Grandeurs caractéristiques d’un système physique

par Jean SIVARDIÈRE
CEA - Département de Recherche Fondamentale
sur la Matière Condensée - MRS
38054 Grenoble Cedex 9

RÉSUMÉ

L’analyse dimensionnelle permet de construire des grandeurs caractéristiques d’un système physique. Ces grandeurs constituent des unités naturelles dans l’étude du système, elles fournissent des critères de validité des théories approximatives utilisées.

INTRODUCTION

Nous présentons dans cet article un aspect peu exploité de l’analyse dimensionnelle : la construction de grandeurs caractéristiques d’un système physique à partir des paramètres décrivant ce système.

L’analyse dimensionnelle est généralement utilisée de la manière suivante [1, 2] :

– Un système physique est décrit par N grandeurs «pertinentes» G_j : $N-1$ paramètres (constantes physiques caractérisant un objet, conditions initiales, champs extérieurs, constantes universelles) et une Nième grandeur, variable physique que l’on cherche à exprimer en fonction des $N-1$ paramètres. Ainsi dans l’étude d’un pendule, on cherche la période P en fonction de la masse m et du rayon R de la boule, de la masse m' et de la longueur l du fil, de l’accélération g de la pesanteur, de l’amplitude initiale θ_0, de la viscosité η de l’air, ... En première approximation, on ne retient que les paramètres m, l et g.

– Le théorème de Rayleigh donne le nombre de grandeurs sans dimension, ou grandeurs réduites, que l’on peut construire à partir des N grandeurs pertinentes G_j. Les équations aux dimensions de ces dernières font intervenir n grandeurs fondamentales F_k :

$$[G_j] = F_1^{\beta_{1j}} F_2^{\beta_{2j}} \dots F_n^{\beta_{rj}}$$

Soit r le rang de la matrice dimensionnelle formée par les exposants β_{ij} : le nombre des variables réduites est égal à $N-r$.

– Le théorème de Vaschy-Buckingham indique alors la forme nécessaire de la loi reliant la variable physique aux $N-1$ paramètres. En particulier s'il existe une seule grandeur réduite, c'est une constante et, par suite, la Nième grandeur est une fonction monôme des $N-1$ paramètres : la loi recherchée est obtenue à un coefficient numérique λ près qui, d'après le principe de Jeans-Einstein, est de l'ordre de grandeur de l'unité. Dans le cas du pendule, on obtient $P=\lambda\sqrt{l/g}$, la valeur exacte de λ est 2π.

L'analyse dimensionnelle permet un autre type de démarche. Cherchons à construire, à partir des $N-1$ paramètres du système considéré, une Nième grandeur ayant la dimension d'une longueur, d'un temps, d'une masse, d'une vitesse, d'une accélération, d'une force, d'une énergie, d'une action, ... Si une telle grandeur de dimension donnée existe, et si elle est unique, nous l'appelons grandeur caractéristique du système : il est alors logique d'en rechercher une interprétation physique et, le cas échéant, de la comparer à des paramètres de même dimension du système. Comme nous allons le vérifier sur des exemples variés, cette approche qualitative permet d'approfondir l'étude physique du système avant toute mise en équation, de contrôler des résultats analytiques exacts ou approchés, de définir des grandeurs de référence ou unités naturelles, d'obtenir des grandeurs réduites, d'écrire les équations décrivant les systèmes sous forme adimensionnelle, et de préciser les critères de validité de certaines approximations.

Exemple 1 : freinage d'un mouvement horizontal

Au temps $t=0$, une masse m est lancée à la vitesse v_0 sur un axe horizontal. Elle subit une force de freinage $F=-f\,v$ proportionnelle à sa vitesse v. A partir des trois paramètres m, f et v_0, on peut construire de manière unique un temps caractéristique $\tau=\frac{m}{f}$, une longueur caractéristique $d=v_0\,\tau=\frac{m\,v_0}{f}$ et une accélération caractéristique $a=\frac{v_0}{\tau}=\frac{f\,v_0}{m}$. d et τ constituent des unités naturelles de longueur et de temps dans le problème considéré.

