

Mécanique du yo-yo à débrayage

par Charles de IZARRA

Faculté des sciences - Site de Bourges

Université d'Orléans

Rue G. Berger - BP 4043 - 18028 Bourges Cedex

RÉSUMÉ

Cet article présente l'étude d'un yo-yo moderne pourvu d'un embrayage centrifuge permettant la roue libre. Dans un premier temps, les grandeurs mécaniques du yo-yo sont mesurées, ce qui permet de déterminer analytiquement sa vitesse en fonction de la hauteur de chute. Ensuite, on s'intéresse plus particulièrement au dispositif centrifuge constitué de ressorts de masselottes.

1. INTRODUCTION

Ayant succombé aux caprices de mes enfants qui voulaient un yo-yo, je me suis moi-même laissé prendre au jeu, et après un rapide apprentissage, un peu d'entraînement, je me suis enfin posé quelques questions sur la physique de ce jouet.

Le yo-yo dont il est question ici est un yo-yo moderne muni d'un dispositif centrifuge qui permet d'obtenir la roue libre lorsque la vitesse de rotation est assez élevée. Nous reviendrons par la suite sur ce dispositif qui sera étudié en détails dans la section 5. La référence [1] présente la physique élémentaire du yo-yo avec une très bonne description du dispositif permettant la roue libre (le *free rolling*), sans toutefois entrer dans des détails quantitatifs.

Les yo-yo modernes sont actuellement faciles à trouver, avec des prix allant d'une dizaine de francs pour les moins chers, jusqu'à une centaine de francs pour les versions «de luxe» vendus avec un livret de figures ; à titre indicatif, il existe quelques sites Internet sur lesquels on peut trouver des renseignements intéressants et précis sur les yo-yo. Les mesures présentées ici ont été faites avec un yo-yo d'une quinzaine de francs, ce qui permet d'en sacrifier un sans remords pour mesurer les caractéristiques de ses éléments constitutifs (ressorts, masses...). Par expérience, précisons qu'il est assez difficile de replacer les petits éléments d'un yo-yo démonté.

2. DESCRIPTION - NOMENCLATURE UTILISÉE

Le yo-yo utilisé dans cette étude est représenté schématiquement sur la figure 1. La ficelle est placée sur un anneau parfaitement ajusté sur le moyeu central du yo-yo. Pour que la ficelle s'enroule autour du moyeu central, une petite pointe cylindrique rétractable est sortie lorsque le yo-yo n'est pas en rotation. Le dispositif permettant la roue libre est constitué de quatre masses et de quatre ressorts identiques (ressorts A de la figure 1). Lorsque la vitesse de rotation du yo-yo atteint une certaine valeur, la force centrifuge comprime les ressorts A et le noyau central est libéré par l'action du ressort B (voir figure 1), ce qui produit un retrait de la pointe cylindrique à l'intérieur du yo-yo. La ficelle ne peut alors plus s'enrouler autour du moyeu central, et le yo-yo est en roue libre.

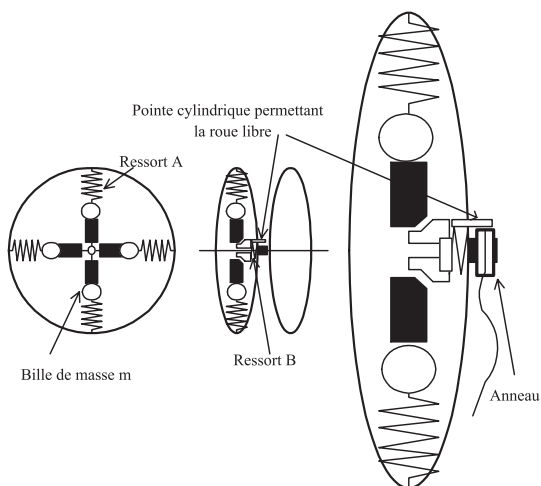


Figure 1 : Schéma du yo-yo utilisé. A droite, on a présenté un agrandissement du dessin central, avec l'anneau sur lequel est placée la ficelle.

