

**AUTOUR DU CENTENAIRE DE LA DECOUVERTE DE L'EFFET ZEEMAN (1896),
DE L'ELECTRON ET DU THEOREME DE LARMOR (1897)**

Variations sur le Potentiel Vecteur

I

**THEOREME DE LARMOR et POTENTIEL
VECTEUR**

Bruno JECH

Lycée Jean Dautet, 17000 La Rochelle
bruno.jech@wanadoo.fr

**« Il apparaît ainsi que... l'influence du magnétisme
à quelque analogie avec une des perturbations
que présente le mouvement des planètes. »**

Hendrik Antoon Lorentz

Dans *Eléments pour une histoire du potentiel vecteur*, nous avons vu que ce champ vectoriel, mis à jour essentiellement par **William Thomson** et surtout par **James Clerk Maxwell**, fut introduit par plusieurs biais :

- Celui bien sûr selon lequel le champ magnétique **B** en dérive *via* un rotationnel :

$$\mathbf{B}(M, t) = \text{rot}\mathbf{A}(M, t).$$

- Celui lié à la conservation du flux magnétique qui conduit à exprimer ce dernier à l'aide d'une intégrale linéique grâce au théorème de Stokes.
- Celui associant le champ électromoteur de Neumann aux variations temporelles du champ magnétique :

$$\mathbf{E}(M, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(M, t).$$

- Celui de la démarche énergétique où il intervient dans l'expression de la densité volumique d'énergie potentielle électromagnétique $\rho_{\mathcal{E}_p}$ d'une distribution volumique de courants électriques \mathbf{J}_q :

$$\rho_{\mathcal{E}_p}(M, t) = -\mathbf{A}(M, t) \cdot \mathbf{J}_q(M, t).$$

- Celui enfin de la mécanique lagrangienne lui donnant l'acception d'une quantité de mouvement généralisée.

Ajoutons à cette liste l'équation aux dérivées partielles liant le potentiel vecteur aux courants qui le créent, équation formellement analogue à celle dite de Poisson et établie en particulier par Maxwell aux paragraphes 616 et 617 de son *Traité d'Electricité et de Magnétisme*¹.

Il y a pourtant un héritage que le potentiel vecteur semble avoir définitivement renié : c'est celui de ses origines mécanistes, quand il était identifié par William Thomson à un déplacement angulaire d'un hypothétique milieu élastique. Quoique... il existe un cas où le champ magnétique est directement associé à une vitesse angulaire, c'est celui de la *précession magnétique de Larmor*. Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord rappeler une découverte effectuée il y a à peine plus de cent ans et qui est fondamentale à plus d'un titre : celle de *l'effet Zeeman*. Ce fut en effet pour interpréter ce phénomène que Larmor établit un théorème « important » dont nous rappellerons la teneur. Dans un deuxième temps, nous donnerons une démonstration générale de ce théorème, démonstration mettant en lumière une relation entre le potentiel vecteur et des grandeurs ciné(ma)tiques et qui renoue ainsi, d'un certain point de vue, avec les conceptions anciennes de Thomson.

II/ DE L'EFFET ZEEMAN AU THEOREME DE LARMOR

I.1) Faraday, précurseur encore et toujours

Le 10 septembre 1822, Faraday — âgé de 31 ans — notait dans ses *Carnets de laboratoire* qu'il n'avait pu observer aucune « action dépolarisante » sur un rayon lumineux polarisé par réflexion et traversant une batterie voltaïque de Wollaston contenue dans une cuve en verre. En conséquence, « aucun arrangement particulier des particules ne pouvait être constaté par ce moyen »... ce qui situe parfaitement la préoccupation de Faraday qui s'intéressait alors, entre autres choses, à la structure ultime de la matière (cité dans [16], p. 175).

Au cours de l'été 1845 et sur la suggestion de William Thomson — de trente-trois ans son cadet — Faraday reprit ses expériences de 1822, toujours sans succès.

¹ Le physico-mathématicien français Siméon Denis Poisson (1781-1840) établit l'équation qui porte son nom en 1813 dans le cadre de l'étude des phénomènes gravitationnels et électrostatiques. Maxwell obtint quant à lui cette équation en usant du formalisme de la théorie des quaternions qui le conduisit à introduire relativement naturellement la condition $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ connue aujourd'hui sous le nom quelque peu abusif de *condition de jauge de Coulomb* ([14], vol. II, pp. 255-256).

