

MODELISATION DES LIAISONS MECANQUES REELLES, PAR LA DEFINITION D'UN ESPACE DES JEUX ET DES TOLERANCES, (E.J.T.).

F.SOULAS, P. LYONNET
UMR 5513 ENISE 42000 St. ETIENNE

Résumé

Dans le cadre de la construction mécanique, on a défini un ensemble de liaisons élémentaires entre solides : (la liaison ponctuelle, les liaisons linéaires rectiligne et annulaire, les liaisons : rotule, appui plan, pivot glissant, pivot, glissière, glissière hélicoïdales et encastrement).

Cet ensemble repose sur un concept de « liaisons géométriquement parfaites ». Ce modèle, utilisé en théorie des mécanismes ne rend pas toujours bien compte de la réalité. La prise en considération de la réalisation matérielle conduit à une représentation nouvelle de ces liaisons obtenue en conservant la géométrie parfaite des courbes et surfaces, mais en introduisant un jeu. Ceci débouche ici sur la définition d'un « Espace des jeux et des tolérances », dont les propriétés projectives permettent de comprendre les conditions nécessaires et suffisantes d'assemblage.

1. INTRODUCTION

En théorie des mécanismes, on fait l'hypothèse que les pièces d'un mécanisme sont assimilables à des solides indéformables et que par conséquent, il en est de même des courbes ou surfaces frontières, participant à la réalisation d'une liaison. Par ailleurs, on fait également l'hypothèse qu'en raison de leurs petites dimensions, comparées à celles des liaisons, les jeux fonctionnels sont négligeables. Les liaisons sont donc modélisées par des éléments géométriques (courbes et surfaces), assemblés sans jeu.

En fait, dans le mécanisme réel, pour des raisons évidentes de bon fonctionnement, un certain jeu fonctionnel demeure. La prise en compte de ces jeux, a pour conséquence de nécessiter une autre modélisation des liaisons. L'utilisation de cette modélisation pour l'étude des assemblages aboutit à la définition d'un espace des jeux et des tolérances, qui paraît avoir des propriétés intéressantes et conduire à des applications industrielles de première importance, en particulier le contrôle intrinsèque des pièces fabriquées, car il est clair que l'assemblabilité d'un mécanisme est indépendante des références. Ce thème est l'objet du développement ci-après.

On pressent que cet outil peut s'avérer ultérieurement efficace pour l'optimisation de la fabrication, ou pour offrir une autre approche dans la maîtrise de l'usure.

1.1 Définitions

Chaque liaison à contact surfacique, issue de la théorie des mécanismes, est définie par deux surfaces géométriques superposées. L'absence de jeu caractérise ces modèles de liaisons. Appelons les : **liaisons du premier type**.

Prolongeons ce modèle vers un modèle qui tienne compte des jeux fonctionnels, en maintenant la notion de solide et de forme géométrique parfaite pour les surfaces de liaison, et introduisons un jeu entre les surfaces conjuguées d'une même liaison.. Les plans, cylindres, sphères, surfaces hélicoïdales, superposés deviennent respectivement des plans, cylindres, sphères, surfaces hélicoïdales, distincts. Appelons ce modèle de liaison avec jeu : **liaisons du deuxième type**.

L'analyse tridimensionnelle des surfaces usinées, permet de leur substituer des éléments géométriques correspondant à des plans, cylindres, sphères, surfaces hélicoïdales. Ce sont ces éléments, appelés **éléments identifiés** et obtenus par calcul à partir des points réels mesurés, qui correspondent aux surfaces géométriques des liaisons du deuxième type.

1.2 Paramétrage du mécanisme nominal et du mécanisme tolérancé

Le mécanisme nominal ne comporte que des liaisons du premier type.. Le paramétrage relatif de chaque liaison est minimal. Ayant défini un repère global lié au carter et un paramétrage complet du mécanisme, chaque liaison occupe une position unique définie pour chaque valeur du paramétrage. A chaque liaison on associe un **repère local** qui sert de référentiel pour l'étude de la liaison tolérancée.

Le mécanisme tolérancé ne comporte que des liaisons du deuxième type. L'introduction des jeux libère tous les solides de leur position nominale en donnant six degrés de liberté à chacun. Il en résulte qu'en général, les deux surfaces conjuguées d'une même liaison sont susceptibles d'occuper une infinité de positions voisines de la position nominale. On fait également l'hypothèse que **les jeux englobent les écarts dus aux tolérances de position**. Ainsi, le mécanisme est isostatique dans toutes ses positions.

Du point de vue calcul, les écarts de position ont des valeurs inférieures aux jeux et sont de petites quantités vis à vis des dimensions des surfaces. Ainsi se justifie le procédé de **linéarisation des équations de liaisons** utilisé ci-après.