Le yo-yo et son dispositif centrifuge sont décrits de manière légèrement différente dans la référence [1], mais le principe physique reste le même. L'étude faite dans cet article peut faire l'objet d'une expérience dans les travaux pratiques de mécanique avec une approche plus ludique que les expériences traditionnelles de chute libre, de ressorts et de mécanique des corps solides.

Nous utiliserons les notations du tableau 1 pour décrire la physique du yo-yo. Les valeurs numériques de certaines de ces quantités sont mesurées (voir la section 3).

$M = 51,3 \text{ g}$	Masse totale du yo-yo
$m = 2,3 \text{ g}$	Masse d'une bille
$r_0 = 12 \text{ mm}$	Rayon de la position de repos des billes par rapport à l'axe de rotation
$R = 24 \text{ mm}$	Rayon intérieur du yo-yo
$R_e = 28 \text{ mm}$	Rayon extérieur du yo-yo
$k = (444 \pm 14) \text{ N/m}$	Constante de rappel des ressorts
$l_0 = 10 \text{ mm}$	Longueur à vide des ressorts
$J_{tot} = (5,4 \pm 0,4) 10^{-6} \text{ kg.m}^2$	Moment d'inertie du yo-yo par rapport à l'axe de rotation
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$	Accélération de la pesanteur
$\varepsilon = 1 \text{ mm}$	Diamètre de la ficelle de masse négligeable
$r_m = 4 \text{ mm}$	Diamètre du moyeu central
$l = 1 \text{ m}$	Longueur totale de la ficelle
J	Moment d'inertie du yo-yo sans les masses m
$\dot{\phi}$	Vitesse angulaire du yo-yo

Tableau 1 : Grandeurs mécaniques du yo-yo.

3. MESURE DES GRANDEURS MÉCANIQUES DU YO-YO

Cette section est dédiée aux mesures des quantités mécaniques utiles pour décrire le mouvement du yo-yo. Les masses des différents éléments (M , m ...) ont été déterminées par pesée. On a vérifié que la ficelle et les ressorts avaient des masses négligeables devant la masse totale du yo-yo.

3.1. Moment d'inertie

Le moment d'inertie J_{tot} par rapport à l'axe de rotation a été mesuré en faisant rouler le yo-yo sans glissement sur un plan incliné (table de 1,50 m de longueur inclinée par deux cales de 2 cm de hauteur), sans vitesse initiale.

En négligeant les frottements, l'énergie mécanique totale E du yo-yo se conserve, et peut être écrite en fonction de la distance x parcourue par le yo-yo, du temps t et de l'angle α que fait le plan incliné par rapport à l'horizontale :

$$E = \frac{1}{2} \left(M + \frac{J_{tot}}{R_e^2} \right) \dot{x}^2 - M g \sin \alpha x \quad (1)$$

En dérivant l'équation (1) par rapport au temps, on obtient l'équation de mouvement du yo-yo qu'il est aisé d'intégrer deux fois pour obtenir l'équation horaire $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{M g \sin \alpha}{\left(M + \frac{J_{tot}}{R_e^2} \right)} t^2 \quad (2)$$

La relation (2) permet d'obtenir l'expression de J_{tot} :

$$J_{tot} = M R_e^2 \left(\frac{g \sin \alpha t^2}{2x(t)} - 1 \right) \quad (3)$$

Le temps t correspondant à une longueur $x = 1,5$ m a été mesuré avec un compteur - chronomètre de marque Leybold ; nous avons obtenu $t = (5,1 \pm 0,2)$ s, ce qui donne, par application de la relation (3) : $J_{tot} = (5,4 \cdot 10^{-6} \pm 0,4) \cdot 10^{-6}$ kg.m². On remarquera que la plus grande incertitude sur la mesure de J_{tot} est due au temps de réponse de l'expérimentateur.