On ne peut déduire de ce qui précède aucune information précise sur le mouvement de la masse m. On peut imaginer cependant que m aura une vitesse nulle (ou faible devant v_0) au bout d'un «temps de freinage» de l'ordre de τ, et qu'elle aura parcouru alors une «distance de freinage» de l'ordre de d. Comme on peut aisément le vérifier, la solution de l'équation du mouvement peut s'écrire en faisant intervenir τ et d :

$$v=v_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$x = d\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

La vitesse ne s'annule jamais mais devient négligeable pour $t \gg \tau$, d est la distance limite atteinte par m. Pour $t \ll \tau$, $v \approx v_0 - a\,t$: le freinage se traduit initialement par une accélération $- a$.

Si la masse subit la force de freinage $F = f\,v^2$, on peut mettre de même en évidence un temps $\tau = \dfrac{m}{f\,v_0}$ et une distance $d = \dfrac{m}{f}$ caractéristiques. Ces grandeurs apparaissent bien dans la solution analytique de l'équation du mouvement :

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{\tau}}$$

$$x = d\,\ln\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$$

Exemple 2 : chute d'un corps dans l'air

Une masse m, initialement au repos, tombe verticalement sous l'effet de la pesanteur g. Supposons que la résistance de l'air soit représentée par la force de freinage $F = f\,v^2$. A partir des paramètres m, g et f, on peut construire une vitesse unique $v_1 = \sqrt{\dfrac{m\,g}{f}}$, une longueur unique $d = \dfrac{m}{f}$ (c'est la longueur de freinage sur un axe horizontal) et un temps unique $t_1 = \dfrac{d}{v_1} = \sqrt{\dfrac{m}{f\,g}}$. On peut donc penser, ce que confirme la résolution de l'équation du mouvement, qu'il existe une vitesse limite de chute de l'ordre de v_1, et que cette vitesse limite sera atteinte au bout d'un temps de l'ordre de t_1, la hauteur de chute étant de l'ordre de d : en gros, la chute est libre pendant le temps t_1, puis elle se poursuit à 1a vitesse limite.

La mise en évidence de paramètres caractéristiques permet d'écrire l'équation du mouvement :

$$m\,\frac{d^2 z}{dt^2} = -\,mg + f\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

sous forme adimensionnelle. Introduisons l'altitude réduite $\zeta = z/d$ et le temps réduit $\tau = t\ /\ t_1$. L'équation s'écrit immédiatement :

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = -\ 1 + \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2$$

Soit h la hauteur de chute. Si on néglige le freinage, on peut définir le temps caractéristique $t_0 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ qui, à un coefficient près, doit être le temps de chute. Il est alors facile de donner une condition pour que le freinage puisse être négligé : $t_0 \ll t_1$ (ou $h \ll d$), soit $\frac{h\ f}{m} \ll 1$ (alors, à l'arrivée au sol, la force de freinage est très inférieure au poids). On peut aussi bien écrire que la vitesse d'arrivée au sol en l'absence de freinage doit être très inférieure à la vitesse limite.

Exemple 3 : oscillateur harmonique

Considérons un oscillateur harmonique tridimensionnel de masse m et de constante élastique k. A partir des paramètres m et k on peut construire le temps caractéristique $P = \sqrt{\frac{m}{k}}$ mais aucune longueur caractéristique. On s'attend donc à ce que la taille et la forme de l'orbite soient a priori quelconques (c'est-à-dire fonction des conditions initiales du mouvement) et que la période, de l'ordre de P, soit indépendante de la taille et de la forme de l'orbite.

Si l'oscillateur subit un amortissement fluide de coefficient f, on peut construire un deuxième temps caractéristique $\tau = \frac{m}{f}$ ou temps de freinage fluide. L'amortissement peut être négligé si le rapport sans dimension $\pi = \frac{P}{\tau} = \frac{f}{\sqrt{mk}}$ est très inférieur à 1 (la valeur $\pi = 1$ sépare les régimes hypo- et hypercritique).