2. ESPACE DES JEUX ET DES TOLERANCES D'UNE LIAISON PIVOT GLISSANT

2.1 Modélisation des surfaces de liaison

Les surfaces de l'alésage et de l'arbre sont modélisées par un cylindre de base circulaire dont les lignes frontières sont des cercles. Ces derniers définissent des plans orthogonaux au cylindre. En contrôle de fabrication, cette surface est définie par le cylindre des moindres carrés du côté libre de la matière. Pour l'alésage, c'est le cylindre inscrit ; tandis que pour l'arbre, c'est le cylindre exinscrit. La partie du cylindre comprise entre les deux cercles est appelée : élément identifié. Ce sont ces éléments qui correspondent aux deux surfaces d'une liaison pivot glissant du deuxième type. Les figures (1) et (2) représentent les surfaces réelles de l'alésage et de l'arbre ainsi que leurs éléments identifiés. (E) et (E').

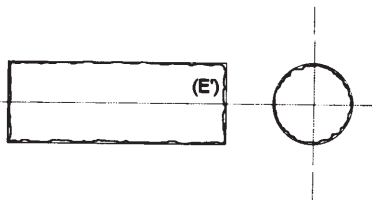


Fig 1 - Arbre réel et sa surface identifiée.

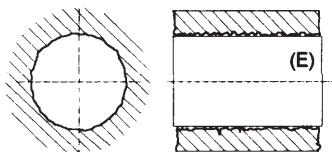


Fig 2 - Alésage réel et sa surface identifiée.

Remarque : Il n'est pas nécessaire que la précision obtenue dans la position des cercles soit grande car un écart du premier ordre introduit des écarts de projections du second ordre, négligés dans la modélisation qui sera retenue

2.2 Repérage global ou local d'une liaison

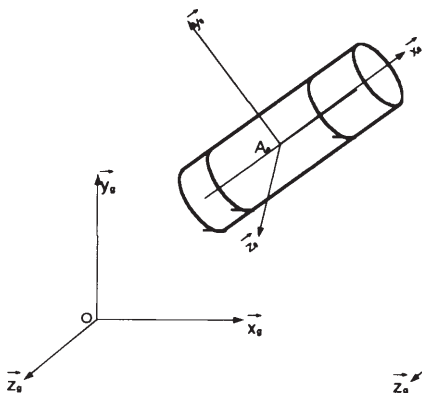


Fig 3 - Liaison pivot glissant du premier type, repère local et repère global.

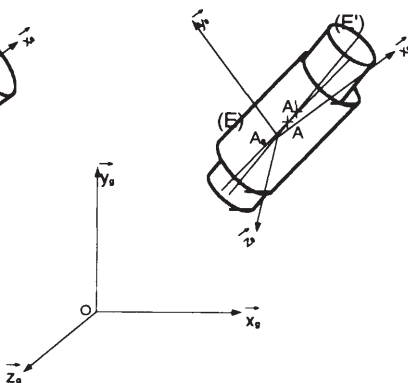


Fig 4 - Liaison pivot glissant du deuxième type, repère local et repère global.

La figure 3 représente une liaison pivot glissant du premier type (sans jeu, sans écart de forme). A chaque position du mécanisme nominal correspond une position de la liaison, définie dans le repère global. Le repère local est fixé au point A_0 , coïncidant avec le centre A de l'alésage ; l'axe des x étant confondu avec l'axe de la liaison. Dans cette position, il existe un point de l'axe de l'arbre coïncidant avec le centre A_0 du repère. Soit A' ce point.

La figure 4 représente une liaison pivot glissant du deuxième type (avec jeu, sans écart de forme). A chaque position du mécanisme nominal correspond une infinité de positions voisines qui se distinguent de cette dernière par des quantités, petites devant les dimensions des liaisons. En général, les centres de l'alésage et de l'arbre sont distincts du point A_0 , et leurs axes également distincts de l'axe des x . Le paramétrage complet d'une surface est effectué ci-après.

2.3 Paramétrage local d'une surface de liaison

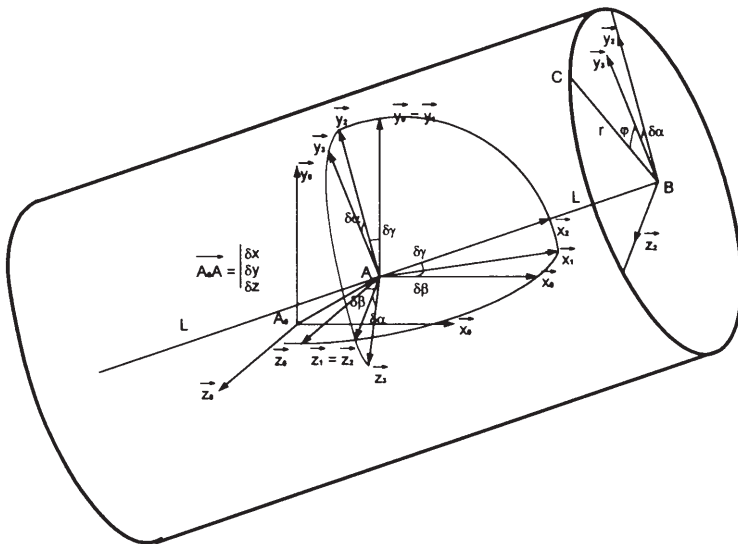


Fig 5 - Paramétrage local d'une surface cylindrique

La figure 5 représente une position quelconque de l'alésage dans le repère local $A_0 x_0 y_0 z_0$. Cet alésage a subi : une translation $(\delta x, \delta y, \delta z)$ et une rotation $(\delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma)$. Les rotations $\delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma$, se font respectivement autour de x_2, z_1, y_0 . On désigne par r le rayon du cylindre et par $2L$ sa longueur. La position d'un point quelconque C du cercle frontière, lié au solide est donnée par :

