

SOLUTION

ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT DU RAYONNEMENT

I. Principe d'un photomultiplicateur, interférences lumineuses à très faible intensité.

I.1. Le nombre N de photons arrivant par unité de temps et par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation est :

$$N = n c$$

égalité qui exprime que N est aussi égal au nombre de photons contenus dans un volume cylindrique de section droite unité et de longueur c .

On en déduit l'intensité I du faisceau :

$$I = N h \nu = n c h \nu$$

chaque photon transportant l'énergie $h \nu$.

L'énergie w par unité de volume du faisceau est : $w = n h \nu$, d'où la relation :

$$\boxed{I = c w.} \quad (1)$$

Application numérique :

$$w = I/c = 10^{-3}/3 \cdot 10^8 = 3,3 \cdot 10^{-12} \text{ J. m}^{-3}.$$

$$n = \frac{w}{h \nu} = \frac{w \lambda}{h c} = \frac{I \lambda}{h c^2} \simeq 10^{-7} \text{ m}^{-3}.$$

I.2. i_s est proportionnel au nombre N_e d'électrons extraits par unité de temps ; \mathfrak{S} est proportionnel au nombre N_p de photons arrivant par unité de temps sur la photocathode. En outre, N_e et N_p sont proportionnels, d'où la relation de proportionnalité entre i_s et \mathfrak{S} : $i_s = K \mathfrak{S}$.

On a ainsi : $i_s = N_e e$, $\mathfrak{S} = N_p h \nu$ et $N_e = r_\nu N_p$ où r_ν est le rendement quantique de la photocathode pour la fréquence ν , d'où :

$$i_s = r_\nu N_p e = r_\nu \frac{\mathfrak{S}}{h \nu} e = K \mathfrak{S}$$

avec :

$$K = \frac{r_v e}{h \nu} = \frac{r_v e \lambda}{h c}$$

d'où :

$$r_v = \frac{K h \nu}{e} \quad (2)$$

Application numérique :

$$r_v = 0,103 \approx 0,1.$$

I.3. Photomultiplicateur.

I.3.a) Le gain total du photomultiplicateur est :

$G = g^p = A^p \nu^p$, soit :

$$G = A^p \left(\frac{V}{p} \right)^p \quad (3)$$

I.3.b) Choix de p . D'après (3) : $V = \frac{1}{A} p G^{1/p}$ fonction

dont la dérivée $\frac{dV}{dp}$ s'annule pour :

$$p = \text{Log } G.$$

Application numérique :

Pour $G = 10^6$, $p = \text{Log } G = 13,81$. Pour $p = 13$, $p G^{1/p} = 37,62$ et pour $p = 14$, $p G^{1/p} = 37,56$, valeur un peu inférieure à la précédente. Il faut donc adopter la valeur $p = 14$.

Pour $p = 14$:

$$g = G^{1/p} = \sqrt[14]{10^6} = 2,68 \quad \text{et} \quad V_m = \frac{1}{A} p G^{1/p} = 1\,252 \text{ volts.}$$

Stabilité d'alimentation du P.M. :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{p} \frac{\Delta G}{G} = \frac{1}{14} 10^{-3} = 7,14 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-4}. \text{ Il faut donc}$$

utiliser une alimentation très stabilisée.

I.3.c) Le nombre moyen d'électrons sortant du P.M. pour un photon est égal à $G \cdot r_v = 10^6 \cdot 0,103 \approx 10^5$ électrons par photon.

I.4.a) Nombre de franges visibles :

Compte tenu du fait que la distance l des centres des fentes est très petite, la largeur du champ d'interférence est très sensi-

blement égale à : $\frac{\lambda}{a} \times D = 40 \text{ mm} \gg l$.

L'interfrange vaut $i = \frac{\lambda D}{l} = 8 \text{ mm}$ ($i \gg l$), d'où 5 franges brillantes visibles.

I.4. b) Soit N_p le nombre de photons arrivant par unité de temps et de surface et S la surface de l'ensemble des deux fentes diffractantes. Les fentes reçoivent donc au total $N_p S$ photons par seconde et l'intervalle de temps moyen d'arrivée de deux photons successifs (sur l'une quelconque des fentes) est

$$\frac{1}{N_p S}$$

La durée de traversée de l'espace EE' est $\frac{D}{c}$. Pour que la probabilité soit très grande de n'avoir qu'un seul photon ayant traversé l'une quelconque des deux fentes, il faut que :

$$\frac{1}{N_p \lambda} \gg \frac{D}{c}$$

Or : $N_p = \frac{I}{h\nu}$ d'où $I \ll \frac{c h \nu}{SD} = \frac{h c^2}{\lambda SD}$.

Application numérique :

Avec les données numériques de l'énoncé : $I \ll 8 \cdot 10^{-5} \text{ W. m}^{-2}$. Pour un taux de comptage même aussi faible, on obtient des franges d'interférence ; les photons se répartissent statistiquement au cours du temps de manière à donner la figure d'interférence.