Exemple 4 : oscillateur anharmonique

Soit un oscillateur à une dimension, d'énergie potentielle :

$$E = \frac{1}{2} k\ x^2 - \frac{1}{4}\ b\ x^4$$

A partir des paramètres *k* et *b*, on peut construire la longueur caractéristique $\sqrt{k/b}$, qui est l'unité de longueur naturelle du système. Tant que l'amplitude de l'oscillateur est petite devant cette longueur, le caractère anharmonique de l'oscillateur est négligeable.

Exemple 5 : déviation vers l'est de la chute des corps

Une masse *m* initialement au repos tombe verticalement d'une hauteur h. Sous l'influence de la force de Coriolis générée par la rotation de la Terre, de vitesse angulaire Ω, elle subit une déviation δ vers l'Est. A partir des paramètres *m*, *h* et Ω, on peut construire une accélération caractéristique unique $\Omega^2 h$ et la comparer à *g*. On s'attend à ce que δ soit négligeable si la grandeur réduite $\pi = \frac{\Omega^2 h}{g}$ est très inférieure à 1. Cette condition revient à considérer que le temps de chute est très inférieur au temps caractéristique $1/\Omega$, de l'ordre du jour.

δ / h est bien de l'ordre de π, comme le montre la formule de Gauss-Laplace (λ est la latitude du point de chute) :

$$\delta = \frac{2}{3}\,\Omega \cos \lambda \sqrt{2\,h^3/g}$$

π^2 est le rapport entre la force de Coriolis à l'arrivée au sol et le poids *mg*. La vitesse caractéristique Ωh est, à un coefficient numérique près, la vitesse vers l'Est à l'arrivée au sol [3].

Exemple 6 : mouvement cyclotron

Soit une particule de masse *m* et de charge *q* lancée horizontalement à la vitesse *v* dans une région de l'espace où règne un champ magnétique vertical homogène B. A partir des paramètres *m*, *q*, *v* et *B*, on peut construire une longueur caractéristique unique mv/qB et un temps caractéristique unique m/qB. Ces résultats suggèrent que le mouvement est périodique et se fait sur un cercle de rayon de l'ordre de mv/qB à une vitesse de l'ordre de *v*.

Exemple 7 : gaz de Van der Waals

Soit un fluide décrit par l'équation d'état de Van der Waals :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

A partir des paramètres *a*, *b* et *R*, on peut construire un volume (*b*), une pression (a/b^2) et une température (a/bR) caractéristiques. On en déduit qu'il doit exister un état particulier du fluide décrit par des paramètres ayant pour ordre de grandeur ces grandeurs caractéristiques. L'étude de l'équation d'état confirme l'existence d'un point critique (point d'inflexion à tangente horizontale de la courbe représentant l'équation d'état dans le plan p, v) de coordonnées 3b, (1/27) (a/b^2) et (8/27) (a/bR).

Exemple 8 : tension superficielle d'un fluide

Soit un liquide de masse volumique ρ et de tension superficielle A. A partir des paramètres ρ, A et g on peut construire une longueur unique $\lambda_c = \sqrt{\dfrac{A}{\rho g}}$ appelée longueur capillaire (2,7 cm dans le cas de l'eau) : c'est l'unité naturelle de longueur pour tout problème faisant intervenir le fluide lorsqu'il est placé dans le champ de la pesanteur. Si un tube vertical de rayon r plonge dans le liquide, celui-ci y monte d'une hauteur h par capillarité : on observe que h est négligeable si r est grand, la longueur capillaire est la longueur de référence. La loi de Jurin peut effectivement s'écrire sous la forme :

$$h\ r = \lambda_c{}^2$$

Considérons de même la propagation d'une onde de longueur d'onde λ à la surface du liquide. La tension superficielle ne joue aucun rôle dans le phénomène si $\lambda \gg \lambda_c$, la vitesse de propagation de l'onde (dite de gravité) est alors donnée par : $v^2 = \lambda g\ /\ 2\pi$, la masse volumique ρ du fluide n'intervient pas puisque seules jouent les forces de gravitation. Si λ devient du même ordre de grandeur que la longueur capillaire, l'énergie de surface du fluide n'est plus négligeable devant l'énergie de propagation de l'onde de gravité. Si λ est inférieure à la longueur capillaire, l'onde est dite capillaire car sa vitesse de propagation ne dépend plus de g : $v^2 = A/\rho\lambda$.

