Application de Maple[1] à l'analyse dimensionnelle

par Eddie SAUDRAIS
Lycée des Lombards - 10000 Troyes
mél : eddie.saudrais@wanadoo.fr

RÉSUMÉ

Un article précédent utilisait Maple pour déterminer l'équation aux dimensions d'une expression, ainsi que pour travailler sur les unités dérivées. Je propose une bibliothèque Maple qui prolonge l'utilisation de Maple en analyse dimensionnelle. Basée sur le théorème Π *de Vaschy-Buckingham, elle permet de déterminer la forme générale de la loi exprimant une grandeur en fonction d'autres grandeurs.*

Rappelons-nous, c'était en 1987, Marc SERRERO s'essayait à l'anticipation [6] : *«Agencez votre logiciel de manière à le rendre interactif et portable [...] : input l,(L), input g,(L/T/T), print t,(T), et la machine vous indiquera* $t = k \cdot \sqrt{l/g}$*. Vous aurez réalisé une VRAIE calculatrice scientifique. Depuis 1977 [...], on attend un constructeur intéressé. Qui veut faire fortune ?».*

Nous sommes maintenant à l'aube de l'an 2000. Vous lancez Maple sur votre ordinateur. Vous entrez :

```
>with(anadim):
```

Puis vous vous reprenez l'exemple précédent :

```
>loi(l=longueur,g=acceleration,t=temps,t);
```

$$t = Cte \cdot \left(\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \right)$$

Ainsi, Marc SERRERO avait vu juste (pour le premier point seulement...) !

1. ***NDLR :*** La procédure d'installation décrite dans le fichier `installe.txt` ne fonctionne pas si le dossier `Windows` de l'ordinateur contient un fichier nommé `MapleV4.ini`. Dans ce cas, il faut ouvrir celui-ci et, dans la section `[Options]`, modifier la ligne `MapleLib=...` pour lui donner l'allure suivante :

```
MapleLib=c:\maplev4\physique,c:\mapleV4\lib
```

Maple peut être fort utile pour l'analyse dimensionnelle [1]. Ses possibilités ont été soulignées dans un article précédent [4] :

– tester l'homogénéité dimensionnelle d'une expression littérale ;
– donner l'unité d'une grandeur physique donnée ;
– rechercher les groupements monômes adimensionnels d'un problème.

La bibliothèque que j'ai développée automatise la troisième tâche, et permet même de prédire la forme d'une loi.

1. L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

1.1. Que permet-elle de faire ?

L'analyse dimensionnelle est le plus souvent perçue par les élèves - quand ils en perçoivent quelque chose ! - comme un critère de vérification de l'homogénéité d'une formule. On peut aller beaucoup plus loin, et prévoir la forme d'une loi entre plusieurs grandeurs physiques.

Le théorème Π de Vaschy et Buckingham permet une utilisation active, prédictive de l'analyse dimensionnelle. Je ne reprends pas les principes généraux d'analyse dimensionnelle, renvoyant le lecteur aux nombreux articles sur la question [2] [6] [7].

1.2. Le théorème Π de Vaschy et Buckingham

Toute loi physique $f(X_1, \ldots, X_n) = 0$ entre n grandeurs $X_1, \ldots, X_n$ se ramenant à r grandeurs dimensionnellement indépendantes peut être réduite à une relation $\phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}) = 0$ entre $n - r$ monômes sans dimension $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$, formés à partir des n grandeurs $X_1, \ldots, X_n$. Ce n'est que la traduction mathématique de l'indépendance de la loi $f(X_1, \ldots, X_n) = 0$ vis-à-vis des changements d'unité.

Ce théorème est utilisé en aérodynamique pour la réalisation des maquettes ; si tous les monômes sans dimensions de la maquette et du système réel sont identiques, les deux systèmes sont totalement similaires. L'étude de la maquette permettra alors de connaître le comportement du modèle.

Le théorème Π permet aussi de prévoir la forme d'une loi. On trouvera de nombreux exemples dans [7].

2. LA BIBLIOTHÈQUE

2.1. Présentation

La bibliothèque *anadim* est chargée selon la procédure habituelle :

```
>with(anadim);
```

anadim version 1.1 par Eddie Saudrais 1999
?anadim pour obtenir des informations sur ce package
[eqdim; thpi; loi]

L'aide en ligne est accessible pour chaque procédure de la bibliothèque. La commande **`eqdim(liste_grandeurs,expr)`** retourne l'équation aux dimensions de **`expr`** (ce peut être une grandeur, une expression algébrique ou une égalité). Cette commande s'inspire largement de la commande **`DimPhys`** de la bibliothèque de S. LE GOFF [4].

La commande **`thpi`** retourne les monômes sans dimensions construits à partir de la liste des grandeurs données en argument.

La commande **`loi(liste_grandeurs,variable)`** retourne l'expression générale de **`variable`** en fonction des grandeurs entrées en argument.

2.2. Exemples d'utilisation

2.2.1. Le pendule pesant

Un grand classique de l'analyse dimensionnelle. Les grandeurs intervenant dans le problème sont la longueur L du pendule, la masse m suspendue, l'angle initial α, la pesanteur g et la période des oscillations T.