Note (*) : On remplace actuellement de plus en plus les P.M. par des « channeltrons ». C'est un tube en verre repré-

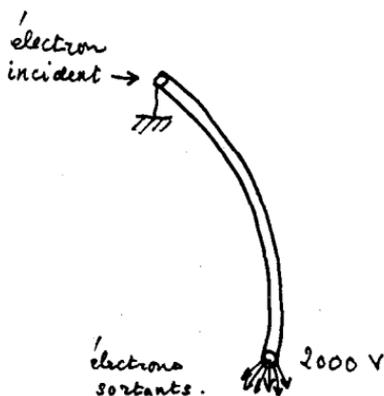


Fig. 1. — Principe du « channeltron ».

(*) Note de R. MOREAU.

senté sur la fig. 1 en vraie grandeur, tapissé de semi-conducteur, auquel on applique une d.d.p. d'environ 2 000 V. L'effet secondaire est nettement plus important que sur les dynodes d'un P.M. et on obtient des gains G de l'ordre de 10^8 . En outre, l'appareil est beaucoup moins fragile que le P.M. classique.

II. Pression de radiation.

II.1. On a $E = \frac{1}{2} m v^2$ et $E = p_{ph} c$ où p_{ph} est la

quantité de mouvement du photon. Si $p = m v$ est la quantité de mouvement de la particule de masse m , on en déduit :

$$\frac{p_{ph}}{p} = \frac{E}{c m v} = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \quad \text{rapport très petit.}$$

A énergies égales, la quantité de mouvement transportée par un photon est beaucoup plus faible que celle transportée par une particule de masse m , c'est pourquoi dans certains cas, on peut en première approximation négliger la quantité de mouvement transportée par les photons. Le problème proposé insiste au contraire sur quelques conséquences de ce transport de quantité de mouvement par le rayonnement.

II.2. a) Si \vec{u} est le vecteur unitaire de la direction incidente, la variation de quantité de mouvement d'un photon d'énergie E est :

$$\Delta \vec{p} = -2 \frac{E}{c} \vec{u}.$$

L'intensité I du faisceau est liée à E par : $N E = I$ où N est le nombre de photons arrivant par unité de temps et de surface (perpendiculaire à \vec{u}). On en déduit la quantité de mouvement transférée au miroir par unité de temps, soit $2 \frac{I}{c} \vec{u}$.

II.2. b) La pression de radiation Π exprime la force moyenne exercée par le faisceau sur l'unité de surface du miroir.

On a :

$$\Pi = 2 \frac{I}{c} \quad (4)$$

car la force moyenne est égale à la quantité de mouvement transférée par unité de surface et par *unité de temps* au

miroir $\left(\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$. La relation (4) est indépendante de la fréquence, donc reste valable pour un rayonnement non monochromatique.

Application numérique :

$\Pi = 1,33 \cdot 10^{-4}$ N. m⁻². Pour un plan totalement absorbant, il faut diviser la valeur précédente par 2.

II.2. c) Pour un faisceau arrivant avec l'incidence i , la pression de radiation pour un miroir totalement réfléchissant est :

$$\Pi = 2 \frac{I}{c} \cos^2 i. \quad (5)$$

En effet, la quantité de mouvement transférée par un photon est normale au plan du miroir et égale à $2 \frac{E}{c} \cos i$. D'autre part, le nombre de photons arrivant par unité de surface du miroir est $N \cos i$, d'où la relation (5).

II.3. a) Absorption par une sphère noire. Chaque photon absorbé transfère la quantité de mouvement $\frac{E}{c}$ à la sphère et

le nombre de photons absorbés par unité de temps par la sphère est égal à $\pi R^2 N$ d'où la force moyenne exercée par le faisceau sur la sphère.

$$F = \pi R^2 \frac{NE}{c} = \pi R^2 \frac{I}{c}. \quad (6)$$

II.3. b) La force d'attraction solaire sur une poussière est proportionnelle à R^3 alors que la force due à la pression de radiation solaire est proportionnelle à R^2 . Pour un rayon suffisamment faible, la pression de radiation devient ainsi supérieure à la force d'attraction et la poussière peut être « soufflée » par cette pression de radiation.

$$\text{On a : } F_{rad} = \pi R^2 \frac{I(r)}{c} \quad \text{et} \quad F_{grav} = \mathcal{G} \frac{M M_S}{r^2} \text{ où } M$$

est la masse de la particule, soit $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu$.

Pour avoir : $F_{rad} > F_{grav}$, il faut que :

$$\pi R^2 \frac{I(r)}{c} > \frac{4}{3} \pi R^3 \mu \frac{M_S}{r^2},$$

$$\text{soit : } R < R_m = \frac{3 I(r)}{4 \mathcal{G} \mu M_S c} \frac{r^2}{c}. \quad (7)$$

La conservation de l'énergie lumineuse rayonnée par le Soleil fait que $I(r)$ est inversement proportionnelle à r^2 , soit :

$$I(r) r^2 = I_T d^2 \Rightarrow I(r) = I_T \frac{d^2}{r^2} \quad (8)$$

Par ailleurs, si v est la vitesse de translation de la Terre sur son orbite (repère de COPERNIC), le mouvement circulaire uniforme implique que :

$$\mathcal{G} \frac{M_S}{d^2} = \frac{v^2}{d} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{G} M_S = dv^2,$$

$$\text{soit :} \quad \mathcal{G} M_S = \frac{4\pi^2}{T^2} d^3. \quad (9)$$

En utilisant (7), (8), (9), on trouve aisément :

$$R_m = \frac{3}{16} \frac{I_T T^2}{\pi^2 d \mu c}$$

Application numérique :

$R_m \simeq 0,3 \mu\text{m}$. Il s'agit donc de poussières dont les dimensions sont de l'ordre de quelques dixièmes de micromètre.