coplanaires. Leur produit mixte est nul, ou, ce qui revient au même, le produit scalaire de $\mathbf{T}$ avec $\mathbf{B}'\mathbf{C}'$ est nul. Les équations de liaison s'écrivent vectoriellement :

$$(2-3) \quad \mathbf{A}_0\mathbf{C} = \mathbf{A}_0\mathbf{C}' \quad (1)' \quad \mathbf{T} \bullet \mathbf{B}'\mathbf{C}' = 0 \quad (2) \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{A}_0\mathbf{C}}{\partial \varphi}$$

Algébriquement, on obtient :

$$(2-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x + (L \cos \delta \gamma - r \cos(\varphi + \delta \alpha) \sin \delta \gamma) \cos \delta \beta + r \sin(\varphi + \delta \alpha) \sin \delta \beta \\ \delta y + r \cos(\varphi + \delta \alpha) \cos \delta \gamma + L \sin \delta \gamma \\ \delta z + (L \cos \delta \gamma - r \cos(\varphi + \delta \alpha) \sin \delta \gamma) \sin \delta \beta + r \sin(\varphi + \delta \alpha) \cos \delta \beta \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \delta x' + (L' \cos \delta \gamma' - r' \cos(\varphi' + \delta \alpha') \sin \delta \gamma') \cos \delta \beta' + r' \sin(\varphi' + \delta \alpha') \sin \delta \beta' \\ \delta y' + r' \cos(\varphi' + \delta \alpha') \cos \delta \gamma' + L' \sin \delta \gamma' \\ \delta z' + (L' \cos \delta \gamma' - r' \cos(\varphi' + \delta \alpha') \sin \delta \gamma') \sin \delta \beta' + r' \sin(\varphi' + \delta \alpha') \cos \delta \beta' \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$(2-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \sin(\varphi + \delta \alpha) \sin \delta \gamma \cos \delta \beta + r \cos(\varphi + \delta \alpha) \sin \delta \beta \\ -r \sin(\varphi + \delta \alpha) \cos \delta \gamma \\ r \sin(\varphi + \delta \alpha) \sin \delta \gamma \sin \delta \beta + r \cos(\varphi + \delta \alpha) \cos \delta \beta \end{array} \right\}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} -r' \cos(\varphi' + \delta \alpha') \sin \delta \gamma' \cos \delta \beta' + r' \sin(\varphi' + \delta \alpha') \sin \delta \beta' \\ r' \cos(\varphi' + \delta \alpha') \cos \delta \gamma' \\ r' \cos(\varphi' + \delta \alpha') \sin \delta \gamma' \sin \delta \beta' + r' \sin(\varphi' + \delta \alpha') \cos \delta \beta' \end{array} \right\} = 0 \quad (2)$$

Remarque sur l'intériorité du contact : La présence dans les équations des petites quantités : $\{\delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma, \delta x, \delta y, \delta z\}$, justifie que le contact des cercles soit bien intérieur.

Remarque sur le nombre d'équations de liaison : La coïncidence des points $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$, ainsi que le contact tangentiel, condamnent quatre degrés de mobilité relatifs : trois translations et la rotation autour de l'axe $\mathbf{y}'_2$. Ceci justifie l'existence de quatre équations de liaison.

2.5 Linéarisation des équations de liaison

L'utilisation de jeux micrométriques en regard des dimensions millimétriques, autorise une linéarisation des équations de liaison. On obtient :

$$(2-6) \quad \begin{Bmatrix} L + \delta x - r \delta \gamma \cos \varphi + r \delta \beta \sin \varphi \\ r \cos \varphi - r \delta \alpha \sin \varphi + \delta y + L \delta \gamma \\ r \sin \varphi + r \delta \alpha \cos \varphi + \delta z - L \delta \beta \\ \sin(\varphi + \delta \alpha - (\varphi' + \delta \alpha')) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L' + \delta x' - r' \delta \gamma' \cos \varphi' + r' \delta \beta' \sin \varphi' \\ r' \cos \varphi' - r' \delta \alpha' \sin \varphi' + \delta y' + L' \delta \gamma' \\ r' \sin \varphi' + r' \delta \alpha' \cos \varphi' + \delta z' - L' \delta \beta' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les termes omis dans les quatre équations sont du second ordre et plus.

