Encore à propos du ressort . . .

Le B.U.P. n° 167, sous la signature de M. E. GUERRA, publie la description d'une manipulation sur les ondes stationnaires où l'auteur propose en particulier de déterminer expérimentalement l'influence de la masse propre d'un ressort sur la période des oscillations. Cet article contient quelques erreurs qui rendent cette manipulation critiquable.

Après avoir rappelé des résultats bien connus (voir en particulier l'article de MM. WALTER et CROS, B.U.P. n° 531, p. 337) et souligné les raisons pour lesquelles les calculs de M. GUERRA sont fautifs, nous proposerons sommairement une méthode d'étude de cette question pour ceux de nos collègues qui souhaiteraient aborder ce problème devant leurs (bons) élèves.

Il n'est généralement pas possible de négliger la masse propre d'un ressort, que ce soit lors d'une étude statique ou d'une étude dynamique. On montrera, par exemple, qu'un ressort n'a pas la même longueur lorsqu'il est suspendu par une extrémité ou lorsqu'il est enfilé sur une baguette de verre tenue horizontalement. D'autre part, le ressort suspendu oscille avec une période non nulle en l'absence de surcharge, ce qui montre bien que la formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est fautive dans ce cas. Tout le monde sait bien que si l'on veut éviter ces difficultés devant les élèves de terminale, on utilise le ressort dans des conditions telles que sa tension soit très supérieure à son poids.

Nous rappelons les principaux résultats :

1. ETUDE STATIQUE.

On démontre et on vérifie bien expérimentalement que l'allongement du ressort sous l'action de son propre poids $m_o g$ est le même que celui que l'on observerait si l'on fixait à l'extrémité de ce ressort supposé sans masse (par exemple en plaçant le ressort horizontalement) une masse $\frac{m_o}{2}$.

2. ETUDE DYNAMIQUE.

Cette étude est beaucoup plus complexe et il est nécessaire de faire intervenir les phénomènes de propagation (voir l'article cité plus haut).

Si l'on fixe à l'extrémité d'un ressort de masse m_o et de dureté k une masse m, la pulsation ω des oscillations est donnée par la relation (qui ne tient pas compte de l'amortissement, qui joue peu d'ailleurs) :

$$\operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{m_o}{k}} = \frac{\sqrt{k m_o}}{m\omega} \qquad (1)$$

On n'a pas de solution analytique de cette équation, mais il est possible d'étudier des cas particuliers par des développements en série.

a) $\dfrac{m_o}{m} \to 0$ on trouve $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (2)

b) $m = 0$ on trouve $T = 4\sqrt{\dfrac{m_o}{k}}$ (3)

(on a dans ce cas un nœud de vibration à l'extrémité fixe et un ventre à l'extrémité mobile) :

c) $m_o \ll m$ on trouve ...

$$\ldots T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{m_o}{m} - \frac{1}{360}\left(\frac{m_o}{m}\right)\ldots\right)^2 \qquad (4)$$

(Nous profitons de cette mise au point pour signaler une erreur dans l'article de M. J. COQUELLE paru dans le B.U.P. n° 536, p. 977 : l'auteur utilise une formule approchée au 2me ordre près pour calculer le terme correctif du même ordre Nous donnons une justification de la formule (4) en appendice).

Il convient de bien noter que la formule (4) est une formule *approchée* qui n'est valable que si $\dfrac{m_o}{m} \ll 1$. En particulier, on ne peut pas extrapoler cette relation au cas où $m_o \gg m$. Si on néglige le terme du 2me ordre, la formule (4) devient :

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{m + \dfrac{m_o}{3}}{k}} \qquad (5)$$

elle est correcte à 0,4 % pour : $\dfrac{m_o}{m} = 0{,}2$.

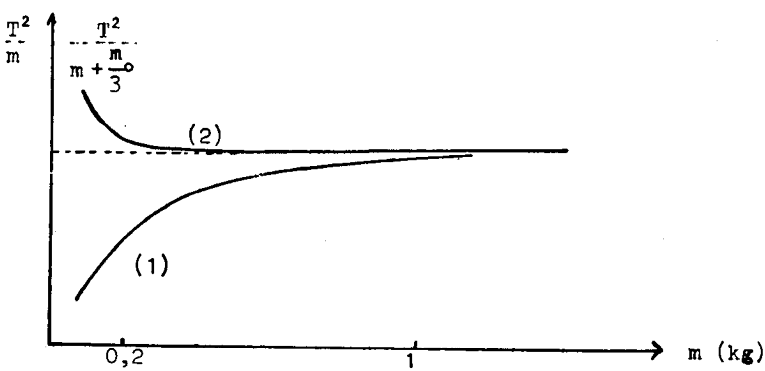
Dans le montage proposé par M. GUERRA, le problème est encore plus complexe puisque la masse m est fixée entre deux ressorts. Il n'en reste pas moins vrai qu'on ne peut pas passer de la formule notée (1) (p. 79) à la formule suivante.