II.3. c) On peut, dans le cas d'une plaque, effectuer le calcul exact de l'épaisseur minimale. En fait, l'ordre de grandeur est évidemment le même que celui de R_m , car une plaque peut être considérée comme un agglomérat de petits éléments. Il est difficile de réaliser des voiles solaires qui doivent à la fois avoir une épaisseur très faible et des qualités mécaniques suffisantes.

II.4. a) Les équations de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} MV^2 + E = \frac{1}{2} MV'^2 + E' \\ \frac{E}{c} + MV = MV' - \frac{E'}{c} \end{array} \right.$$

II.4. b) On en déduit, en éliminant V' :

$$E - E' = (E + E') \left(\frac{V}{c} + \frac{E + E'}{2Mc^2} \right). \quad (10)$$

On note que $E' < E$ donc $\frac{E + E'}{2Mc^2} < \frac{E}{Mc^2}$ et pour négliger

le terme $\frac{E + E'}{2Mc^2}$, il suffit que $\frac{V}{c} \gg \frac{E}{Mc^2}$ soit $E \ll \frac{V}{c} Mc^2$.

On se convaincra facilement que cette condition est toujours satisfaite !

Dans cette approximation, on a :

$$\frac{E - E'}{E + E'} \approx \beta \quad \text{soit} \quad E' = E \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (11)$$

d'où :

$$f(\beta) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

II.4.c) *Bilan photonique.* Soit n le nombre de photons par unité de volume dans le faisceau incident et n' la grandeur analogue dans le faisceau réfléchi.

Raisonnons sur le cylindre de section droite unité limité par les protons 1 et 2 du miroir aux dates respectives t et $t + dt$, donc de longueur $V dt$ (fig. 2).

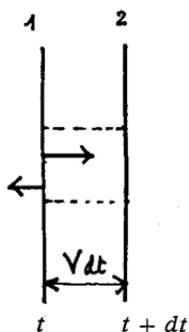


Fig. 2

Le nombre de photons entrant en 1 dans le cylindre dans l'intervalle de temps dt en $n c dt$; de même, le nombre de photons réfléchis sortant en 1 du cylindre est $n' c dt$. Au total, l'échange de photons à travers la section unité en 1 dans l'intervalle de temps dt est $(n - n') c dt$. On peut s'étonner *a priori* que $n' \neq n$; en fait, cela est nécessaire si l'on veut conserver le nombre des photons. En effet, il est obligé que $n > n'$, car le nombre $(n - n') c dt$ correspond au nombre de photons qui doivent peupler l'espace libéré par le miroir dans son mouvement. Ce nombre de photons est égal à $(n + n') V dt$ (photons incidents et réfléchis), d'où l'égalité qui traduit le bilan photonique :

$$(n - n') c dt = (n + n') V dt$$

soit :

$$n' = n \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (12)$$

Comme $I = n c E$ et $I' = n' c E'$:

$$I' = I \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \quad (13)$$

II.4. d) *Bilan énergétique.* Pour établir le bilan énergétique, le raisonnement est tout à fait analogue au précédent.

- $(I - I') dt$ représente le bilan de l'énergie traversant 1 par unité de surface pendant l'intervalle de temps dt (photons incidents et réfléchis) ;
- $\left(\frac{I}{c} + \frac{I'}{c} \right) V dt = (w + w') V dt$ est l'énergie des photons

qui occupent le volume libéré par le miroir pendant l'intervalle de temps dt .

Calculons la différence $(I - I') dt - \left(\frac{I}{c} + \frac{I'}{c} \right) V dt$;

compte tenu de (13), on obtient :

$$\begin{aligned} (I - I') dt - \left(\frac{I}{c} + \frac{I'}{c} \right) V dt &= \frac{2(1 - \beta)}{1 + \beta} \beta I dt \dots \\ &\dots = 2 \frac{I}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} V dt. \end{aligned}$$

Cette différence mesure le travail des forces de pression de radiation exercées par le faisceau sur le miroir. Ce travail doit donc être égal à $\Pi V dt$ où Π est la pression de radiation. Par comparaison, on en déduit :

$$\Pi = 2 \frac{I}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \simeq 2 \frac{I}{c}$$

au premier ordre près si $\beta \ll 1$.

En fait, l'énoncé demandait le calcul direct, *a priori*, de Π . β étant petit, on pouvait admettre qu'en première approximation, en négligeant les termes en β , le résultat obtenu au § II.2. b)

s'appliquait, soit : $\Pi = 2 \frac{I}{c}$.

Remarque.