3.2. Constantes de rappel des ressorts

Par hypothèse, les ressorts sont supposés suivre la loi de Hooke. La constante de rappel des ressorts A (voir figure 1) est mesurée en déterminant l'allongement produit par une force connue (poids de masses de 100 g à 400 g par pas de 100 g). Pour augmenter la précision de la mesure, les quatre ressorts ont été agencés en série, ce qui correspond à un ressort équivalent de constante de rappel $k/4$. L'allongement mesuré en fonction de la force appliquée a été traité par un ajustement par la méthode des moindres carrés. Nous avons obtenu $k = (444 \pm 14)$ N/m.

4. LE YO-YO EN CHUTE LIBRE

Nous pouvons faire deux approches du yo-yo en chute libre ; la première sera consacrée au yo-yo académique pour lequel la ficelle a un rayon nul et la seconde traitera d'un yo-yo réel avec une ficelle de rayon ϵ .

L'axe vertical étant orienté positivement vers le bas, et le yo-yo n'étant soumis qu'à des forces conservatives (on néglige les frottements), son énergie mécanique totale E est la somme des énergies cinétiques de translation et de rotation, et de l'énergie potentielle de pesanteur $U = -Mgz$:

$$E = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_{tot} \dot{\phi}^2 - Mgz \quad (4)$$

où $\dot{z}$ représente la vitesse du centre de masse du yo-yo et $\dot{\phi}$ sa vitesse angulaire autour du centre de masse. Dans l'écriture de l'équation (4), nous avons supposé que le moment d'inertie J_{tot} restait constant, ce qui est justifié expérimentalement car la vitesse de rotation est alors trop faible pour actionner efficacement le dispositif centrifuge. Lorsque le yo-yo est lâché sans vitesse initiale en $z = 0$, nous pouvons choisir $U = 0$ en $z = 0$, et l'énergie mécanique totale du yo-yo est alors nulle.

4.1. Le yo-yo académique

Le yo-yo académique a une ficelle de diamètre nul. On a donc la relation triviale $z = r_m \phi$ entre z et ϕ . Dans ce cas, l'expression de E devient :

$$E = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_{tot} \frac{\dot{z}^2}{r_m^2} - Mgz = 0$$

On en déduit l'expression de la vitesse du yo-yo en fonction de z :

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2Mgz}{M + \frac{J_{tot}}{r_m^2}}} \quad (5)$$

4.2. Le yo-yo réel

Le yo-yo réel possède une ficelle de diamètre ε , et l'on peut écrire la variation du rayon ρ du moyeu central (dont la valeur dépend du nombre de tours de ficelle) en fonction de l'angle ϕ sous la forme :

$$d\rho = -\frac{\varepsilon}{2\pi} d\phi \quad (6)$$

En remarquant que $\rho = R_0$ lorsque $\phi = 0$ en $z = 0$, on a :

$$\rho = R_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi} \phi \quad (7)$$

En coordonnées polaires planes (ρ , ϕ), la longueur dz de fil déroulé est donnée par $dz = \sqrt{\rho^2 (d\phi)^2 + (d\rho)^2}$, soit compte tenu des relations (6) et (7) :

$$dz = \sqrt{\left(R_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi} \phi\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} d\phi^2} \quad (8)$$

Le terme $\varepsilon^2 / 4\pi^2$ étant petit devant l'autre terme, on peut admettre avec une très bonne approximation :

$$dz = \left(R_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi} \varphi \right) d\varphi$$

expression qu'il est aisé d'intégrer :

$$z(\varphi) = R_0\varphi - \frac{\varepsilon}{4\pi} \varphi^2 \quad (9)$$

L'expression de φ en fonction de z est obtenue en cherchant les racines (en φ) de l'équation (9). En prenant la racine permettant d'avoir $\varphi = 0$ pour $z = 0$, nous avons :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(R_0 + \sqrt{R_0^2 - \frac{\varepsilon z}{\pi}} \right) \quad (10)$$