Thomson lui suggéra également de voir comment la lumière est affectée lorsqu'elle traverse un milieu cristallin soumis à ce que nous appelons un champ électrique : là encore Faraday ne put rien observer de notable². Toutefois, poursuivant sur sa lancée, il se demanda si la lumière polarisée était ou non sensible à une action magnétique. Utilisant un verre lourd qu'il avait préparé quinze ans plus tôt, il plaça celui-ci entre les pôles d'un électroaimant aménagés d'orifices permettant de laisser passer des rayons lumineux polarisés dans le sens des lignes de champ (septembre 1845) : il observa alors une rotation de la direction de polarisation, prouvant ainsi « *que force magnétique et lumière doivent avoir des relations mutuelles* » (cité dans [16], p. 386). Etant donné que, par ses expériences, Faraday recherchait quelles caractéristiques électromagnétiques pouvaient posséder les particules constituant les milieux matériels, cette découverte le conduisit de fait à mettre très rapidement en évidence une « *nouvelle propriété magnétique de la matière* » à la fin de cette même année 1845 : le *diamagnétisme*.

Après avoir montré l'effet du magnétisme sur la propagation lumineuse, il était relativement naturel que Faraday se posât la question de savoir s'il y avait un tel effet sur la production même de la lumière. Ainsi rapporta-t-il toujours dans ses *Carnets de laboratoire* et en date du 12 mars 1862 — il a alors 70 ans : « *On disposa la flamme incolore d'un gaz entre les pôles de l'aimant et on utilisa des sels de sodium, lithium, etc... pour la colorer. Un polariseur de Nicol fut placé juste avant l'intense champ magnétique et un analyseur à l'autre extrémité de l'appareil. Ensuite on activa l'électroaimant et on le désactiva, mais pas la moindre trace d'effet ou de changement des raies dans le spectre ne fut observée, quelle que soit la position du polariseur et de l'analyseur.* » (cité dans [16], p. 479). Malgré l'absence d'effet observé, cette expérience était pourtant « *prophétique* », dénotant une nouvelle fois chez Faraday une « *puissance d'imagination et de logique presque unique dans l'histoire* » (Bauer, [1], p. 110). Car, en l'occurrence et selon toute vraisemblance, Faraday attendait un effet et, s'il ne l'observa pas, ce n'est pas qu'il n'existait point, c'est simplement que la technique d'observation spectroscopique dont il disposait alors n'était

² Trente ans plus tard, le physicien écossais John Kerr (1824 1907), un des collaborateurs de William Thomson, put enfin mettre en évidence l'anisotropie optique des milieux diélectriques polaires provoquée par un champ électrique (*effet Kerr*).

pas assez performante. Il fallut donc patienter encore trente-quatre ans pour que quelque chose put enfin être observé.

1.2) Zeeman et la démultiplication des raies spectrales

En 1896, le physicien hollandais Pieter Zeeman (1865-1943) — qui fut étudiant de Lorentz auprès de qui il soutint sa thèse de doctorat en 1893 — Pieter Zeeman donc était *privatdozent* — maître de conférence — à l'Université de Leyde. Nourri de la théorie électronique de Lorentz³ et s'inspirant directement des protocoles expérimentaux proposés en 1862 par Faraday, il reprit donc les expériences faites par ce dernier, mais en utilisant cette fois un réseau de diffraction à haut pouvoir de résolution⁴. Ainsi, en octobre de cette même année 1896, Zeeman put observer la décomposition magnétique de raies spectrales du sodium⁵ et Lorentz n'eut aucun mal à interpréter théoriquement ce qu'il est convenu aujourd'hui d'appeler l'« *effet Zeeman normal* » — à savoir le dédoublement ou le détriplement d'une raie spectrale en présence d'un champ magnétique. Du même coup, il montrait que les « *ions* » responsables de l'émission lumineuse devaient être chargés négativement et que le rapport de leur charge à leur masse avait pour ordre de grandeur 10^7 en unités C.G.S. électromagnétiques⁶ ([13], pp. 2-5)... ce qui impliquait pour ces « *ions* » une inertie considérablement plus faible que celle des ions les plus légers connus par voie électrolytique.

En ce sens la découverte de Zeeman est d'importance car elle constitue l'une des premières confirmations expérimentales de la théorie électronique. Mais — car il y eut un mais — ce même effet limita également très vite le champ d'application de cette théorie en ce qu'il se manifestait très souvent de façon *anormale* — vis-à-vis de