La quatrième conduit immédiatement à : $\varphi' = \varphi$ au premier ordre près.

La première montre que l'inconnue L' est égal à L au premier ordre près.

En utilisant ces résultats, et en posant : $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{j}$ (demi-jeu, quantité du premier ordre), les équations se simplifient sous la forme :

$$(2-7) \quad \begin{Bmatrix} L' - L + \delta x' - \delta x - r(\delta \gamma' - \delta \gamma) \cos \varphi + r(\delta \beta' - \delta \beta) \sin \varphi \\ j \cos \varphi + \delta y' - \delta y + L(\delta \gamma' - \delta \gamma) \\ j \sin \varphi + \delta z' - \delta z - L(\delta \beta' - \delta \beta) \\ \varphi' - \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2.6 Définition d'une modélisation

Après linéarisation, l'inconnue L' a été isolée dans la première équation. La présence ou l'absence du terme du premier ordre qui l'accompagne dans cette équation laisse inchangées les autres équations. Ainsi, à l'ordre supérieur près, on a :

$$(2-8) \quad \begin{Bmatrix} L' - L \\ j \cos a + \delta y' - \delta y + L(\delta \gamma' - \delta \gamma) \\ j \sin a + \delta z' - \delta z - L(\delta \beta' - \delta \beta) \\ a' - a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Toute représentation géométrique qui vérifie le système d'équations linéarisées ne conservant que l'ordre minimal pour chaque équation est un modèle de liaison pivot glissant du deuxième type.

La première équation définit L' et la dernière φ' . Quant aux deux autres, elles représentent en projection dans le plan $A_0 y_0 z_0$, un cercle en coordonnées paramétriques (paramètre φ). Son rayon est égal à j , et son centre a pour coordonnées

$$(2-9) \quad \begin{cases} \delta y + L \delta \gamma \\ \delta z - L \delta \beta \end{cases}$$

Remarque : Dans le système d'équations, les rotations $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ sont séparées. On peut donc s'affranchir de leur composition et pratiquer : $\delta\beta$ autour de y_0 et $\delta\gamma$ autour de z_0 . On constate que δx et $\delta\alpha$ n'y figurent pas.

2.7 Description d'un modèle

La figure 7 représente en perspective la liaison pivot glissant modélisée avec contact entre l'arbre et l'alésage. L'alésage est modélisé par un cylindre oblique, dont les cercles frontières sont orthogonaux à l'axe $A_0 x_0$ du repère local. L'arbre est modélisé par un segment de droite qui traverse l'alésage avec contact en un point. Soit C_1 le point de contact de l'alésage, coïncidant avec le point C'_1 appartenant à l'arbre.

Comme les équations linéarisées et réduites à l'ordre minimal ne contiennent pas les petites translations δx et $\delta x'$, le centre de symétrie de l'alésage est situé dans le plan $A_0 y_0 z_0$. Soit A_1 ce point, projeté du point A centre de l'alésage réel. Il en est de même du point A'_1 de l'arbre, projeté de A' (coïncidant avec A , dans le mécanisme nominal).

La figure 8 représente ce modèle en deux vues projetées.

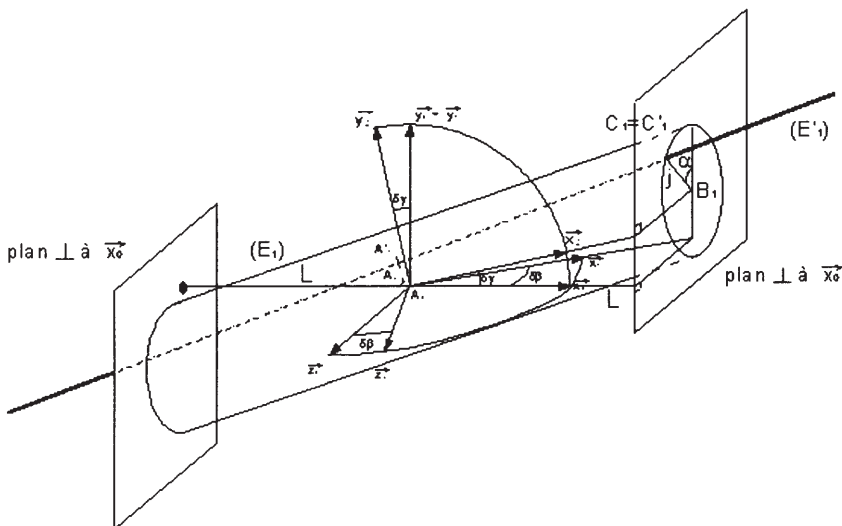


Fig 7 - Modélisation d'une liaison pivot glissant du deuxième type.

