

# Le phénomène de Schuler

par Charles-Henri LEVAILLANT  
École Polytechnique

## RÉSUMÉ

*Cet article a pour but d'éveiller la curiosité du lecteur sur un phénomène bien connu des aviateurs : la dérive des plates-formes inertielles. La compréhension du phénomène est quasi-immédiate avec un bon dessin et cet article se propose de formaliser le tout, afin d'obtenir une estimation numérique de cette dérive.*

## 1. INTRODUCTION

Il existe plusieurs méthodes pour repérer la position d'un avion en vol. On peut utiliser des balises au sol *VOR* (Visual Omni Range) ou le système *GPS* (Global Positioning System) de repérage par satellite (vingt-quatre satellites couvrent en permanence la surface du globe). C'est l'idéal... du moins pour les civils. Car les militaires veulent disposer d'un système qui puisse être fiable et **autonome** en cas de guerre (une balise ou un satellite peuvent être détruits par l'ennemi) ; c'est ce que fournit dans une certaine mesure une *plate-forme inertielle*, dont nous allons décrire le fonctionnement.

## 2. LE PROBLÈME

Le dispositif installé à bord de l'avion appelé *plate-forme inertielle* mesure avec précision la grandeur  $\vec{A} - \vec{G}(M)$  où  $\vec{A}$  représente l'accélération galiléenne de l'avion et  $\vec{G}(M)$  le champ gravitationnel au niveau de l'avion. Notons qu'il existe de nombreux dispositifs «simples» permettant de calculer cette différence (l'angle que fait un pendule accroché au plafond avec la verticale, accéléromètres à ressorts...). En revanche, il est IMPOSSIBLE de calculer  $\vec{A}$  séparément : cela vient de l'identité entre masse gravitationnelle et masse inerte ; le principe fondamental s'écrit en effet :

$$m_i \vec{A} = m_g \vec{G} + \vec{F}$$

où  $m_i$  est la masse dite «inerte» qui représente l'inertie et  $m_g$  la masse gravitationnelle qui intervient dans la loi de Newton. Ces deux masses sont égales (c'est un fait «vériifié» de façon très précise), et l'on ne peut donc séparer  $\vec{A}(M)$  et  $\vec{G}(M)$ .

Connaissant  $\vec{A} - \vec{G}(M)$ , on rajoute  $\vec{G}(M)$  (on l'obtient dans une table donnant  $\vec{G}$  en fonction de l'endroit où l'on se trouve) pour avoir l'accélération et l'on en déduit la position par intégration (calculs effectués par la centrale à inertie).

Tout le problème vient de la **stabilité** de la méthode : il faut étudier les répercussions sur la position calculée d'une petite erreur de mesure  $\vec{\epsilon}$ . Dans la suite, l'erreur sur la position sera notée  $\vec{\delta M}$ .

### 3. RÉOLUTION DU PROBLÈME

Pour obtenir  $\vec{A}$ , on rajoute  $\vec{G}(M_{supposé})$  à  $(\vec{A} - \vec{G})_{mesuré}$ . On en déduit l'évolution de l'erreur sur la position :

$$\begin{aligned}\vec{\delta M} &= \vec{A}_{calculé} - \vec{A}_{réel} \\ &= \left( (\vec{A} - \vec{G})_{mesuré} + \vec{G}(M + \vec{\delta M}) \right) - \vec{A}_{réel}\end{aligned}$$

Or :

$$(\vec{A} - \vec{G})_{mesuré} = \vec{A}_{réel} - \vec{G}(M) + \vec{\epsilon}$$

où M est la position réelle de l'avion.

Donc :

$$\vec{\delta M} = \vec{G}(M + \vec{\delta M}) - \vec{G}(M) + \vec{\epsilon}$$

Ce qui se réécrit, après développement au premier ordre :

$$\vec{\delta M} = [J] \vec{\delta M} + \vec{\epsilon} \tag{1}$$

où  $[J]$  est la matrice  $3 \times 3$  suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_x}{\partial x} & \frac{\partial G_x}{\partial y} & \frac{\partial G_x}{\partial z} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} & \frac{\partial G_y}{\partial y} & \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_z}{\partial x} & \frac{\partial G_z}{\partial y} & \frac{\partial G_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

*Remarque importante* : Le champ de gravitation  $\vec{G}$  étant rotationnel nul ( $\vec{G}$  dérive d'un potentiel),  $[J]$  est symétrique.  $\vec{G}$  est de divergence nulle en un point sans matière (air vide) donc  $[J]$  est de trace nulle (équations locales, par analogie avec l'électrostatique).