Construisons les monômes adimensionnés :

```
>thpi(L=longueur,m=masse,alpha=angle,g=acceleration,T=temps);
```

$$\pi_1 = \alpha,\ \pi_2 = \frac{gT^2}{L}$$

Nous voulons la loi donnant la période des oscillations ?

```
>loi(L=longueur,m=masse,alpha=angle,g=acceleration,T=temps,T);
```

$$T = \mathrm{Cte}\left(\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}\right) f(\alpha)$$

2.2.2. Pression électrostatique

On veut la pression électrostatique p à la surface d'une sphère conductrice de rayon R, portant la charge surfacique σ. En n'oubliant pas de prendre en compte la permittivité diélectrique du vide dans la liste des grandeurs du problème, nous avons :

```
>loi(p=pression,epsilon0=_epsilon0,R=longueur,sigma=
charge_surfacique,p);
```

$$p = \mathrm{Cte}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon 0}\right)$$

2.2.3. Électricité

Comment construire un temps avec une résistance et une capacité ?

```
>loi(R=resistance,C=capacite,tau=temps,tau);
```

$$\tau = \mathrm{Cte.}\,(RC)$$

Et avec une résistance et une inductance ?

```
>loi(R=resistance,L=inductance,tau=temps,tau);
```

$$\tau = \mathrm{Cte.}\left(\frac{L}{R}\right)$$

2.2.4. Magnétisme

Soit B le champ magnétique créé par une spire de rayon R, parcourue par un courant i, à une distance r.

```
>loi(B=champ_magnetique,mu0=_mu0,R=longueur,i=intensite,
r=longueur,B);
```

$$B = Cte.\frac{\mu 0 i}{R}\, f\left(\frac{r}{R}\right)$$

Attention de ne pas appeler I l'intensité : c'est une variable protégée pour Maple !

2.3. Commentaires

Le théorème Π nous indique le nombre de monômes adimensionnés que l'on peut construire ; il n'y a pas unicité de la solution. En général, plusieurs choix sont possibles.

Le physicien fait son choix des monômes adimensionnés «au feeling», en cherchant si possible à faire apparaître des nombres sans dimensions usuels [2] [7] : nombre de Reynolds, de Prandtl, de Nusselt, etc.

Le choix de Maple dépend de l'ordre dans lequel les variables sont données en arguments, ainsi que de l'humeur du processeur[2]. Dans l'exemple précédent :

```
>thpi(B=champ_magnetique,i=intensite,mu0=_mu0,R=longueur,
r=longueur);
```

$$\pi_1 = \frac{BR}{i\mu 0},\ \pi_2 = \frac{Br}{i\mu 0}$$

```
>thpi(B=champ_magnetique,mu0=_mu0,R=longueur,i=intensite,
r=longueur);
```

$$\pi_1 = \frac{\mu 0_i}{BR},\ \pi_2 = \frac{r}{R}$$

C'est ici sans incidence sur la loi $B(i, \mu_0, R, r)$. En revanche, dans d'autre cas, la loi cherchée peut s'écrire sous plusieurs formes. Considérons le champ magnétique créé par une spire elliptique de demi-axes a et b, parcourue par un courant d'intensité i.

```
>loi(B=champ_magnétique,mu0=_mu0,a=longueur,b=longueur,r=longueur,
i=intensite,B);
```

$$B = Cte.\left(\frac{\mu 0 i}{a}\right).\ f\left(\frac{b}{a}, \frac{r}{a}\right)$$

```
>loi(B=champ_magnétique,r=longueur,mu0=_mu0,a=longueur,b=longueur,
i=intensite,B);
```

$$B = Cte.\left(\frac{\mu 0 i}{r}\right).\ f\left(\frac{b}{r}, \frac{a}{r}\right)$$

La formulation de la loi cherchée dépend alors de l'ordre dans lequel l'utilisateur entre les données.

2. Les résultats sont retournés par une commande de Maple sous forme d'un ensemble, dont l'ordre est fixé par Maple sans aucun contrôle de la part de l'utilisateur.

Annexes

RÈGLES D'UTILISATION DE LA BIBLIOTHÈQUE

J'ai tenté de rendre l'utilisation de cette bibliothèque la plus intuitive possible. Les règles de base sont :

– la nature d'une grandeur peut être précisée par sa dénomination usuelle *(longueur, temps...)*. Des «synonymes dimensionnels» peuvent être utilisés : selon le contexte, on pourra utiliser *temps* ou *periode, frequence* ou *pulsation* ;

– aucune majuscule et aucun accent ne sont utilisés dans les noms des grandeurs ;

– les dimensions de plusieurs constantes fondamentales sont connues. Le nom est le nom usuel de la constante précédé du caractère _: _c pour la vitesse de la lumière, _mu0, _epsilon0, etc.

Dans cette première version, je n'ai pas prévu la possibilité d'ajouter des données, aussi ai-je tâché d'en entrer un maximum.