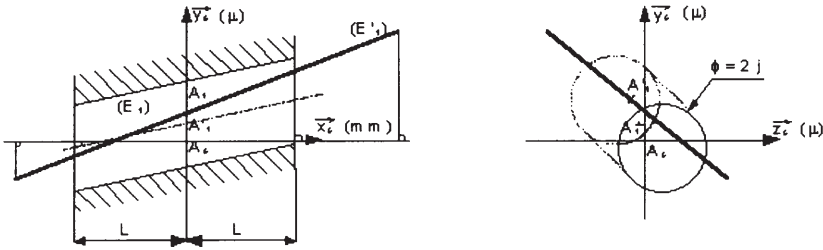


Fig 8 - Modélisation d'une liaison pivot glissant du deuxième type

2.8 Equations de liaison du modèle

Ces équations sont établies pour vérifier la validité du modèle.

$$(2-10) \quad \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 = \begin{Bmatrix} L \\ \delta y + L \tan \delta \gamma + j \cos \varphi \\ \delta z - L \tan \delta \beta + j \sin \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \\ \delta y + L \delta \gamma + j \cos \varphi \\ \delta z - L \delta \beta + j \sin \varphi \end{Bmatrix}$$

$$(2-11) \quad \mathbf{A}_0 \mathbf{C}'_1 = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_1 \mathbf{C}'_1 = \begin{Bmatrix} L \\ \delta y' + L \tan \delta \gamma' \\ \delta z' - L \tan \delta \beta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \\ \delta y' + L \delta \gamma' \\ \delta z' - L \delta \beta' \end{Bmatrix}$$

Le contact arbre-alésage ($\mathbf{C}_1$ confondu avec $\mathbf{C}'_1$), fournit deux équations :

$$(2-12) \quad \delta y - \delta y' + L(\delta \gamma - \delta \gamma') + j \cos \varphi = 0$$

$$(2-13) \quad \delta z - \delta z' - L(\delta \beta - \delta \beta') + j \sin \varphi = 0$$

Ce sont les équations de projection du cercle frontière. D'autre part :

$$(2-14) \quad L' = \mathbf{A}'_1 \mathbf{C}'_1 = \sqrt{L^2 + L^2 \delta \gamma'^2 + L^2 \delta \beta'^2} = L \sqrt{1 + \delta \gamma'^2 + \delta \beta'^2} = L \left(1 + \frac{\delta \gamma'^2 + \delta \beta'^2}{2} \right) = L$$

On retrouve l'équation : $L' = L$ (obtenue ici en négligeant le second ordre et plus). Enfin α' , n'apparaît pas dans cette modélisation. On doit donc introduire la contrainte : $\alpha' = \alpha$.

Remarque sur l'interprétation des **petites quantités** :

Les petites quantités ($\delta \beta$; $\delta \gamma$, δx , δy , δz) sont les composantes du torseur des petits déplacements.

Remarque sur l'importance des **cercles frontières** :

Le ou les contacts arbre-alésage se font toujours avec les cercles frontières.

Remarque sur la possibilité d'une **standardisation** des équations :

En divisant par L les deux membres des équations, et en utilisant le **jeu relatif**, il vient :

$$(2-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta y - \delta y' + \delta \gamma - \delta \gamma' + j_r \cos \varphi \\ \delta z - \delta z' - (\delta \beta - \delta \beta') + j_r \sin \varphi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{avec : } j_r = \frac{j}{L}$$

On peut donc modéliser une liaison pivot glissant avec une demi-longueur L égale à l'unité.

Attention : Cette standardisation n'est plus valable si cette liaison est montée en parallèle avec une autre.

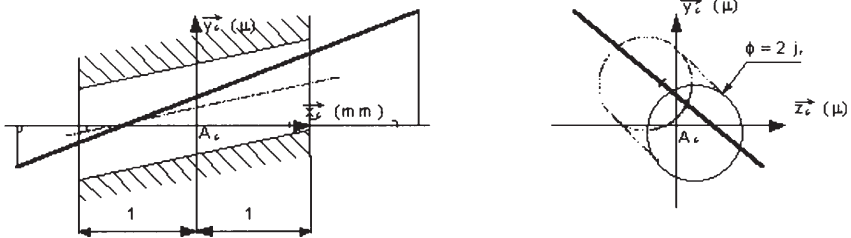


Fig 9 - Modélisation standardisée d'une liaison pivot glissant du deuxième type

2.9 Espace des jeux et des tolérances

Le repère utilisé pour la modélisation n'est pas orthonormé. Sur l'axe des x , l'échelle est millimétrique, tandis que sur les autres axes, elle est micronique. La correspondance entre l'espace réel et l'espace du modèle est une affinité orthogonale à l'axe des x . Ceci entraîne une distorsion qui fait perdre les notions géométriques : de distance, solide, perpendiculaire, bissectrice, etc. En effet, l'alésage n'est plus un cylindre droit, mais un cylindre oblique dont la forme change lorsque change les valeurs des petites rotations. Le sous espace de base y_0, z_0 est orthonormé, les notions classiques de géométrie reprennent cours, de sorte que les courbes frontières sont des cercles.

Appelons **espace des jeux et des tolérances**, l'espace non orthonormé du modèle.