Exemple 9 : objet immergé dans un fluide

Soit un corps sphérique de rayon R se déplaçant à la vitesse v dans un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. A partir des paramètres R, ρ et η on peut construire une vitesse caractéristique, dite vitesse de Reynolds : $v_{\mathrm{Re}} = \dfrac{\eta}{\rho\ R}$. Le rapport sans dimension $\dfrac{v}{v_{\mathrm{Re}}}$ n'est autre que le nombre de Reynolds : s'il est très inférieur à l'unité, l'écoulement du fluide autour du corps est laminaire ; dans le cas contraire, l'écoulement est turbulent.

Exemple 10 : objet flottant sur un fluide

Soit un corps sphérique de rayon R se déplaçant à la vitesse v à la surface d'un fluide de masse volumique ρ. S'il y a des vagues à la surface du fluide, la pesanteur joue un rôle dans la résistance à l'avancement. A partir des paramètres R, ρ et g on peut construire une vitesse caractéristique, dite vitesse de Froude : $v_{Fr} = \sqrt{R\ g}$ (d'après un résultat cité dans l'exemple 8, c'est, à un coefficient numérique près, la vitesse de propagation d'une onde de gravité de longueur d'onde R). Le rapport sans dimension $\frac{v^2}{v_{Fr}^2}$ est le nombre de Froude.

Supposons que la tension superficielle du fluide joue un rôle. A partir des paramètres R, ρ, g et A on peut construire une vitesse caractéristique dite vitesse de Weber : $v_w = \sqrt{\frac{A}{\rho\ R}}$ (c'est, à un coefficient numérique près, la vitesse de propagation d'une onde capillaire de longueur d'onde R). Le rapport sans dimension $\frac{v^2}{v_w^2}$ est le nombre de Weber.

Exemple 11 : taille des molécules

Soit un fluide de masse volumique ρ, de chaleur latente de vaporisation Λ et de tension superficielle A. A partir des trois paramètres ρ, Λ et A de dimensions respectives M/L^3, L^2/T^2 et M/T^2, on peut construire une longueur caractéristique $l = \frac{A}{\rho\ \Lambda}$. Pour les fluides ordinaires, cette longueur est de l'ordre du nanomètre. 1 devant avoir une interprétation physique, il est tentant d'en déduire que le fluide est formé de molécules de dimension 1. Le modèle de Young-Laplace [4] montre que 1 est l'ordre de grandeur de la portée des interactions moléculaires, ou encore du rayon des molécules du fluide considéré.

Exemple 12 : taille des atomes et structure des cristaux

Soit un cristal de masse volumique ρ, d'énergie spécifique de dissociation W et de module élastique de Young Y. A partir de ces trois paramètres de dimensions respectives M/L^3, L^2/T^2 et M/LT^2, on peut construire une longueur caractéristique $l = \sqrt{\rho W / Y}$. Pour les métaux ordinaires, cette longueur est de l'ordre du nanomètre. l devant avoir une interprétation physique, il est tentant d'en déduire que le cristal est formé d'atomes ordonnés suivant un réseau de pas l.

Exemple 13 : propriétés du vide

Le vide est caractérisé par ses perméabilités électrique et magnétique de dimensions respectives :

$$\left[\frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0}\right] = \frac{ML^3}{T^2Q^2}$$

$$\left[\frac{\mu_0}{4\ \pi}\right] = \frac{ML}{Q^2}$$

A partir de ces deux paramètres, on peut construire une vitesse v et une impédance Z (de dimension $\frac{ML^2}{TQ^2}$) :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

v est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide, et Z est l'impédance du vide (377 ohms). On s'attend à ce que la quantité Z intervienne dans la théorie de la propagation des ondes électromagnétiques : effectivement l'énergie W rayonnée dans le vide par un dipôle oscillant [5] est proportionnelle à Z. Soit i l'intensité efficace du dipôle, a l'amplitude d'oscillation du dipôle et λ la longueur d'onde de l'onde émise. On a $W = R\ i^2$, où R est la résistance de rayonnement donnée par :

$$R = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ \frac{a^2}{\lambda^2}$$