Connaissant l'expression de φ en fonction de z , on peut opérer comme précédemment, et à partir de l'expression de E , obtenir la vitesse de chute du yo-yo. On obtient :

$$\dot{z} = \frac{\sqrt{2Mgz}}{\sqrt{M + \frac{J_{tot}}{R_0^2 - \frac{\varepsilon z}{\pi}}}} \quad (11)$$

et :

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{R_0^2 - \frac{\varepsilon z}{\pi}}} \quad (12)$$

Pour $z = l$, correspondant à la longueur totale de la ficelle et un angle de rotation égal à $\varphi_{\max}$, on a les relations suivantes :

$$r_m = R_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi} \varphi_{\max}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(R_0 - \sqrt{R_0^2 - \frac{\varepsilon l}{\pi}} \right)$$

On en déduit que $r_m = \sqrt{R_0^2 - \varepsilon l / \pi}$. Lorsque $z = l$, les deux expressions de $\dot{z}$ sont identiques pour le yo-yo réel et le yo-yo académique. La relation (11) peut être écrite sous la forme :

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2Mgz}{M + \frac{J_{tot}}{r_m^2 + \frac{\varepsilon}{\pi}(l-z)}}} \quad (13)$$

Les graphes donnant l'évolution de la vitesse $\dot{z}$ et de $\dot{\phi}$ en fonction de la hauteur de chute pour notre yo-yo sont présentés sur les figures 2 et 3, respectivement. On retrouve les graphes exposés dans la référence [1]. On note que le yo-yo réel possède une vitesse de chute plus grande que le yo-yo académique, et que celle-ci passe par un maximum. Les vitesses finales sont identiques. La vitesse angulaire du yo-yo à la fin de la chute libre est de 400 rad/s (3822 tours/mn).

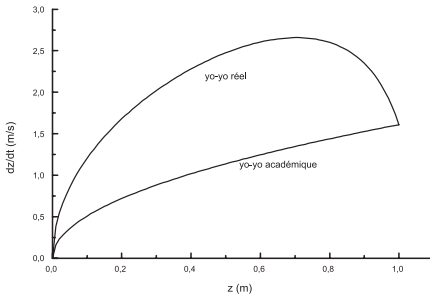


Figure 2 : Variation de la vitesse linéaire du centre de masse ($\dot{z}$) d'un yo-yo académique et d'un yo-yo réel en fonction de la hauteur de chute.

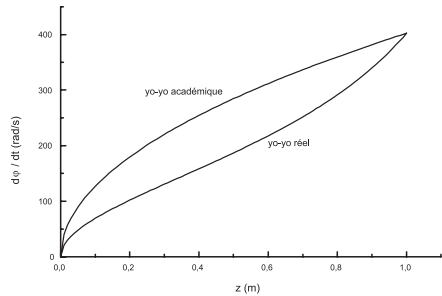


Figure 3 : Variation de la vitesse angulaire ($\dot{\phi}$) d'un yo-yo académique et d'un yo-yo réel en fonction de la hauteur de chute.

4.3. Temps de chute

Connaissant les expressions des vitesses $\dot{z}$, il est aisé de calculer les temps Δt mis par le yo-yo lâché sans vitesse initiale pour atteindre le point final de sa chute libre. Il s'agit de calculer les intégrales $\int_0^l \frac{dz}{f(z)} = \Delta t$ où les fonctions $f(z)$ sont les expressions

données par les équations (5) et (13). Dans le cas du yo-yo académique, l'intégration est immédiate et donne $\Delta t = 1,2$ s. Pour le yo-yo réel, l'intégration a été faite numériquement par une méthode des trapèzes et conduit à un temps de chute $\Delta t = 0,56$ s. Ces valeurs ont été confrontées à des mesures de temps de chute faites avec la ficelle de diamètre ε puis avec un fil très fin. Les mesures donnent un temps de chute du yo-yo acadé-

mique (fil fin) égal à 1,5 s, et un temps de chute du yo-yo réel de 0,72 s. Même si les valeurs calculées sont un peu différentes des valeurs mesurées, on trouve expérimentalement un rapport d'environ 2 pour les temps de chute, ce qui met en évidence l'importance du diamètre de la ficelle pour évaluer les temps de chute du yo-yo.