L'expression exacte (14) : $\Pi = 2 \frac{I}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$ peut être dé-

montrée directement. En effet, la fréquence d'arrivée des photons sur le miroir est modifiée du fait du mouvement de celui-ci (effet DOPPLER). Cette fréquence d'arrivée est multipliée

par le facteur DOPPLER $\left(1 - \frac{V}{c} \right)$ [on raisonne ici dans le

repère (R)], de sorte que le nombre de photons arrivant par

unité de temps sur le miroir est $\frac{I}{E} (1 - \beta)$. Chaque photon transfère la quantité de mouvement $\frac{E + E'}{c}$ au miroir, d'où la pression de radiation :

$$\Pi = \left(\frac{E + E'}{c} \right) \frac{I}{E} (1 - \beta) = \frac{2I}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

compte tenu de (11) .

On ne demandait évidemment pas aux candidats de faire ce raisonnement.

II.5. a) Dans (R), comme $E = h\nu$ et $E' = h\nu'$, la relation (11) s'écrit aussi :

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (14)$$

ce qui montre que la fréquence ν' des photons réfléchis par le miroir mobile n'est pas égale à la fréquence ν des photons incidents.

Donc, si $\beta = 0$ (miroir immobile), on retrouve bien $\nu = \nu'$.

Plaçons-nous dans le référentiel (R_0) lié au miroir. Dans (R_0), on a donc : $\nu_0 = \nu'_0$. Si la fréquence du photon ne dépendait pas du repère, on aurait : $\nu = \nu_0$ et $\nu' = \nu'_0$ d'où $\nu = \nu'$, ce qui est contradictoire avec (14). La fréquence ν d'un photon dépend donc du référentiel d'observation.

II.5. b) On peut admettre que (R) et (R_0) jouent le même rôle l'un par rapport à l'autre et que seul, compte, le mouvement relatif (propriété de *réciprocité*). Ainsi si $\nu = \nu_0 g(\beta)$, on a aussi $\nu_0 = \nu g(-\beta)$, la propriété de réciprocité imposant que la fonction g soit la même, et β étant changé en $-\beta$ (V en $-V$). On en déduit la propriété demandée.

On a ainsi :

$$\nu' = \nu f(\beta) \quad (\text{d'après 14})$$

$$\nu = \nu_0 g(\beta) \quad \text{et} \quad \nu' = \nu_0 g(-\beta) = \frac{\nu_0}{g(\beta)}$$

$$\text{d'où :} \quad g(\beta)^2 = \frac{1}{f(\beta)} \quad \text{soit :}$$

$$g(\beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

La fréquence ν_0 mesurée par l'observateur lié au miroir est :

$$\nu_0 = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (15)$$

où ν est la fréquence de la lumière incidente dans (R).

La relation (15) exprime l'effet DOPPLER relativiste longitudinal.

Remarque.

Dans la question II.4. d), nous avons introduit un facteur DOPPLER $1 - \beta$, ce qui semble contredire le résultat (15). En fait, *essentiellement* l'effet DOPPLER est dû à ce facteur $1 - \beta$ qui traduit l'espacement temporel des signaux arrivant sur le mobile *dans le repère (R)*. Quand on passe au repère (R_0) , il faut distinguer la mécanique classique et la mécanique relativiste :

- en mécanique classique, le temps est absolu et le passage de (R) à (R_0) ne modifie pas le facteur $1 - \beta$;
- en mécanique relativiste, le passage de (R) à (R_0) introduit un facteur de « dilatation » $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, de sorte

que le facteur DOPPLER est $\gamma(1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$
conformément à (15).

Là encore, cette discussion n'était pas demandée aux candidats !

Note : La formule (15) est l'expression exacte *quel que soit* β de l'effet DOPPLER en Relativité restreinte. On peut s'étonner de ce résultat alors que l'énoncé supposait $\beta \ll 1$. Il faut montrer qu'en fait, la théorie de la Relativité restreinte donne le même résultat (en négligeant le terme en M , la masse du miroir étant supposée grande). La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'écrivent en mécanique relativiste :

$$\left\{ \begin{array}{l} E + \gamma Mc^2 = E' + \gamma' Mc^2 \\ \frac{E}{c} + \gamma MV = \gamma' MV' - \frac{E'}{c} \end{array} \right. \quad \text{avec } \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \dots \text{ et } \gamma' = \left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Un calcul élémentaire (élimination de $\gamma' V' = c \sqrt{1 - \gamma'^2}$) donne :

$$E + \gamma Mc^2 = E' + Mc^2 \sqrt{\gamma^2 + \frac{(E + E')^2}{M^2 c^4} + \frac{2(E + E')\gamma V}{Mc^3}}$$

et si M est grand :

$$E - E' \simeq (E + E') \frac{V}{c} + \frac{(E + E')^2}{2 \gamma M c^2}, \text{ expression qui rem-}$$

place (10). Si on néglige le terme en $\frac{1}{M}$, on retrouve le même

résultat que (11), mais sans supposer $\beta \ll 1$ (résultat que l'on peut prévoir *a priori* puisque dans ce nouveau calcul, seuls les termes en M sont modifiés).

On notera aussi que négliger le terme en $\frac{1}{M}$ revient à né-

gliger le recul du miroir, c'est-à-dire à supposer sa vitesse V pratiquement constante. Le référentiel (R_0) lié au miroir est ainsi effectivement galiléen, ce qui est nécessaire dans le cadre de la Relativité restreinte.