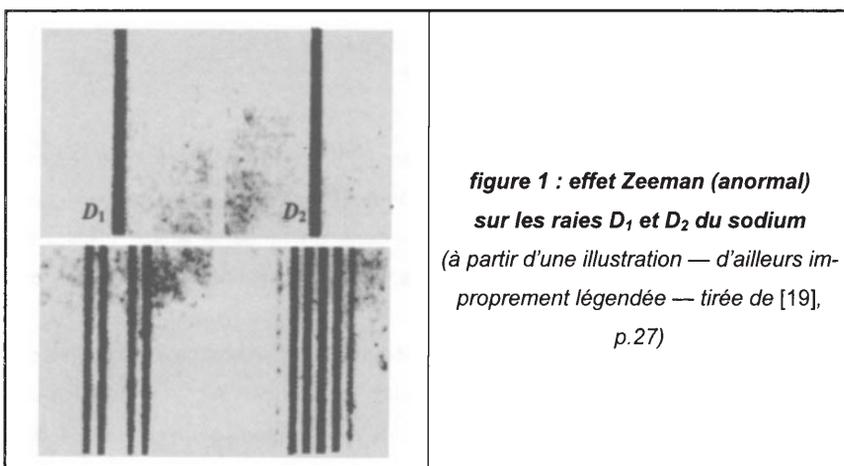
³ Ainsi, en 1900, Lorentz — qui partagea le prix Nobel de physique avec Zeeman en 1902 — nota que « *la théorie des ions a guidé M. Zeeman dans ses recherches* » ([13], p. 2). Pierre Curie écrivit quant à lui, dans le but il est vrai de minimiser l'apport de Zeeman afin de mettre en avant l'un de ses assistants pour l'attribution d'un poste universitaire : « *Zeeman a découvert un phénomène d'une importance très grande, mais il a été, semble-t-il, directement inspiré par Lorentz* » (extrait d'une lettre du 29 août 1900, citée dans [8], pp. 158-159). Lorentz affirmait toutefois en 1918 que Zeeman effectua son expérience sans lui en avoir préalablement fait part ([20], p. 85). Sur les travaux en magnéto-optique de Zeeman, voir par exemple Buchwald, [4].

⁴ Zeeman plaça une flamme au sodium dans l'entrefer d'un électroaimant de Rühmkorff produisant un champ d'environ un tesla. Pour l'analyse spectrale, il utilisa un réseau nouvellement inventé par Rowland ([21], pp. 184-187). Pour d'autres détails concernant cette expérience, voir également [9], vol. II, p. 237 ; [15], p. 45 ; [19], pp. 26-28 ; [20], pp. 83-86.

⁵ Zeeman exposa sa découverte dans l'article suivant : « *On the influence of magnetism on the nature of light emitted by a substance* », *Philosophical Magazine*, XLIII (1897), pp. 226-239.

⁶ Soit 10^{11} dans le système M.K.S.A.

la théorie : Alfred Cornu (1841-1902), S. Tolver Preston, Zeeman lui-même et bien d'autres découvrirent dès 1898 des « *types plus complexes [de décomposition]. La raie D_1 [du sodium se décomposait] en un quadruplet et la raie D_2 en un sextet* » ([22], p. 219). Or, malgré les trésors d'ingéniosité théorique que rapporta Lorentz au *Congrès International de Physique* qui se tint à Paris en 1900 ([13]), la théorie classique de l'électromagnétisme se révéla impuissante à interpréter de telles décompositions... ce qui, par voie de conséquence, contribua fortement à préparer le lit de la mécanique quantique. Aussi est-ce avec quelque raison que Zeeman pouvait s'enorgueillir de la découverte de l'effet qui porte son nom en tant qu'il constitue l'« *un des moyens les plus puissants pour découvrir le caractère des forces dans l'atome* » ([22], p. 217).



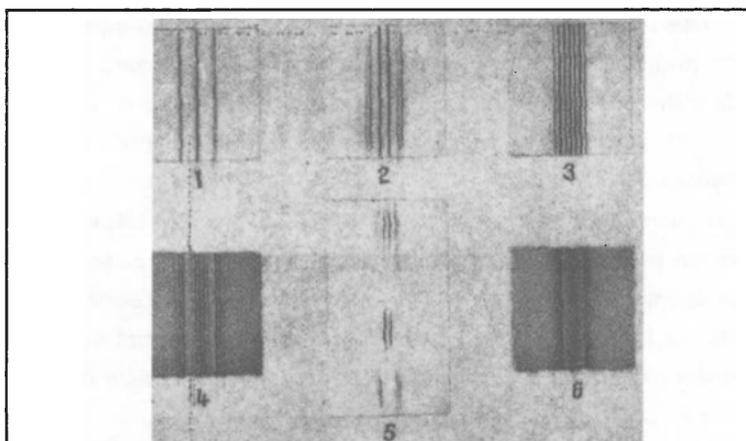


figure 2 : spectres Zeeman proposés par Zeeman et de Bruin au Congrès International d'Electricité de Paris (1932) ([22], p. 218)

I.3) Précession magnétique

En 1897, le physicien irlandais Joseph Larmor (1857-1942), participant activement aux recherches impulsées par la découverte de Zeeman, établit un théorème — que Lorentz lui-même qualifia d'« *important* » — dans un modeste article s'intitulant « Théorie de l'influence magnétique sur les spectres et rayonnements des ions en mouvement » [12].

Que dit, en substance, ce théorème ? Considérons un ion de charge e , de masse m , décrivant une orbite elliptique autour d'un centre fixe exerçant sur l'ion une force de rappel proportionnelle à la distance ; en absence de champ magnétique, cet ion oscille suivant l'une ou l'autre des directions du référentiel d'étude avec une certaine

pulsation ω_0 telle que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, k étant une constante du type *constante de rappel*.