Exemple 14 : évolution d'une étoile

Soit une étoile de masse M susceptible d'évoluer sous l'influence des forces de gravitation. Supposons cette évolution décrite par une théorie relativiste, faisant donc intervenir la vitesse de la lumière c. A partir des paramètres M, G et c, on peut construire une longueur unique $r = GM/c^2$. On en déduit que l'étoile peut évoluer vers un état (trou noir) dans lequel son rayon est R (rayon de Schwarzschild).

Exemple 15 : cosmologie

Les théories cosmologiques font intervenir trois constantes fondamentales : la constante de Newton G, la constante de Planck h et la vitesse de la lumière c, de dimensions respectives $\frac{L^3}{MT^2}$, $\frac{ML^2}{T}$, $\frac{L}{T}$. A partir de ces trois constantes, on peut construire une masse m, un temps t et une longueur l :

$$m = \sqrt{\frac{hc}{G}} = 0{,}02\ mg$$

$$t = \sqrt{\frac{hG}{c^5}} = 2\ 10^{-43}\ s$$

$$l = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} = 0{,}6\ 10^{-34}\ m$$

Ces trois grandeurs sont les trois unités naturelles de Planck. Leur découverte suggère qu'au début de la vie de l'univers, des particules de masse m et de dimension l ont existé pendant le temps t.

Exemple 16 : mécanique quantique

Soit un atome d'hydrogène. Sa description dans le modèle classique de Rutherford fait intervenir la constante universelle $\frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0}$ ainsi que la masse m et la charge e de l'électron. A partir de ces trois paramètres, il n'est pas possible de construire une longueur caractéristique. On en déduit que l'atome de Rutherford peut avoir une taille quelconque, comme une orbite planétaire, ce qui est manifestement contraire à l'expérience.

L'expérience indiquant que l'atome a une taille finie, il faut introduire un paramètre supplémentaire pour l'expliquer. Le modèle quantique de Bohr introduit la constante h de Planck. Il est alors possible de construire une longueur caractéristique, $l = \frac{4\ \pi\ \varepsilon_0\ h^2}{m\ e^2}$, qui est l'unité naturelle de longueur du système (premier rayon de Bohr) et donne la taille de l'atome. On peut construire aussi une vitesse caractéristique $v = \frac{e^2}{4\ \pi\ \varepsilon_0\ h}$, on sait que c'est la vitesse de l'électron sur la première orbite de Bohr. Le rapport sans dimension v/c est la constante de structure fine $\alpha = 1/137$: sa valeur indique qu'une théorie relativiste de l'atome d'hydrogène n'est pas indispensable en première approximation. De nombreuses applications de cette approche à la physique quantique sont données dans la référence [6].

CONCLUSION

La recherche systématique de paramètres caractéristiques d'un système physique est d'une grande utilité :

– Si, à partir de certains paramètres physiques du système, on peut construire de manière unique une grandeur de dimension donnée, cette grandeur constitue une unité naturelle pour le système. L'existence de cette grandeur suggère des propriétés physiques du système.

– La connaissance de grandeurs caractéristiques permet d'obtenir des critères de validité d'approximations consistant à négliger certaines grandeurs pertinentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Sivardière : *«Utilisation de l'analyse dimensionnelle»* - BUP n° 702, pp. 295-308 (1988).

[2] J. Sivardière : «La symétrie en mathématiques, physique et chimie» - chapitre 46, Presses Universitaires de Grenoble (1995).

[3] Voir A. Sommerfeld : *«Mechanics»* - Academic Press (1942).

[4] A.P. French : *«Principles of modern physics»* - John Wiley, New York (1958).

[5] J.-Ph. Pérez, R. Carles et R. Fleckinger : *«Électromagnétisme»* - Masson, Paris (1991).

[6] J.-M. Lévy-Leblond et F. Balibar : *«Quantique»* - Interéditions - Paris (1984).