5. LE DISPOSITIF DE «FREE ROLLING»

Le dispositif permettant la roue libre lorsque la vitesse angulaire du yo-yo est assez grande peut être facilement modélisé avec une approche lagrangienne. Les notations utilisées sont celles de la figure 4.

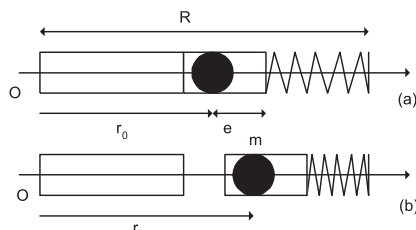


Figure 4 : Modèle mécanique du dispositif centrifuge. La figure (a) correspond au cas où la vitesse de rotation du yo-yo est nulle ou inférieure à un certain seuil, et la figure (b) au cas où la vitesse de rotation du yo-yo est élevée (voir texte).

Considérons uniquement le mouvement de rotation du yo-yo à la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ dans le référentiel du centre de masse. Si J est le moment d'inertie du yo-yo sans les quatre masses m , on peut écrire l'énergie cinétique sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + 4 \left(\frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 \right) + 4 \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) \quad (14)$$

où r représente la distance des masses m par rapport au centre de masse. Précisons que les billes de masses m sont placées dans un carénage en matière plastique de dimension $e = 6$ mm (voir figure 4). L'énergie potentielle U du système est la somme de l'énergie potentielle des ressorts, proportionnelle au carré de leur allongement et de l'énergie potentielle de pesanteur U_{poids} des masses m , cette dernière ne devant être prise en compte que lorsque le yo-yo tourne dans un plan vertical :

$$U = 4 \left(\frac{1}{2} k [(R - e - r) - l_0]^2 \right) + U_{poids} \quad (15)$$

Les masses étant petites, le terme U_{poids} peut être négligé devant l'énergie potentielle des ressorts. Le lagrangien $L = T - U$ du système est :

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + 2mr^2 + 2mr^2 \dot{\varphi}^2 - 2k [(R - e - r) - l_0]^2$$

et peut être réécrit sous la forme $L = T^* - U^*$ avec :

$$T^* = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + 2mr^2$$

$$U^* = -2mr^2 \dot{\varphi}^2 + 2k [(R - e - r) - l_0]^2 \quad (16)$$

Le système est alors réduit à un rotateur plan (c'est un pendule élastique) de moment d'inertie J soumis à l'énergie potentielle «efficace» U^* . L'examen de U^* permet de tracer la courbe d'énergie potentielle du ressort, qui est une parabole de concavité positive s'annulant pour $r = R - e - l_0$ (avec $r < r_0$ car les ressorts sont montés en compression), et la courbe d'énergie potentielle centrifuge qui est une parabole de concavité négative.

La figure 5 présente la courbe d'énergie potentielle du ressort ainsi que la quantité U^* évaluée pour plusieurs valeurs de la vitesse angulaire (de 200 rad/s à 500 rad/s). Sur la figure 5, on a également indiqué la limite inférieure r_0 correspondant à la position de butée des masses m lorsque $\dot{\varphi} = 0$.

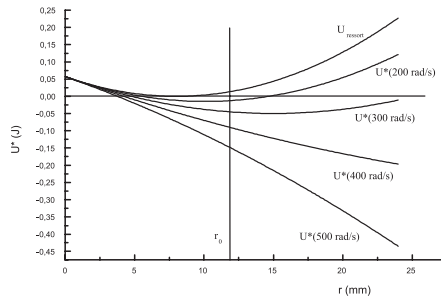


Figure 5 : Graphe donnant l'énergie potentielle des ressorts, et l'énergie potentielle efficace U^* évaluée pour diverses vitesses de rotation du yo-yo.