Lorsque ce système est placé dans un champ magnétique B , il est aisé de montrer qu'il y a alors apparition de deux nouvelles pulsations autour de ω_0 , d'où l'explication de l'effet Zeeman normal. Or, et c'est ce qui constitue la prime expression du théorème de Larmor, « *l'oscillation ainsi modifiée sera ramenée à son aspect originel si l'observateur est solidaire d'un repère tournant avec la vitesse angulaire $\frac{eB}{2m}$ autour de l'axe du champ magnétique.* » ([12], p. 141). Autrement dit, si la trajectoire de l'ion

en absence de champ magnétique était une ellipse, en présence du champ c'est toujours une ellipse animée dans le référentiel d'étude d'un lent mouvement de pré-

cession de vitesse $\frac{eB}{2m}$.

Rappelons qu'en 1897 l'hypothèse atomique ne faisait pas consensus, tant s'en faut, qu'il y avait de surcroît quelque contradiction à envisager une structure interne à un atome étymologiquement insécable et que la réalité de l'électron prêtait encore à débat⁷. Aussi Larmor fit-il preuve d'une prescience certaine en énonçant son théorème. Ce fut Paul Langevin⁸ (1872-1946) qui explicita l'origine physique de la *précession de Larmor* dans la théorie du diamagnétisme qu'il proposa en 1905 : un champ électrique induit apparaît en effet lors de l'établissement du champ magnétique agissant sur l'atome, et c'est ce champ qui altère la vitesse de rotation des électrons, altération qui se conserve en régime établi ([11])⁹.

III/ GENERALISATION DU THEOREME DE LARMOR

II.1) Préambule : changement de référentiels et milieux continus

Avant de donner une démonstration générale du théorème de Larmor, nous nous proposons de réécrire les champs des vitesses et des accélérations d'entraînement d'un référentiel (\mathcal{R}') par rapport à un référentiel (\mathcal{R}) en faisant appel à la notion de *milieu continu*. En effet, ces champs peuvent être considérés comme représentant respectivement ceux d'un solide hypothétique continu et infini, totalement solidaire

⁷ Le célèbre article de Joseph John Thomson confirmant la nature corpusculaire des rayons cathodiques par la mesure du rapport de la charge à la masse des particules qui les constituent ne date que d'août 1897. L'article de Larmor dont il est question ici ne parut dans le *Philosophical Magazine* qu'en décembre 1897.

⁸ Qui suivit d'ailleurs les cours de Larmor à Cambridge en 1897 ([2], p. 45).

⁹ Dans son article, Langevin note en particulier : « On aboutit ainsi à une généralisation d'un important théorème de M. Larmor... Je tiens à insister sur ce fait que le phénomène de Zeeman est un des aspects de la modification diamagnétique. La possibilité que la propriété diamagnétique, comme l'effet Zeeman lui-même, soit une propriété générale de la matière... ressort clairement de ce qui vient d'être dit... La généralité du phénomène de Zeeman fournirait ainsi une preuve indiscutable de la généralité des phénomènes de diamagnétisme. » ([11], pp. 351-352). Notons quant à nous que si Faraday ne put, à son corps défendant, mettre en évidence l'effet Zeeman, il découvrit justement le diamagnétisme. Langevin mit en évidence le lien profond existant entre les deux phénomènes.

de $(\mathcal{R})^{10}$, solide auquel nous pouvons appliquer les outils de la méthode eulérienne usuelle en mécanique des milieux continus.

Par exemple, le champ des vitesses de ce solide — donc le champ des vitesses d'entraînement de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}) — a pour expression :

$$\mathbf{v}_{R/R}(M, t) = \mathbf{v}_R(O', t) + \Omega_{R/R}(t) \wedge \mathbf{O}'M$$

$\Omega_{R/R}(t)$ représentant la vitesse angulaire instantanée de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}) ; il est alors aisé de montrer que¹¹ :

$$\text{rot}_{R/R}(\mathbf{v}_{R/R}(M, t)) = 2\Omega_{R/R}(t)$$

Autrement dit, le rotationnel du champ des vitesses d'entraînement d'un référentiel (\mathcal{R}) par rapport à un référentiel (\mathcal{R}) est égal au double de la vitesse angulaire instantanée de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}) . En ce sens, la moitié du champ des vitesses d'entraînement de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}) constitue formellement un potentiel vecteur du champ tourbillon uniforme $\Omega_{R/R}(t)$ associé au vecteur vitesse angulaire.

Par ailleurs, s'il est vrai que l'accélération d'entraînement n'est pas la dérivée temporelle de la vitesse d'entraînement — dans l'approche lagrangienne —, le champ des accélérations $\mathbf{a}_{R/R}(M, t)$ du solide (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}) peut être considéré quant à lui comme étant la dérivée totale — ou particulière — de son champ des vitesses

soit, en utilisant l'opérateur de Stokes $\frac{D}{Dt}$, ∇ représentant l'opérateur nabla¹² :

$$\mathbf{a}_{R/R}(M, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{v}_{R/R}(M, t) = \left(\mathbf{v}_{R/R}(M, t) \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{v}_{R/R}(M, t)$$

¹⁰ Dans la suite, (\mathcal{R}) désignera indifféremment le référentiel et le solide en question. Par ailleurs, nous nous limiterons à une étude classique — non relativiste — des phénomènes.