Le bilan énergétique proposé :

$$(I - I') dt = \Pi V dt + (I + I') \frac{V}{c} dt \text{ avec } \Pi = \frac{2I}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

est donc rigoureux, pour $\beta = \frac{V}{c}$ quelconque (évidemment compris entre -1 et 1).

III. Lévitiation par faisceau laser.

Cette partie du problème avait pour but d'analyser quelques expériences de lévitation par faisceau laser réalisées en particulier par ASHKIN [voir réf. (2) et (3)].

III.1. a) Par raison de symétrie, la quantité de mouvement transférée à la sphère est parallèle au faisceau incident (vecteur unitaire \vec{u}).

Un photon d'énergie E et d'incidence i transmet à la sphère, parallèlement à la direction incidente du faisceau, la quantité de mouvement $\frac{E}{c} (1 - \cos 2i) \vec{u}$.

On notera qu'un photon d'incidence $\frac{\pi}{2} - i$ transfère la quantité de mouvement $\frac{E}{c} (1 + \cos 2i) \vec{u}$. Les deux photons considérés ensemble transmettent donc la quantité de mouvement $\frac{2E}{c} \vec{u}$; il y a annulation des contributions dues à la réflexion.

Reste à montrer qu'on peut ainsi apparier deux à deux tous les photons incidents. Considérons les photons arrivant à une distance de l'axe comprise entre r et $r + dr$; ce nombre est proportionnel à la surface de la couronne circulaire d'épaisseur dr , soit $2\pi r dr = 2\pi R^2 \sin i \cos i di$ ($r = R \sin i$). Cette surface est invariante quand on change i en $\frac{\pi}{2} - i$. D'où la propriété.

Au total, la quantité de mouvement transférée par seconde à la sphère (force) est donc $\frac{I}{c} \pi R^2 \vec{u}$ comme pour une sphère noire totalement absorbante. Les photons réfléchis n'emportent au total aucune quantité de mouvement.

III.1. b) On doit avoir pour soulever la particule une intensité $I > I_m$ avec I_m telle que : $\pi R^2 \frac{I_m}{c} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu g$,

soit $I_m = \frac{4}{3} \mu g R c$. La puissance \mathfrak{F}_m correspondante est :

$$\mathfrak{F}_m = \pi R^2 I_m = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu g c.$$

Application numérique :

$$I_m \simeq 10^8 \text{ W. m}^{-2}, \quad \mathfrak{F}_m = 33,2 \text{ mW.}$$

III.1. c) Les photons absorbés transfèrent par unité de temps la quantité de mouvement $\pi R^2 \frac{I}{c} \alpha \vec{u}$ puisque α est indépendant de i . Les photons réfléchis transfèrent (d'après III.1. a) : $\pi R^2 \frac{I}{c} (1 - \alpha) \vec{u}$ d'où, au total, la quantité de mouvement transférée par unité de temps :

$$\pi R^2 \frac{I}{c} [\alpha + (1 - \alpha)] \vec{u} = \pi R^2 \frac{I}{c} \vec{u}$$

résultat quasi évident *a priori*.

III.1. d) L'élévation de température ΔT par seconde est telle que :

$$\alpha \mathfrak{F}_m = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu C \Delta T \quad \text{d'où} \quad \Delta T = g \frac{c}{C} \alpha \simeq 7 \cdot 10^4 \text{ degré}$$

ce qui interdit de réaliser des expériences de lévitation avec des particules métalliques : celles-ci seraient vaporisées.

III.2. a) Ce résultat est classique : $\delta = 2(i - r)$ et δ croît quand l'indice N augmente (pour i fixé).

$$\text{III.2. b) } \delta_M = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \text{ où l'angle limite } \lambda \text{ est tel}$$

$$\text{que } \sin \lambda = \frac{1}{N}.$$

La condition $\delta_M > \frac{\pi}{2}$ équivaut à $\lambda < \frac{\pi}{4}$ soit $N > N_0 = \sqrt{2}$.

$$\text{Si } \delta = \frac{\pi}{2}, i = i_0 = r + \frac{\pi}{4} \text{ d'où } \cotg i_0 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{N}.$$

Application numérique :

$$\text{Pour } N = 1,60, \quad i_0 = 83^\circ 22'.$$

III.2. c) Un photon d'incidence i est dévié de l'angle δ . Ce photon d'énergie E transfère à la particule, parallèlement à la direction incidente, la quantité de mouvement $\frac{E}{c} (1 - \cos \delta) \vec{u}$

à comparer à $\frac{E}{c} (1 - \cos 2i) \vec{u}$ (question III.1. a). Pour

$0 < i < \frac{\pi}{2}$, $\cos \delta > \cos 2i$, de sorte que :

$$\frac{E}{c} (1 - \cos \delta) < \frac{E}{c} (1 - \cos 2i).$$

Il s'ensuit que la quantité de mouvement totale transférée par unité de temps est inférieure à celle calculée en III.1. a) dans le cas d'une sphère totalement réfléchissante, d'où la propriété demandée :

$$\vec{F} = k(N) \pi R^2 \frac{I}{c} \vec{u} \quad \text{avec} \quad k(N) < 1.$$

Lorsque N croît, $\cos \delta$ décroît et la quantité de mouvement transférée croît, donc $k(N)$ est fonction croissante de N .