Autrement dit, la quantité notée m_o n'a pas la même valeur dans les deux formules : alors qu'elle est définie dans la formule (1), elle dépend de m dans la formule suivante et la détermination de m_o à l'aide de ces deux relations est incorrecte. Selon les valeurs numériques choisies, on trouvera des résultats variables. La précision de la méthode étant médiocre, on trouvera tout ce que l'on veut trouver !

En dehors de ces considérations théoriques qui condamnent la méthode proposée, on notera que la technique expérimentale proposée est mal adaptée à l'étude des ondes stationnaires. La complication introduite a pour effet de rendre difficile une bonne observation du phénomène de résonance avec tous les enseignements qu'on peut en tirer.

Si l'on veut mettre en évidence l'influence de la masse propre d'un ressort sur la période des oscillations, on peut opérer simplement de la manière suivante :

Prendre un ressort à spires non jointives de masse voisine de 100 g et pouvant supporter des surcharges de l'ordre du kg ; mesurer la période T des oscillations par les moyens usuels (on peut facilement atteindre une précision de 1 %) pour des valeurs croissantes de la surcharge m. Tracer $\dfrac{T^2}{m} = f(m)$. On observe la courbe (1) de la figure ci-après, où $\dfrac{T^2}{m}$ n'apparaît comme



constant que lorsque la masse additionnelle est très supérieure à la masse propre du ressort.

On peut alors introduire le terme correctif $\dfrac{m_o}{3}$ en utilisant la formule (5) et tracer la courbe (2).

$$\frac{T^2}{m + \dfrac{m_o}{3}} = f\left(m + \frac{m_o}{3}\right)$$

qui permet de déterminer k.

Si l'on veut déterminer le terme correctif à partir des mesures, on choisira convenablement deux masses additionnelles m_1 et $m_2 \gg m_o$ (par exemple $m_1 = 5\,m_o$ et $m_2 = 10\,m_o$).

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + \mu}{k}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 + \mu}{k}}$$

$$\mu = \frac{m_2\,T_1^2 - m_1\,T_2^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

La précision sera médiocre, de l'ordre de 20 %.

On comparera alors μ à $\dfrac{m_o}{3}$ (nous avons trouvé $\mu = 34{,}5$ g pour $m_o = 101$ g).

Appendice.

En posant : $\alpha = \omega\sqrt{\dfrac{m_o}{k}}$, l'équation $\operatorname{tg}\omega\sqrt{\dfrac{m_o}{k}} = \dfrac{\sqrt{km_o}}{m\omega}$

s'écrit :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_o}{m}\,\frac{1}{\alpha}.$$

Si $\dfrac{m_o}{m}$ est assez faible, on peut écrire :

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\,\alpha^5}{15}.$$

D'où :

$$\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\,\alpha^5}{15} \approx \frac{m_o}{m}\,\frac{1}{\alpha} \qquad \text{(I)}$$

En 1[re] approximation : $\alpha \approx \dfrac{m_o}{m}\,\dfrac{1}{\alpha}$ soit $\alpha = \alpha_o \approx \sqrt{\dfrac{m_o}{m}}$

et :
$$\omega = \omega_o \approx \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Si l'on tient compte du terme en α^3 dans (I) :

$$\frac{\alpha^4}{3} + \alpha^2 - \frac{m_o}{m} \approx 0.$$

D'où :
$$\alpha^2 = \alpha^2{}_1 \approx \frac{m_o}{m}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{m_o}{m} + \ldots\right).$$

Prenant en considération le terme en α^5 dans (I) et en posant $\alpha^2 = \alpha^2{}_1\ (1 + \varepsilon)$ on obtient, en négligeant les termes proportionnels à $\left(\frac{m_o}{m}\right)^3$, $\varepsilon \approx -\frac{2}{15}\left(\frac{m_o}{m}\right)^2$ et ensuite :

$$\alpha^2 \approx \frac{m_o}{m}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{m_o}{m} + \frac{4}{45}\left(\frac{m_o}{m}\right)^2\right)$$

On en tire, après quelques calculs :

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{m_o}{m} - \frac{1}{360}\left(\frac{m_o}{m}\right)^2\right)$$

R. JOUANISSON, G. ZEPP,
(*U.E.R. Université de Clermont II*).