¹¹ Nous donnerons une démonstration de ce résultat dans l'article consacré à l'extension de la notion de potentiel vecteur.

¹² A titre anecdotique, noter la tautologie suivante :

$$\mathbf{v}_{R/R}(M, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{OM}$$

Or nous savons que nous pouvons réécrire cette expression sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{R'/R}(M, t) &= \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_{R'/R}^2(M, t) \right) + \mathbf{rotv}_{R'/R}(M, t) \wedge \mathbf{v}_{R'/R}(M, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_{R'/R}(M, t) = \dots \\ &\dots = \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_{R'/R}^2(M, t) \right) + 2\boldsymbol{\Omega}_{R'/R}(t) \wedge \mathbf{v}_{R'/R}(M, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_{R'/R}(M, t) \end{aligned}$$

Ainsi, (\mathcal{R}) étant un référentiel galiléen et (\mathcal{R}') un référentiel quelconque, $\mathbf{v}_R(M, t)$ et $\mathbf{v}_{R'}(M, t)$ désignant les champs de vitesses relatives respectivement à (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') , $\mathbf{a}_R(M, t)$ et $\mathbf{a}_{R'}(M, t)$ les champs d'accélération relatives respectivement à (\mathcal{R}) et à (\mathcal{R}') , il vient, compte tenu de la loi de composition des vitesses et des accélérations :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{R'}(M, t) + \mathbf{v}_{R'/R}(M, t) &= \mathbf{v}_R(M, t) \\ \mathbf{a}_{R'}(M, t) &= \mathbf{a}_R(M, t) - \mathbf{a}_{R'/R}(M, t) - 2\boldsymbol{\Omega}_{R'/R}(t) \wedge \mathbf{v}_{R'}(M, t) \end{aligned}$$

soit en définitive :

$$\mathbf{a}_{R'}(M, t) = \mathbf{a}_R(M, t) - \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_{R'/R}^2(M, t) \right) - \mathbf{rotv}_{R'/R}(M, t) \wedge \mathbf{v}_R(M, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_{R'/R}(M, t)$$

Ce résultat nous permet par là même d'exprimer le champ de force d'inertie massive existant dans (\mathcal{R}') en termes de milieux continus.

II.2) Approche cinématique du théorème de Larmor

Usuellement, le théorème de Larmor est établi de façon élémentaire en faisant les hypothèses suivantes¹³ :

- la charge ponctuelle est soumise à une force centrale ;
- et le champ magnétique est uniforme et stationnaire.

Nous allons montrer que ce théorème présente un champ d'application somme toute beaucoup plus étendu.

¹³ Edward Mills Purcell (prix Nobel de physique 1952) donne — à son habitude — une démonstration très imagée de ce théorème ([18], pp. 372-375) ; J.P. Pérez obtient la précession de Larmor par un moyen rapide et efficace ([17], p. 442) ; R. Feynman ([6], volume 2, 34-9..11), H. Gié et J.P. Sarmant ([7], pp. 217-219) donnent une démonstration analogue à la nôtre, mais avec champ magnétique stationnaire. Voir également des démonstrations de type variationnel dans [3], pp. 31-33 et dans [10], pp. 143-145.

Considérons en effet un référentiel galiléen (\mathcal{R}) d'origine O et une charge ponctuelle q de masse m soumise à un ensemble de forces de résultante $\Sigma \mathbf{f}$. A l'instant t , la charge q se trouve en un point M de l'espace et possède une vitesse $\mathbf{v}_{q/R}(t)$ et une accélération $\mathbf{a}_{q/R}(t)$ par rapport à (\mathcal{R}). Le mouvement de cette charge dans (\mathcal{R}) est ainsi déterminé par l'équation suivante :

$$m \mathbf{a}_{q/R}(t) = \Sigma \mathbf{f}$$

Etablissons alors un champ magnétique *a priori* quelconque $\mathbf{B}(M, t)$ dérivant d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}(M, t)$. Le mouvement de la charge dans (\mathcal{R}) est maintenant déterminé par :

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}_{q/R}(t) &= \Sigma \mathbf{f} + q \left(\mathbf{v}_{q/R}(t) \wedge \mathbf{B}(M, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(M, t) \right) = \dots \\ &\dots = \Sigma \mathbf{f} - q \left(\mathbf{rot} \mathbf{A}(M, t) \wedge \mathbf{v}_{q/R}(t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(M, t) \right) \end{aligned}$$