III.2. d) On vérifie facilement que \mathfrak{R} est un nombre sans dimension. La vitesse limite v_l est telle que :

$$6 \pi \eta R v_l = k \frac{I}{c} \pi R^2$$

d'où :

$$v_l = \frac{k I R}{6 \eta c}$$

La condition $\mathfrak{R} < 0,1$ se traduit par :

$$\mathfrak{R} = \frac{2 v_l R \mu'}{\eta} = \frac{2 k \mathfrak{S} \mu'}{6 \pi \eta^2 c} < 0,1$$

soit :

$$\mathfrak{S} < \frac{0,3 \pi \eta^2 c}{k \mu'} = \mathfrak{S}_M.$$

Application numérique :

$$\mathfrak{S}_M = 0,176 \text{ W} \quad v_l = 6,9 \text{ cm. s}^{-1} \simeq 7 \text{ cm. s}^{-1}.$$

Le rapport de la force exercée F au poids mg de la particule est, dans ces conditions, égal à 5,70. Le fait de négliger le poids n'est donc pas entièrement justifié.

Une application possible est le triage de particules selon leur rayon.

III.3. a) L'avantage de ce dispositif est de se libérer de la pesanteur ; en outre, on limite l'échauffement des particules (inévitables malgré le faible coefficient d'absorption) à cause de la bonne conductibilité thermique de l'eau.

III.3. b) Un photon de la région I (fig. 3) exerce sur la particule une force dont la composante perpendiculaire à \vec{u} est

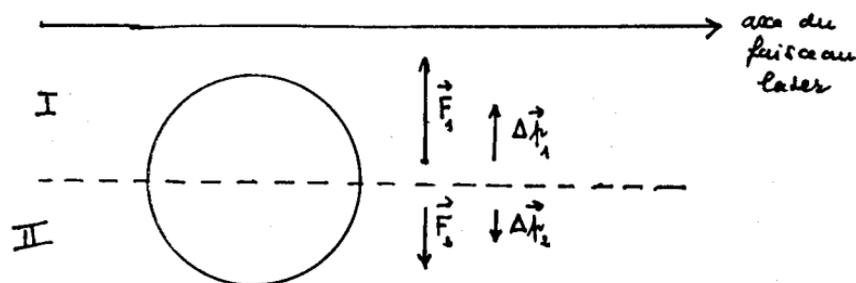


Fig. 3

dirigée vers l'axe. Pour un photon de la région II, la composante considérée est de sens contraire. Si \vec{F}_1 et \vec{F}_2 désignent les sommes correspondantes, pour tous les photons, on a $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$ car le

nombre des photons I est plus grand que le nombre des photons II. Il est facile de voir que cette dernière propriété reste vraie même si la particule est traversée par l'axe du faisceau laser.

La stabilité axiale en découle.

Si les particules étaient remplacées par des bulles d'air (milieu moins réfringent que l'eau), les forces exercées seraient changées de sens, les bulles tendant alors à s'écartier de l'axe du faisceau.

III.3. c) *Bouteille optique* : La stabilité axiale est assurée comme il vient d'être expliqué. Il y a aussi stabilité longitudinale car l'intensité de l'un des faisceaux va en augmentant lorsqu'on l'éloigne longitudinalement du plan d'intersection des faisceaux (passant par P), tandis que l'intensité de l'autre faisceau, au contraire, diminue ; la force longitudinale totale exercée par les deux faisceaux tend donc à ramener cette particule dans la région du plan d'intersection des faisceaux. Les particules sont donc piégées dans la région du point P : on a ainsi réalisé une *bouteille optique*.

IV. Pompage optique.

IV.1. a) Les énergies E_a sont négatives. Dans E_a , on comptabilise l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'interaction des électrons avec le noyau. C'est évidemment cette énergie potentielle d'interaction qui est négative (ce qui traduit un *état lié*) et sa valeur absolue est plus grande que l'énergie cinétique. L'état fondamental est celui de plus basse énergie, donc d'énergie potentielle d'interaction minimale.

IV.1. b) La conservation de la quantité de mouvement du système photon-atome s'écrit :

$$\frac{E}{c} + mv_x = mv'_x, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \quad (16)$$

et la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + E + E_{1a} \dots \\ \dots = \frac{1}{2} m (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) + E_{2a} \end{aligned} \quad (17)$$

soit plus simplement :

$$\frac{1}{2} mv_x^2 + E + E_{1a} = \frac{1}{2} mv_x'^2 + E_{2a} \quad (18)$$

compte tenu de (16).