Propriétés :

Le calcul des petits angles avec l'axe des x se fait par lecture de la tangente.

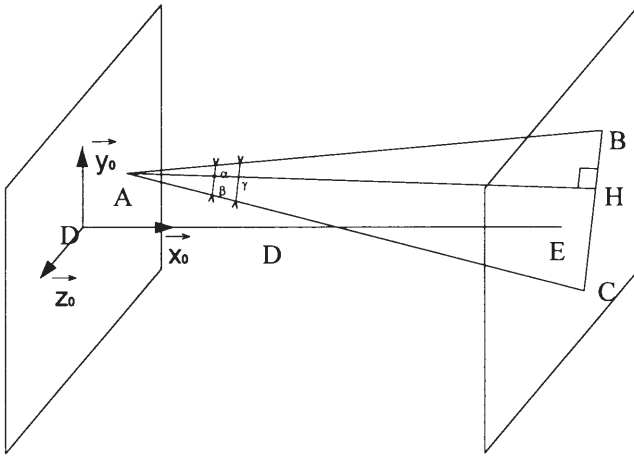


Fig 10 - Calcul des angles dans l'espace des jeux et des tolérances

La figure 10 est tracée dans l'espace des jeux et des tolérances. Les deux plans microniques sont séparés par une distance D millimétrique. Tous les points nommés appartiennent aux plans microniques. On a (2-16)

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{BH}{AH}$$

$$\beta = \tan \beta = \frac{HC}{AH}$$

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{BH + HC}{AH} = \frac{BC}{AH}$$

$$AH = AD + DE + EH$$

$$AH = \sqrt{AD^2 + DE^2 + EH^2 + 2AD \cdot DE + 2DE \cdot EH + 2EH \cdot AD}$$

$$AH = \sqrt{D^2 + (\text{premier ordre et plus})} = D + (\text{premier ordre et plus})$$

$$\gamma = \frac{BC}{D} = \frac{\text{cote micronique}}{\text{cote millimétrique}}$$

D'où la propriété, applicable à toute liaison modélisée selon le principe précédent :

Propriété :

La valeur d'un angle tracé dans l'espace des jeux et des tolérances est égale au rapport de la distance micronique du côté opposé sur la distance millimétrique qui sépare le sommet du plan micronique.

Corollaire :

Deux angles, dont les sommets appartiennent au même plan micronique et qui ont des côtés opposés égaux situés dans un autre plan micronique, sont égaux.

2.10 Torseur des petits déplacements et contrainte $\varphi' = \varphi$

La condition de contact arbre alésage écrite avec ou sans les torseurs des petits déplacements fournit trois équations. L'équation tangentielle de liaison, quatrième équation de liaison n'apparaît pas. C'est la contrainte $\varphi' = \varphi$, qui n'apparaît pas non plus dans la modélisation de l'espace des jeux et des tolérances. On peut donc retrouver les équations du modèle à partir des torseurs des petits déplacements en ajoutant la contrainte $\varphi' = \varphi$.

Il suffit de considérer les torseurs des petits déplacements significatifs, qui ne laissent pas invariante la surface cylindrique (la première composante $\delta\alpha$ du vecteur et la première composante δX du moment sont nulles).

Faisons subir un petit déplacement au point C_0 de l'alésage, puis au point C'_0 de l'arbre et écrivons que les points obtenus C_1 et C'_1 coïncident.

$$(2-17) \quad \{\delta\vec{\theta}, \delta\vec{r}(C_0)\} = \{\delta\vec{\theta}, \delta\vec{r}(A_0) + \delta\vec{\theta} \wedge A_0C_0\}$$

$$(2-18) \quad \text{avec } A_0C_0 = \begin{Bmatrix} L \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{Bmatrix}, \quad \delta\vec{\theta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta\beta \\ \delta\gamma \end{Bmatrix}, \quad \delta\vec{r}(A_0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta y \\ \delta z \end{Bmatrix}$$

On trouve :

$$(2-19) \quad \delta\vec{r}(C_0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta y \\ \delta z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta\beta \\ \delta\gamma \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} L \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r(\delta\beta \sin \varphi - \delta\gamma \cos \varphi) \\ \delta r + L\delta\gamma \\ \delta z - L\delta\beta \end{Bmatrix}$$

$$(2-20) \quad A_0C_1 = A_0C_0 + \delta\vec{r}(C_0) = \begin{Bmatrix} L + r(\delta\beta \sin \varphi - \delta\gamma \cos \varphi) \\ r \cos \varphi + \delta r + L\delta\gamma \\ r \sin \varphi + \delta z - L\delta\beta \end{Bmatrix}$$

Pour l'alésage, tous les points et les paramètres sont primés et l'on a : A_0 confondu avec A'_0 ; et C_1 confondu avec C'_1 . Par ailleurs, comme les déplacements sont petits, L' ne diffère de L que d'une quantité du premier ordre.