Compte tenu du résultat obtenu au II.1), il s'ensuit que dans tout autre référentiel (\mathcal{R}') le mouvement de la charge q est régi par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}_{q/R'}(t) &= \Sigma \mathbf{f} - \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_{R'/R}^2(M, t) \right) - \dots \\ &\dots - \mathbf{rot} [q \mathbf{A}(M, t) + m \mathbf{v}_{R'/R}(M, t)] \wedge \mathbf{v}_{q/R}(t) - \frac{\partial}{\partial t} [q \mathbf{A}(M, t) + m \mathbf{v}_{R'/R}(M, t)] \end{aligned}$$

Si nous nous proposons de rechercher les référentiels dans lesquels l'équation du mouvement est la plus simple, il est manifeste que cette équation s'allège notablement dans les référentiels (\mathcal{L}) où¹⁴ :

$$\boxed{q \mathbf{A}(M, t) + m \mathbf{v}_{L/R}(M, t) = \mathbf{0}}$$

En appliquant l'opérateur rotationnel à l'expression précédente, il vient :

¹⁴ En fait le résultat précédent pourrait être généralisé en égalisant la somme des deux champs à un gradient d'un champ scalaire stationnaire $f(M)$. Ce champ stationnaire serait alors régi par une équation de Laplace compte tenu de la condition de jauge de Coulomb et du fait que la divergence

$$q\mathbf{B}(M,t) + 2m\boldsymbol{\Omega}_{L/R}(t) = \mathbf{0}$$

Il s'ensuit que l'existence des référentiels (\mathcal{L}) est liée au fait que le champ magnétique soit *uniforme* — au moins localement¹⁵. Parmi tous les référentiels (\mathcal{L}) à notre disposition, considérons enfin le référentiel (\mathcal{L}_0) en rotation pure autour d'un axe fixe dans (\mathcal{R}) passant par O , référentiel désigné dans la suite par *référentiel de Larmor*¹⁶. Dans ce référentiel, le champ des vitesses d'entraînement a pour expression :

$$\mathbf{v}_{L_0/R}(M,t) = \boldsymbol{\Omega}_{L_0/R}(t) \wedge \mathbf{OM}$$

Il s'ensuit la relation classique liant un champ magnétique uniforme au potentiel vecteur dont il dérive en jauge de Coulomb :

$$\mathbf{A}(M,t) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(t) \wedge \mathbf{OM}$$

Le point H désignant la projection de M sur l'axe de rotation du référentiel de Larmor, le mouvement de la charge q dans le référentiel de Larmor est enfin régi par :

$$m\mathbf{a}_{q/L_0}(t) = \Sigma \mathbf{f} - \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_{L_0/R}^2(M,t) \right) = \Sigma \mathbf{f} - m \boldsymbol{\Omega}_{L_0/R}^2 \mathbf{HM} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a}_{q/L_0}(t) = \frac{1}{m} \Sigma \mathbf{f} - \left(\frac{qB(t)}{2m} \right)^2 \mathbf{HM} \quad (\text{I})$$

Autrement dit, le mouvement de la charge ponctuelle dans le référentiel de Larmor est celui qu'elle avait dans le référentiel galiléen en absence de champ magnétique, ce mouvement étant perturbé par une force du type *force de rappel* dont la constante

instantanée est $\frac{(qB(t))^2}{4m}$.

d'un champ de vitesses d'entraînement est nécessairement nulle — car identifiable au champ des vitesses d'un solide.

¹⁵ Les variations temporelles du champ magnétique ne doivent donc pas être trop rapides — approximation de l'état quasi stationnaire —, ce qui justifie *a posteriori* l'utilisation de la jauge de Coulomb dans cette étude.

¹⁶ Cette restriction ne limite pas la généralité du propos qui est de trouver au moins un référentiel où l'équation du mouvement est la plus simple possible.

II.3) Commentaires

Bien que similaire aux démonstrations classiques du théorème de Larmor, celle proposée ici présente l'intérêt d'intégrer les phénomènes à l'origine du diamagnétisme — dans l'approche classique de la question. Cet aspect des choses rejoint la remarque faite par Langevin sur la relation intime entre l'effet Zeeman et le diamagnétisme.

Quoi qu'il en soit, le théorème de Larmor dans sa forme classique se déduit immédiatement du résultat précédent lorsque la force perturbatrice dans le référentiel de Larmor est négligeable devant $\Sigma \mathbf{f}$ ¹⁷. Dans ce cas, si le mouvement de la charge ponctuelle en absence de champ magnétique dans (\mathcal{R}) est caractérisé par une vitesse angulaire $\Omega_0(t)$, conformément à la loi de composition des vitesses angulaires ce mouvement dans (\mathcal{R}) en présence de champ magnétique est animé de la vitesse angulaire suivante :

$$\Omega_R(t) = \Omega_0(t) + \Omega_{L_0/R}(t) = \Omega_0(t) - \frac{q}{2m} \mathbf{B}(t)$$

Il en résulte l'observation d'un lent mouvement de précession dans le cas — usuel — où le référentiel de Larmor a une vitesse de rotation très inférieure à celle du mouvement initial de la charge ponctuelle¹⁸.

