, Ωct, $\Omega x'$ et $\Omega ct'$ parallèlement à $\vec{j}$, $\vec{i}$, $\vec{j'}$ et $\vec{i'}$. Comme tous les vecteurs de base ont maintenant pour longueur un, alors la longueur de ΩH est égale à x, celle de ΩH' à x'...

* Signalons enfin que si nous changeons le signe de x' dans le deuxième repère (R'), (R) et (R') ont alors des positions réciproques identiques, comme le montre la fig. 8.

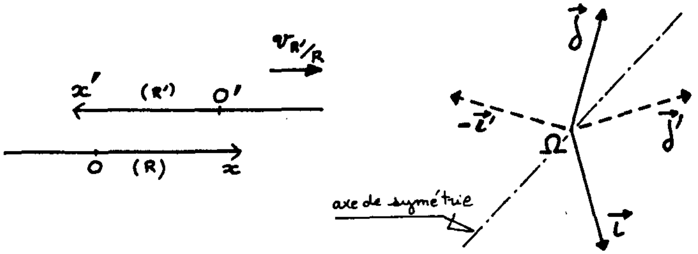

Fig. 8

On retrouve cette réciprocité sur le graphe entre $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(-\vec{i'}, \vec{j'})$.

LA CONTRACTION DES LONGUEURS (cf. fig. 9).

Une règle de longueur l_0 fixe dans le repère (R') est mesurée dans (R) par la différence entre les abscisses dans (R) de deux événements A et B définis par :

A = origine de la règle au temps $t = 0$ (confondu avec Ω),

B = extrémité de la règle au temps $t = 0$ [c'est-à-dire au même instant dans (R)].

Le dessin montre que la longueur l dans (R) est égale à $l_0 \cos \alpha$ (car $\vec{i}$ et $\vec{j'}$ sont perpendiculaires).

On trouve la contraction des longueurs : $\boxed{l = \dfrac{l_0}{\gamma}}$

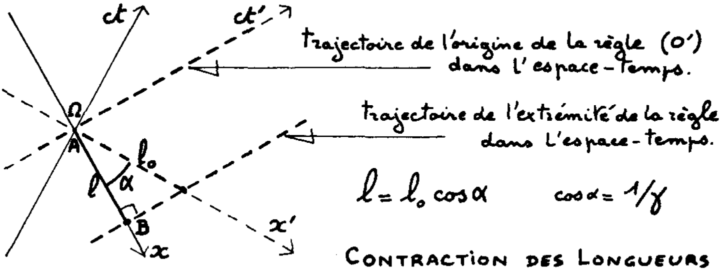

Fig. 9

LA DILATATION DES TEMPS (cf. fig. 10).

Une horloge est fixe dans (R'), elle est placée en O' par exemple ; il va s'écouler un temps τ_0 dans (R') entre les deux événements suivants :

A : $x' = 0 \quad ct' = 0$ (confondu avec Ω),

B : $x' = 0 \quad ct' = c\tau_0$.

(τ_0 est le temps mesuré dans un référentiel galiléen où l'horloge est immobile (R'), c'est le temps propre de l'horloge).

L'intervalle de temps entre les événements A et B, mesuré dans (R), est d'après le dessin : $c\tau = \dfrac{c\tau_0}{\cos\alpha}$.

On trouve la dilatation des temps : $\boxed{\tau = \gamma\, \tau_0}$

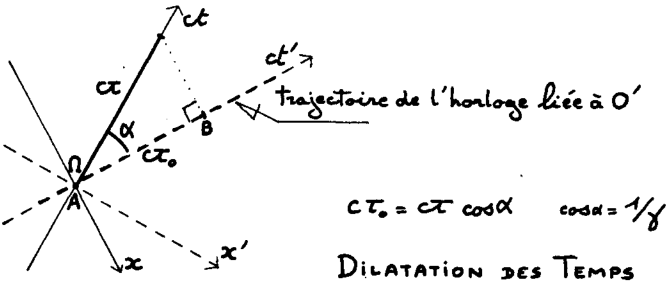

Fig. 10

EFFET DOPPLER LONGITUDINAL DANS LE CAS DE LA LUMIERE (cf. fig. 11).

Traçons sur notre représentation les événements correspondants à deux photons qui se propagent dans le sens positif ; le photon n° 1 passe par l'origine.

Le temps qui sépare φ_1 et φ_2 dans (R) est T tel que $cT = \Omega A$; dans (R') le temps qui sépare φ_1 et φ_2 est T' tel que $CT' = \Omega A'$.

Remarquons que $\Omega L = \Omega A$, que

$$\Omega L / \Omega A' = \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta'}{1 + \cos \vartheta'}} \quad \text{et} \quad \cos \vartheta' = \beta = \frac{v}{c}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{v}{c}}}}$$

$$\left(\text{car } \frac{T'}{T} = \frac{\Omega A'}{\Omega A} = \frac{\Omega A'}{\Omega L} = \frac{1}{\operatorname{tg} \dfrac{\vartheta'}{2}} \right)$$

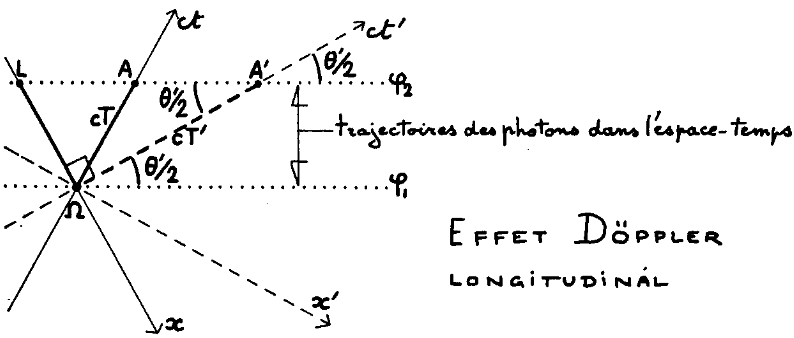

Fig. 11

Si les photons se propageaient dans le sens négatif, les droites qui les représentent sur le dessin auraient été verticales et on aurait trouvé :

$$\frac{T'}{T} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

CONCLUSION.

Cette représentation graphique nécessite un petit effort d'abstraction et quelques calculs préalables. Toutefois, une fois établie, elle présente l'avantage de visualiser correctement la transformation de LORENTZ et ses implications (on ne risque pas de faire les raisonnements de la contraction des longueurs ou de la dilatation des temps à l'envers...).

Elle a, à mon avis, un autre intérêt qui est d'obliger le lecteur à dissocier la notion d'événement de celle de repère galiléen, à bien voir qu'un événement est un point de l'espace-temps de MINKOWSKI et qu'il faut pour le repérer utiliser des bases de cet espace affine : les repères galiléens. Le lecteur aura rencontré des trajectoires dans l'espace-temps (pour l'extrémité d'une règle, une horloge ou un photon) qui n'ont rien à voir avec les trajectoires au sens géométrique habituel du terme (qui, ici, sont toutes la même droite). La notion d'espace-temps aura peut-être ainsi perdu de son mystère et sera devenue quelque peu plus familière.

Louis CAPÉRAN,

(*Ecole Sainte-Geneviève - Versailles*).