THÉORÈME Π ET MATRICE DIMENSIONNELLE

On trouvera des informations détaillées sur le théorème Π dans [2][5][7]. La méthode que j'ai utilisé est inspirée de [3].

La dimension de toute grandeur physique peut s'exprimer en fonction des dimensions de sept grandeurs de base, $B_1, \ldots, B_7$. Les grandeurs de base choisies dans le système international (SI) sont : la masse *(M)*, la longueur *(L)*, le temps *(T)*, l'intensité électrique *(I)*, la température (Θ), la quantité de matière *(N)* et l'intensité lumineuse *(J)*.

La dimension d'une grandeur G s'écrit de manière générale :

$$[G] = \prod_{i=1}^{7} B_i^{a_i} \tag{1}$$

soit dans le système international :

$$[G] = M^{a_1} L^{a_2} T^{a_3} I^{a_4} \Theta^{a_5} N^{a_6} J^{a_7}$$

Soit un ensemble $X_1, \ldots, X_n$ de n grandeurs physiques. L'équation aux dimensions de chaque variable s'écrit :

$$[X_j] = \prod_{i=1}^{7} B_i^{a_{ij}} \tag{2}$$

On définit donc la matrice dimension du système :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{71} & \cdots & a_{7n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

C'est une matrice rectangle de dimension $(7 \times n)$.

Soit Π un produit des variables $X_1, \ldots, X_n$. Il s'écrit :

$$\Pi = \prod_{j=1}^{n} X_i^{\lambda_j}$$

D'après (2), on a donc l'équation aux dimensions :

$$[\Pi] = [X_1^{\lambda_1} \ldots X_n^{\lambda_n}] = \prod_{i=1}^{7} B_i^{a_{i1}\lambda 1 + \ldots + a_{in}\lambda_n} \tag{4}$$

Nous recherchons des monômes adimensionnés. L'équation aux dimensions s'écrit donc :

$$[\Pi] = 1$$

D'après (4), on a donc le système :

$$a_{i1}\lambda_1 + \ldots + a_{in}\lambda_n = 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

En introduisant le vecteur : $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

le système (5) s'écrit matriciellement : $A\lambda = 0$ (6)

Ainsi, chaque monôme adimensionné construits à partir des n variables de départ est caractérisé par un vecteur λ, solution de (6). Une base du noyau de A permet de définir un ensemble complet de monômes sans dimension.

Si r est le rang de A, la dimension du noyau de A est $n - r$. On peut donc construire $n - r$ monômes adimensionnés $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ indépendants les uns des autres (aucun de ces monômes ne peut s'écrire comme combinaison monôme des autres). Toute grandeur adimensionnée s'écrit alors de manière unique :

$$\Pi_1^{c_1} \ldots \Pi_{n-r}^{c_{n-r}}$$

La base du noyau de A pouvant se construire d'autant de manières que l'on veut, on n'a donc pas unicité des $n - r$ monômes adimensionnés.

CONCLUSION

Maple nous donne les moyens de construire une séance d'informatique axée sur l'analyse dimensionnelle. La bibliothèque de Serge LE GOFF, permet de travailler sur les changements d'unité, celle que je propose sur une utilisation active de l'analyse dimensionnelle. Certes, dans le cadre du programme, l'accent doit être porté sur la simple vérification de l'homogénéité des formules, mais l'utilisation du théorème Π permet de construire une séance d'informatique qui peut marquer certains élèves favorablement !

Dans un avenir que j'espère proche, cette bibliothèque devrait évoluer : possibilité d'ajouter des grandeurs et des constantes, possibilité de changer le nom de l'éventuelle fonction inconnue, automatisation du changement de l'ordre des données (quand le choix des monômes ne nous convient pas), traitement plus rigoureux des erreurs diverses. Elle est actuellement disponible pour MapleV4 et MapleV5.

La bibliothèque, ainsi que des exemples d'utilisation, seront disponibles sur mes pages `http://perso.wanadoo.fr/eddie.saudrais`

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-A. CAVAILLÈS : «*Manipulations d'unités et analyse dimensionnelle à l'aide de Maple*» - `http://www.infty08.ac.ma/ArtArisMap.pdf` (1996).

[2] M. CAZIN et M. KOTCHARIAN : «*Dimensionnelles*» (analyse et similitude) - Encyclopædia Universalis (1984).

[3] H. HANCHE-OLSEN : «*Buckingham's pi-theorem*» `http://www.math.ntnu.no/~hanche/notes/buckingham` (1998).

[4] S. LE GOFF : «*Applications du calcul formel l'analyse dimensionnelle*» - BUP n° 799 (1997).

[5] S. RUDOLPH : *«The pi-theorem»* - http ://www.isd.uni-stuttgart.de/~rudolph (1997).

[6] M. SERRERO : *«Critères de pertinence en physique, l'homogénéité : l'invariance newtonienne»* - BUP n° 699 (1987).

[7] J. SIVARDIÈRE : *«Utilisation de l'analyse dimensionnelle»* - BUP n° 702 (1988).