Mais l'intérêt du référentiel de Larmor ne s'arrête pas à son utilisation dans le cadre du théorème de Larmor. L'équation (I) montre en effet que l'équation du mouvement de la charge en présence d'un champ magnétique est plus simple dans ce référentiel que dans tout autre référentiel. Si par exemple la charge ponctuelle n'est initialement soumise à aucune force, son mouvement dans le référentiel de Larmor est régi par l'équation :

$$\mathbf{a}_{q/L_0}(t) = - \left(\frac{qB(t)}{2m} \right)^2 \mathbf{HM}$$

¹⁷ Toutefois, comme nous l'avons déjà fait remarquer, le champ magnétique peut désormais ne pas être stationnaire.

¹⁸ D'où la citation de Lorentz donnée en exergue ([13], p. 14). Le pendule de Foucault donne également lieu à un mouvement de précession macroscopique analogue, mouvement qui trouve précisément son origine dans les actions d'inertie de Coriolis dans un référentiel terrestre, actions dont l'expression présente des similitudes avec celle des actions magnétiques.

Quand le champ magnétique est stationnaire, cette équation est caractéristique d'un mouvement oscillatoire de pulsation $\frac{qB}{2m}$ dans un plan perpendiculaire aux lignes du champ magnétique, mouvement auquel nous pouvons associer les vitesses angulaires $\pm \frac{q}{2m} \mathbf{B}$. Par composition des vitesses angulaires, le mouvement dans le référentiel (\mathcal{R}) en présence d'un champ magnétique est alors caractérisé soit par une pulsation nulle, soit par une pulsation égale à $\frac{qB}{m}$, à savoir la *pulsation cyclotronique*, et nous retrouvons ainsi les résultats classiques relatifs au mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ magnétique.

Enfin, rappelons que ce référentiel a été obtenu à partir des relations suivantes :

$$\mathbf{A}(M, t) = -\frac{m}{q} \mathbf{v}_{LR}(M, t) \Rightarrow \mathbf{B}(M, t) = -2\frac{m}{q} \boldsymbol{\Omega}_{LR}(t)$$

Le potentiel vecteur apparaît donc comme directement lié à la vitesse du solide constitutif du référentiel de Larmor et le champ magnétique est directement proportionnel au champ tourbillon de ce solide. D'un point de vue cinétique, le potentiel vecteur peut par ailleurs être identifié à l'opposé d'une quantité de mouvement d'entraînement par unité de charge. Ces constats réjouiraient certainement William

Thomson... à ceci près que le rapport $\frac{q}{m}$ intervient dans les relations précédentes.

Si ce rapport était une constante universelle ou encore si les charges électriques étaient ces lieux singuliers du champ électromagnétiques qu'imaginait Maxwell, William Thomson pourrait espérer voir ses conceptions initiales validées. Mais l'électron, découvert il y a à peine plus de cent ans par un autre Thomson, Joseph John pour l'état civil, semble interdire cette ultime satisfaction au bon vieux Lord Kelvin.

REFLEXIONS

En 1905, Albert Einstein notait dans l'introduction de son célèbre article fondateur de la théorie de la relativité dite restreinte : « *L'introduction d'un "éther lumineux" se révélera superflue, dans la mesure où, dans la conception qui va être développée, il ne sera pas introduit d'"espace au repos absolu" doté de propriétés particulières.* » ([5], p. 31). Depuis, l'« *éther luminifère* » est relégué au rayon des vieilleries qu'affectionnent les historiens des sciences et le physicien d'aujourd'hui trouve tout naturel que cet éther n'existe pas. Il ne se pose d'ailleurs pas la question car on ne parle pas de ce qui n'existe pas. Et pourtant cette non-nécessité de l'éther proposée par Einstein en 1905¹⁹ fut l'un des aspects de sa théorie les moins bien acceptés par les physiciens d'alors. Car, somme toute, il peut paraître extraordinaire que l'éther ne semble pas exister dans la mesure où les équations électro-magnéto-mécaniques incitent au contraire à imaginer un milieu continu support des processus électromagnétiques. Prenons en effet l'expression de la densité de force électromagnétique s'exerçant sur une distribution de charges électriques en mouvement dans un référentiel (\mathcal{R}) :

$$-\rho_q(M,t) \left(\mathbf{grad}V(M,t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(M,t) + \mathbf{rot} \mathbf{A}(M,t) \wedge \mathbf{v}_R(M,t) \right)$$

Il est très tentant de rapprocher cette expression de celle de la densité de résultante dynamique d'un milieu continu de masse volumique $\rho_m(M,t)$:

$$\rho_m(M,t) \left(\mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_R^2(M,t) \right) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_R(M,t) + \mathbf{rot} \mathbf{v}_R(M,t) \wedge \mathbf{v}_R(M,t) \right)$$

Mais, une fois encore, *analogie* n'est pas *identité*²⁰. En définitive et pour paraphraser H. Hertz cité en exergue de notre premier article, la mécanique des milieux continus a servi d'échafaudage à W. Thomson et à J.C. Maxwell pour élaborer formellement la théorie de l'électromagnétisme. Mais tout édifice digne de ce nom doit être déshabillé de ses échafaudages, ne serait-ce que pour en révéler la solidité et accessoirement la splendeur. C'est ce que firent Lorentz d'abord, Einstein ensuite, et avec quel éclat !