#### 4. APPLICATION À UN VOL « BASSE ALTITUDE »

Pour illustrer la méthode dans un cas simple, on suppose la terre formée de couches **sphériques** et **homogènes**. Pour un point  $M$  voisin de la surface terrestre, on note  $\vec{z}$  le vecteur  $\vec{OM}$ ,  $g$  la norme de  $\vec{G}$  à la surface terrestre, ainsi que  $R$  le rayon terrestre. On construit ainsi un repère orthonormé  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dans lequel on se place pour les calculs qui suivent (cf. figure 1).

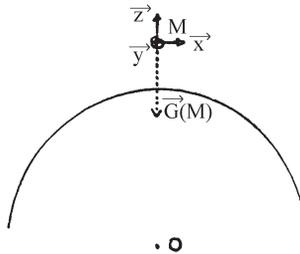


Figure 1 : Illustration schématique.

Explicitons la matrice  $[J]$  :

$G_x$  et  $G_y$  sont nuls pour  $(x, y) = (0, 0)$  et ce, quel que soit la valeur de  $z$  ; donc  $\frac{\partial G_x}{\partial z}$  et  $\frac{\partial G_y}{\partial z}$  sont nuls.

$\frac{\partial G_x}{\partial y}$  est évidemment nul.

Par symétrie, la matrice  $[J]$  est donc diagonale.

Le champ de gravitation de la Terre, qui a été supposée formée de couches sphériques homogènes, est celui d'un point matériel situé en son centre affecté de la totalité de la masse (Théorème de Gauss). La loi de Newton nous permet alors d'affirmer que :  $G_z z^2 = - g R^2$ .

Ainsi  $G_z = - \frac{R^2}{z^2} g$ , ce qui conduit à :

$$\frac{\partial G_z}{\partial z} = 2 g \frac{R^2}{z^3}$$

Pris au niveau du point  $M$ , on obtient  $J_{zz} = \frac{2g}{R}$ . Par symétrie,  $J_{xx} = J_{yy}$  ; la trace de  $[J]$  étant nulle, on en déduit la valeur de  $J_{xx}$  et  $J_{yy}$  ; on regroupe les résultats dans les lignes suivantes :

$$\begin{cases} J_{zz} = \frac{2g}{R} \\ J_{yy} = -\frac{g}{R} \\ J_{xx} = -\frac{g}{R} \end{cases}$$

*Remarque* : Les quantités  $J_{xx}$  et  $J_{yy}$  peuvent également s'obtenir en faisant un bon dessin qui fera apparaître la valeur de la projection du nouveau vecteur  $\vec{G}$  sur les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  au premier ordre (figure 2). Sur le même dessin, on constatera que  $\frac{\partial G_z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial G_z}{\partial y}$  sont nuls au premier ordre  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . L'utilisation du fait que la matrice soit symétrique et de trace nulle montre ici la puissance des équations locales du champ de gravitation.

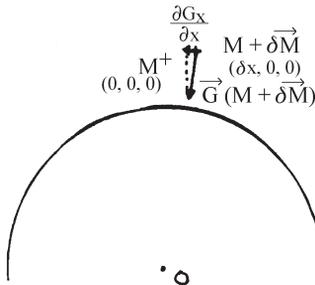


Figure 2 : Le calcul de  $J_{xx}$ .

Les équations vérifiées par  $x, y, z$  (coordonnées de  $\vec{\delta M}$ ) sont données par la projection sur les axes de l'équation (1) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{R}x + \varepsilon_x \\ \ddot{y} = -\frac{g}{R}y + \varepsilon_y \\ \ddot{z} = \frac{2g}{R}z + \varepsilon_z \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité, on résout les équations sans tenir compte de  $\varepsilon$  qui ne fait qu'apporter un décalage de l'origine. Le fait de s'être placé à basse altitude permet de considérer que les axes  $x, y$  et  $z$  tournent peu durant le vol et valide ainsi les équations ci-dessus pendant une période de temps suffisante pour pouvoir les intégrer.

On a affaire à un oscillateur harmonique de période  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$  pour les axes  $x, y$ . Il y a donc stabilité dans le plan horizontal.

En revanche, sur  $z$ , la solution est en  $\exp(t/\tau)$  avec  $\tau = \sqrt{\frac{2g}{R}}$  : instable sur la verticale.

### Application numérique

Avec  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$  et  $R = 6400 \text{ km}$ , on trouve :

$$T = 1 \text{ h } 25 \text{ min}$$

$$\tau = 9,5 \text{ min}$$

### CONCLUSION

Notre plate-forme inertielle est donc stable pour les calculs en projection sur l'horizontale. Néanmoins, l'instabilité verticale est flagrante et il reste nécessaire de la compenser en prenant soin de garder un altimètre à bord.