5.1. Analyse des courbes de potentiel

Pour que les masses m commencent à décoller de la position r_0 sous l'effet de la force centrifuge, il faut que U^* possède un minimum en r_0 . En annulant la dérivée pre-

mière de la relation (16) par rapport à r en r_0 , on obtient l'expression d'une vitesse angulaire critique $\dot{\phi}_{cr}$:

$$\dot{\phi}_{cr} = \sqrt{\frac{k [l_0 - (R - e - r_0)]}{m r_0}} \quad (17)$$

dont la valeur numérique est $\dot{\phi}_{cr} = 254$ rad/s.

Pour des vitesses de rotation supérieures à $\dot{\phi}_{cr}$, le point représentatif du système se situe au fond du puits de potentiel si celui-ci est localisé entre r_0 et R (c'est une position d'équilibre stable), soit en $r = R$. Il est clair que la compression du ressort ne pourra jamais être complète avec une réduction à zéro de sa longueur, et que le point représentatif du système ne sera jamais $r = R$.

Pour obtenir la roue libre, il faut que les masses se déplacent d'une longueur de 3 mm par rapport à la position r_0 , de façon à ce que la pointe anti roue libre puisse rentrer à l'intérieur du corps du yo-yo. En supposant que le fond du puits de potentiel est situé à $r = r_0 + 5$ mm, on obtient la vitesse critique de roue libre $\dot{\phi}_{rl} = 320$ rad/s (50 tours/s).

5.2. Mesure de la vitesse de rotation critique de roue libre $\dot{\phi}_{rl}$

Pour mesurer la vitesse critique de roue libre $\dot{\phi}_{rl}$, on a fixé l'axe du yo-yo dans le mandrin d'une perceuse munie d'un variateur de vitesse. Un fil fin fixé sur le yo-yo avec un papier adhésif vient couper une barrière lumineuse d'un capteur de compteur fréquencemètre. Un premier essai effectué avec une perceuse tournant au maximum à 2500 tr/mn n'a pas permis d'actionner le dispositif centrifuge. Nous avons utilisé une perceuse utilisée par les modélistes dont la vitesse de rotation maximum est de 10000 tr/mn. Nous avons alors pu mesurer une vitesse critique de roue libre $\dot{\phi}_{rl} = 470$ rad/s soit environ 4500 tr/mn.

Cette valeur est supérieure à la valeur prévue théoriquement, et cet écart peut être justifié par la présence de frottements solides entre les pièces mobiles du dispositif centrifuge. Toutefois, la vitesse de rotation mesurée est surprenante par sa valeur élevée.

Cette valeur est compatible avec le fait que le yo-yo lâché en chute libre (dont la vitesse de rotation maximum est de 400 rad/s) remonte immédiatement, sans que le dispositif de roue libre ne soit actionné. Les lanceurs de yo-yo le savent, et lancent leur yo-yo en lui fournissant une énergie cinétique initiale, de manière à augmenter la valeur de l'énergie mécanique totale du système. On peut vérifier sur les équations données dans la section 4 que la vitesse de rotation du yo-yo en fin de chute libre est alors augmentée. Lorsque le yo-yo est débrayé, la vitesse de rotation diminue sous l'effet des

frottements jusqu'à ce que la pointe anti roue libre ressorte. Le yo-yo convertit alors son énergie cinétique de rotation en énergie cinétique de translation : il remonte.

CONCLUSION

Cette étude menée sur un yo-yo moderne muni d'un dispositif centrifuge à ressorts se révèle être très riche, et fait intervenir de nombreux concepts mécaniques [2]. Une étude plus poussée est possible, notamment en étudiant la dissipation de l'énergie du yo-yo en chute libre sans vitesse initiale, car, dans ce cas, celui-ci ne remonte pas dans la main du lanceur.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mes enfants Grégoire, Salomon et Ambroise pour leur cours de lancer de yo-yo, ainsi que Michel PENNANEAC'H pour sa relecture critique du manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] «*La physique du yo-yo*» - Pour la Science, n° 256, février 1999.
- [2] L. LANDAU et E. LIFCHITZ : «*Mécanique*», 1982 (Mir, Moscou).