A suivre ...

¹⁹ Notons au passage que *non-nécessité* n'implique pas *inexistence*.

SOURCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] E. Bauer, *L'électromagnétisme hier et aujourd'hui*, Albin Michel-Paris, 1949.
- [2] B. Bensaude-Vincent, *Langevin, science et vigilance*, Belin Paris, 1987.
- [3] M. Bonvalet, *Principes mathématiques de la physique, tome II : les principes variationnels*, Masson-Paris, 1993.
- [4] J.Z. Buchwald, *From Maxwell to Microphysics, Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century*, University of Chicago Press-Chicago, 1985.
- [5] A. Einstein, « Sur l'électrodynamique des corps en mouvement », in *Oeuvres choisies, tome 2*, textes choisis et présentés par F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech et J. Stachel, Seuil/CNRS-Paris, 1993, pp. 31-58.
- [6] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Le cours de physique de Feynman - traitant surtout de l'électromagnétisme et de la matière (deux volumes)*, trad. A. Crémieu et M.L. Duboin, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [7] H. Gié et J.P. Sarmant, *Electromagnétisme, volume II*, Tec et Doc Lavoisier-Paris, 1987.
- [8] A. Hurwic, *Pierre Curie*, Flammarion-Paris, 1995.
- [9] C. Jungnickel et R. Mc Commach, *Intellectual Mastery of Nature, Theoretical Physics from Ohm to Einstein Volume 2 : The Now Mighty Theoretical Physics 1870-1925*, University of Chicago press-Chicago, 1986.
- [10] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, éditions Mir-Moscou, 1970.
- [11] P. Langevin, « Magnétisme et théorie des électrons », *Annales de Chimie et de Physique*, V, 1905, p. 70 ; repris dans *Oeuvres scientifiques de Langevin*, éditions du C.N.R.S.-Paris, 1950, pp. 331-368.
- [12] J. Larmor, « On the theory of the magnetic influence on spectra ; and on the radiation from moving ions », in *Philosophical Magazine*, décembre 1897 ; in *Mathematical and Physical Papers, Vol. II*, Cambridge University Press, 1929, pp. 140-149.
- [13] H.A. Lorentz, « Théorie des phénomènes magnéto-optiques récemment découverts », in *Rapports présentés au congrès international de physique de 1900*, Gauthier Villars-Paris, 1900, pp. 1-33.
- [14] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, 2 volumes, Dover-New York, 1954 — cette édition reprend la troisième édition de 1891 du traité.
- [15] A.I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity, Emergence (1905) and Early interpretation (1905-1911)*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [16] L. Pearce Williams, *Michael Faraday*, Da Capo Press-New York, 1965.
- [17] J.P. Pérez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme, vide et milieux matériels*, Masson-Paris, 1991.
- [18] E. M. Purcell, *Berkeley-Cours de physique, volume II, électricité et magnétisme*, traduit par C. Guthmann et P. Lallemand, Armand Colin-Paris, 1973.
- [19] E. Segré, *Les physiciens modernes et leurs découvertes, des rayons X aux quarks*, Fayard-Paris, 1984.

²⁰ Si les équations présentent des similitudes formelles, il est par ailleurs relativement aisé d'établir les limites de ces similitudes, et donc de souligner les différences. A noter toutefois que notre conception actuelle des charges électriques — sources et non lieux du champ électromagnétique — y aide.

- [20]J.M. Thomas, *Michael Faraday and the Royal Institution, the genius of man and place*, A. Hilger-Bristol, 1991.
- [21]G.L. Verschuur, *Hidden attraction, the mystery and history of magnetism*, Oxford University Press-New York Oxford, 1993.
- [22]P. Zeeman et T.L. de Bruin, « Décomposition magnétique des raies spectrales (effet Zeeman) » in *Comptes-rendus du congrès international d'électricité de Paris-1932*, première section, Gauthier Villars-Paris, 1932, pp. 217-226.

NDLR : cet article est le deuxième d'une série consacrée au potentiel vecteur. Le premier article est également publié dans ce numéro. Faute de place, nous ne pouvons pas publier les suivants dans le même numéro. Ils seront publiés ultérieurement et/ou disponibles en téléchargement sur le serveur de l'UDP.