$$(2-21) \quad \left\{ \begin{array}{c} L'-L-r(\delta\gamma'-\delta\gamma)\cos\varphi+r(\delta\beta'-\delta\beta)\sin\varphi \\ j\cos\varphi+\delta y'-\delta y+L(\delta\gamma'-\delta\gamma) \\ j\sin\varphi+\delta z'-\delta z-L(\delta\beta'-\delta\beta) \\ \varphi'-\varphi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

On retrouve ainsi les équations qui ont permis de déterminer l'espace des jeux et des tolérances. La première équation fournit l'écart au premier ordre entre L et L' . Les autres équations ne contiennent pas cet écart et l'on a posé pour le modèle dans l'espace des jeux et des tolérances, $L' = L$.

$$(2-22) \quad \left\{ \begin{array}{c} L'-L \\ j\cos\varphi+\delta y'-\delta y+L(\delta\gamma'-\delta\gamma) \\ j\sin\varphi+\delta z'-\delta z-L(\delta\beta'-\delta\beta) \\ \varphi'-\varphi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Les trois premières équations sont celles du modèle de la liaison pivot glissant du deuxième type.

2.11 Champ de déplacements dans l'espace des jeux et des tolérances

On a observé que dans l'espace des jeux et des tolérances, la notion de solide était conservée dans les sections microniques orthonormées.

Un petit déplacement en translation du solide produit, dans l'espace des jeux et des tolérances, une translation d'ensemble de toutes les sections.

Un petit déplacement en rotation du solide produit, dans l'espace des jeux et des tolérances, une translation relative des sections, proportionnelle à leur distance.

Soient deux points du même solide coïncidant avec P_1 appartenant à la section S_1 (plan (P_1)) et P_2 appartenant à la section S_2 (Plan (P_2)) (Voir figure 11). Un petit déplacement amène P_1 en Q_1 et P_2 en Q_2 Soit L la distance des deux sections et soit Td le torseur des petits déplacements réduit en P_2 .

$$(2-23) \quad Td = \{\delta\vec{\theta}, \delta\vec{r}(P_2)\} = \{\delta\vec{\theta}, \delta\vec{r}(P_1) + \delta\vec{\theta} \wedge \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\}$$

$$(2-24) \quad \delta\vec{r}(P_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta y \\ \delta z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta\beta \\ \delta\gamma \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta y + L\delta\gamma \\ \delta z - L\delta\beta \end{Bmatrix}$$

Une translation $(0, \delta y, \delta z)$ produit la même translation de toutes les sections. Par contre une rotation $(0, \delta \beta, \delta \gamma)$ produit une translation relative égale à : $(0, L\delta \gamma, -L\delta \beta)$ donc proportionnelle à L . En particulier les points de la section 1 (qui vérifient $L = 0$) ne se déplacent pas.

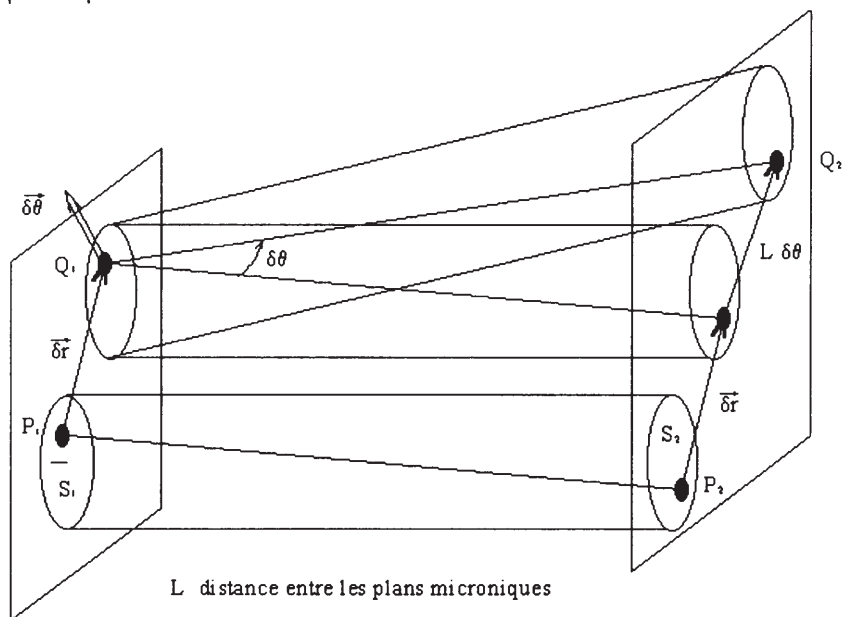


Fig 11 - Petit déplacement d'un solide dans l'espace des jeux et des tolérances

2.12 Projections dans l'espace des jeux et des tolérances

Les solides de la géométrie sont remplacés par leurs images dans l'espace des jeux et des tolérances.