En éliminant v'_x entre (16) et (18) :

$$\Delta E_a = E_{2a} - E_{1a} = E \left(1 - \frac{v_x}{c} - \frac{E}{2mc^2} \right) \quad (19)$$

Application numérique :

$$v_x \approx \sqrt{\frac{RT}{A}} = 3,3 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}; \text{ le terme } \frac{v_x}{c} \approx 10^{-6}.$$

En fait, ΔE_a est très voisin de E ; le terme de recul :

$$\frac{E}{2mc^2} \approx \frac{\Delta E_a}{2mc^2} \approx \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \times 6 \cdot 10^{23}}{2 \times 23 \cdot 10^{-3} \times 9 \cdot 10^{16}} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ tout à fait négligeable ici.}$$

On a donc : $\Delta E_a \approx E \left(1 - \frac{v_x}{c} \right)$ et dans une approximation moins bonne : $\Delta E_a \approx E$.

La variation Δv_x donnée par (17) vaut : $\Delta v_x = \frac{E}{mc} \approx \frac{\Delta E_a}{mc}$,

d'où $\frac{\Delta v_x}{v_x} \approx 10^{-4}$.

Remarque.

La variation d'énergie cinétique de l'atome est, d'après (17) :

$$\Delta E_{cin} = E - \Delta E_a = E \left(\frac{v_x}{c} + \frac{E}{2mc^2} \right) \approx E \frac{v_x}{c}$$

donc très faible devant E .

IV.1.c) Le facteur $1 - \frac{v_x}{c}$ dans (19) correspond à l'effet DOPPLER : un observateur lié à l'atome voit le photon incident avec l'énergie $E \left(1 - \frac{v_x}{c} \right)$.

L'agitation thermique des atomes est gênante puisque la condition d'absorption dépend de v_x donc ne peut être réalisée, sauf exception, car l'écart énergétique correspondant est beaucoup plus grand que celui dû à la largeur naturelle des raies atomiques (réf. 6). Cela explique l'intérêt pour les expériences assez récentes consistant en l'absorption par un même atome de deux photons de quantités de mouvement opposées. Dans ce cas, la conservation de la quantité de mouvement implique que

la vitesse v de l'atome reste inchangée après cette double absorption. L'équation de conservation s'écrit alors simplement :

$$\Delta E_a = 2 E$$

rigoureusement, la vitesse v_x ayant disparu de cette égalité.

Le principe de l'absorption à deux photons qui *élimine ainsi l'effet Doppler* a été suggéré indépendamment par VASILENKO, CHEBOTAIEV et SHISHAEV et par CAGNAC. Cette méthode est précieuse en spectroscopie atomique pour étudier par exemple les structures fines et hyperfines (réf. 6).

IV.1. d) Le calcul est le même qu'en IV.1. a). Il suffit de changer v_x en $-v'_x$. On trouve ainsi : $E' = \frac{\Delta E_a}{1 + \frac{v'_x}{c}}$ et

$$\Delta v'_x = -\frac{\Delta E_a}{mc}, \Delta v'_y = \Delta v'_z = 0.$$

IV.2. a) On écrit que le nombre moyen de photons absorbés pendant la durée t est égal au nombre moyen de photons émis par émission stimulée et spontanée pendant cette même durée.

Le nombre de photons absorbés est : $bI(t - t_{exc})$ puisque un atome ne peut absorber que s'il n'est pas excité.

Le nombre de photons émis est, compte tenu des deux processus : $(a + bI)t_{exc}$. On en déduit :

$$\frac{t_{exc}}{t} = \frac{bI}{a + 2bI}. \quad (20)$$

Le nombre de photons absorbés en moyenne par unité de temps par un atome vaut ainsi :

$$bI \frac{(t - t_{exc})}{t} = (a + bI) \frac{t_{exc}}{t} = \frac{bI(a + bI)}{a + 2bI}. \quad (21)$$

Remarque.

L'énoncé manquait à cet égard de clarté (*mea culpa*). bI représente le nombre moyen de photons absorbables par unité de temps, *compte non tenu du fait que si l'atome est excité, il*

ne peut absorber durant cette excitation. Le rapport $\frac{a + bI}{a + 2bI}$

tient compte de ce fait.

IV.2. b) L'émission spontanée n'intervient pas en moyenne dans le bilan de quantité de mouvement puisque toutes les directions d'émission d'un photon sont également probables.

L'absorption d'un photon transfère à l'atome la quantité de mouvement $\frac{E}{c} \vec{u} \simeq \frac{\Delta E_a}{c} \vec{u}$ (en négligeant le facteur DOPPLER $1 - \frac{v_x}{c}$).

L'émission d'un photon dans la direction \vec{u} (émission stimulée) transfère à l'atome la quantité de mouvement $-\frac{\Delta E_a}{c} \vec{u}$. Mais en moyenne pour 1 photon absorbé, il n'y a qu'une fraction $\frac{bI}{a + bI}$ correspondant à l'émission d'un photon stimulé.

La quantité de mouvement transférée à un atome en moyenne par photon absorbé est donc égale à :

$$\Delta \vec{p} = \frac{\Delta E_a}{c} \left(1 - \frac{bI}{a + bI} \right) \vec{u} = \frac{\Delta E_a}{c} \frac{a}{a + bI} \vec{u}$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire de la direction du photon incident.

IV.2.c) La force moyenne \vec{F}_m s'exerçant sur un atome est égale à la quantité de mouvement transférée par unité de temps, d'où :

$$\vec{F}_m = \Delta \vec{p} \times \frac{bI(a + bI)}{a + 2bI} = \frac{\Delta E_a}{c} \frac{a b I}{a + 2bI} \vec{u}$$

soit :

$$\vec{F}_m = f \frac{\Delta E_a}{c} \vec{u} \quad \text{avec} \quad f = \frac{a b I}{a + 2bI}$$

Il est normal que $f = 0$ si a était nul, car c'est finalement l'émission spontanée qui est responsable d'un transfert de quantité de mouvement à l'atome (dans le bilan total).

S'il n'y avait pas d'émission stimulée, la quantité de mouvement transférée à un atome pour chaque photon absorbé serait

$\Delta \vec{p} = \frac{\Delta E_a}{c} \vec{u}$, d'où pour f photons absorbés par unité de temps :

$$\vec{F}_m = f \Delta \vec{p} = f \frac{\Delta E_a}{c} \vec{u}$$

Lorsque I devient très grand :

$$\vec{F}_m \rightarrow \frac{a}{2} \frac{\Delta E_a}{c} \vec{u} = \frac{\Delta E_a}{2c\tau} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{a}$$

τ mesure la durée de vie moyenne de l'état excité de l'atome si seule existait l'émission spontanée (absence de rayonnement incident).

Application numérique :

$$\text{Pour } \tau = 10^{-8} \text{ s, } \Delta E_a = 2,05 \text{ eV, } f = \frac{a}{\text{limite } 2} = \frac{1}{2\tau} = 5 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1},$$

$$F_m = \frac{\Delta E_a}{2c\tau} = \frac{2,05 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6 \cdot 10^8 \times 10^{-8}} \simeq 5,5 \cdot 10^{-20} \text{ N.}$$

$$\gamma_m = \frac{F_m \vartheta \mathcal{L}}{A} = \frac{5,5 \cdot 10^{-20} \times 6 \cdot 10^{23}}{2,3 \cdot 10^{-2}} \simeq 1,5 \cdot 10^6 \text{ m. s}^{-2} \text{ environ.}$$

IV.2. d) Au cours des absorptions successives, la vitesse v des atomes augmente. Le terme DOPPLER $\left(1 - \frac{v_x}{c}\right)$, négligé

dans les calculs précédents intervient et la condition de résonance (19) n'est plus exactement satisfaite : la fréquence du faisceau laser n'est plus accordée et l'absorption est gênée ou même supprimée.

L'utilisation de lasers accordables à colorants, qui permettent de faire varier continûment la fréquence du faisceau laser incident (donc l'énergie E des photons incidents) dans un domaine spectral déterminé permettrait en principe de s'affranchir de cette difficulté liée à l'effet DOPPLER [réf. (7)].

IV.3. L'équilibre de la tranche de section S s'écrit :

$$S [p(x) - p(x + dx)] + F_m n(x) S dx = 0$$

où $n(x)$ est le nombre d'atomes par unité de volume dans la tranche d'abscisse x . On en déduit :

$$\frac{dp}{dx} = F_m n.$$

L'équation des gaz parfaits s'écrit : $p = n k_B T$, d'où :

$$\frac{dn}{dx} = \frac{F_m}{k_B T} n$$

dont la solution est : $n = n_0 e^{\frac{x}{L}}$ avec $L = \frac{k_B T}{F_m} = \frac{k_B T c}{f \Delta E_a}$.

On réalise ainsi un pompage optique sélectif, puisque seuls les atomes satisfaisant à la condition de résonance (19) sont refoulés par le faisceau laser.

La distribution de pression le long de la colonne est de type exponentiel de la même façon que l'atmosphère (isotherme) dans le champ de pesanteur, la force moyenne F_m remplaçant ici le poids mg .

Application numérique :

$L = 0,378$ m. Sur une longueur de 1 m, la pression augmente dans le rapport $e^{\frac{x}{L}} \simeq 14$ [réf. (2) et (4)].

H. GIÉ,

et les membres du Jury.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) B. CAGNAC et J.-C. PEBAY-PEYROULA. — *Physique atomique tome 1* (particulièrement les chapitres II, III, IV). Dunod Université.
- (2) A. ASHKIN. — *Pression de radiation et lumière laser*. Pour la Science, 1^{er} numéro hors série.
- (3) A. ASHKIN, J.-M. DZIEDZIC. — *Optical Levitation by Radiation pressure*. Applied Physics Letters, vol. 19, n° 8, pages 283-285, octobre 15, 1971.
- (4) A. ASHKIN. — *Acceleration and trapping of particles by Radiation pressure*. Physical Review Letters, vol. 24, n° 4, pages 156-159, janvier 26, 1970.
- (5) G. GUINIER. — *Photons et quantité de mouvement*. B.U.P. n° 612 (mars 1979), p. 787.
- (6) *Spectroscopie laser à très haute résolution. Spectroscopie à deux photons sans effet Doppler*. Images de la Physique 1976 (supplément du n° 24 du courrier du C.N.R.S., juin 1977).
- (7) *Les lasers à colorant*. Images de la Physique 1975 (supplément du n° 16 du courrier du C.N.R.S., juin 1975).