Il s'agit de projeter les points de l'image d'un même solide sur un plan orthonormé (plan des sections solides), les directions de projection passant par un point de l'image pris hors du plan. Ce point est le pôle d'un faisceau de droites. La figure 12 en partie haute, représente l'image d'un solide défini par trois points P_1, P_2, P_3 , appartenant respectivement aux plans $(P_1), (P_2), (P_3)$, des sections solides. Le plan (P) est le plan orthonormé de projection. Soit L la distance du pôle P_1 au plan (P) . **Les points P'_2 et P'_3 sont l'image de points liés au même solide et leur distance est invariante.** L'angle α quant à lui, représente l'image variable d'un angle réel invariable dans le solide et égal au rapport invariable de la distance $P'_2P'_3$ sur L . Les images P_1, P_2, P_3 et P'_1, P'_2, P'_3 sont équivalentes pour représenter le solide, mais la seconde image est mieux adaptée pour manipuler les déplacements virtuels car on ne considère que deux sections

solides de l'image comprenant le plan du pôle et le plan du segment projeté. D'autres combinaisons sont possibles en ce qui concerne le choix du pôle et du plan de projection.

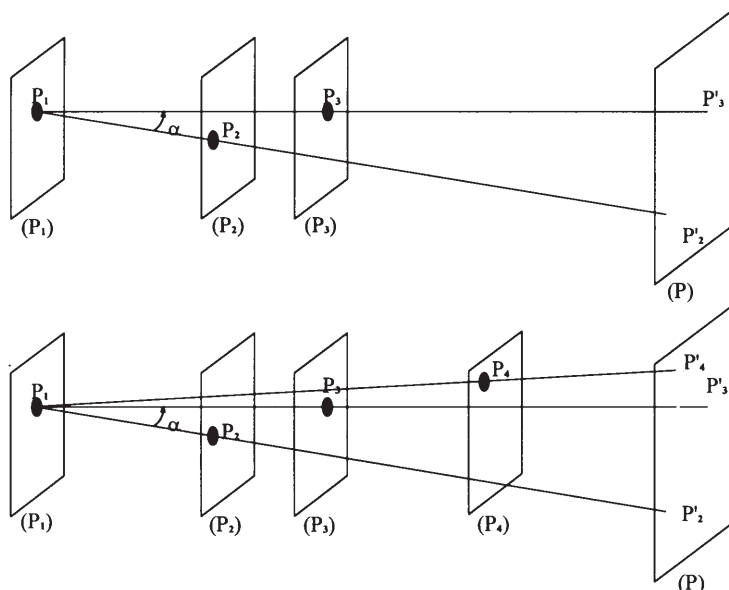


Figure 12 Projection des points d'un solide

En partie basse, le solide est représenté par l'image de quatre points. Les images P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et P'_1 , P'_2 , P'_3 , P'_4 sont équivalentes pour représenter le solide; L'image, formée du pôle et du triangle projeté, est mieux adaptée à l'étude des déplacements virtuels du solide.

Voir en application graphique : le contrôle des arbres et logements participant à l'assemblage d'une liaison pivot hyperstatique.

2.13. Effet du tolérancement dimensionnel sur le modèle tracé dans l'espace des jeux et des tolérances

Soit : $r + \delta r$ le rayon d'un alésage, compris entre r_{Maxi} et r_{mini} .

Soit : $r' + \delta r'$ le rayon d'un arbre, compris entre r'_{Maxi} et r'_{mini} .

En substituant $r + \delta r$ et $r' + \delta r'$ dans les équations de liaison (2-4) et (2-5), on retrouve les équations du système (2-8), au même ordre près. Le demi jeu j est remplacé par la différence $r + \delta r - (r' + \delta r')$. On pose : $r + \delta r - (r' + \delta r') = j + \delta j$. Pour ce nouveau modèle, on a

$$(2-25) \quad r_{\min i} \leq r + \delta r \leq r_{\text{Maxi}}$$

$$(2-26) \quad r'_{\min i} \leq r' + \delta r' \leq r'_{\text{Maxi}}$$

$$(2-27) \quad j = r - r'$$

$$(2-28) \quad \delta j = \delta r - \delta r'$$

$$(2-29) \quad \begin{Bmatrix} L' - L \\ (j + \delta j) \cos \varphi + \delta y' - \delta y + L(\delta \gamma' - \delta \gamma) \\ (j + \delta j) \sin \varphi + \delta z' - \delta z - L(\delta \beta' - \delta \beta) \\ \varphi' - \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les équations (2-21) conduisent à un modèle de liaison (figure 13), déduit du précédent en remplaçant j par $j + \delta j$. Le diamètre de l'alésage varie donc entre $j_{\min i}$ et j_{Maxi} .

Il vient :

$$(2-30) \quad \delta j(\text{maxi}) = \delta r(\text{Maxi}) - \delta r'(\text{min i})$$

$$(2-31) \quad \delta j(\text{min i}) = \delta r'(\text{min i}) - \delta r(\text{Maxi})$$

$$(2-32) \quad IT(j) = \frac{IT(r) + IT(r')}{2}$$

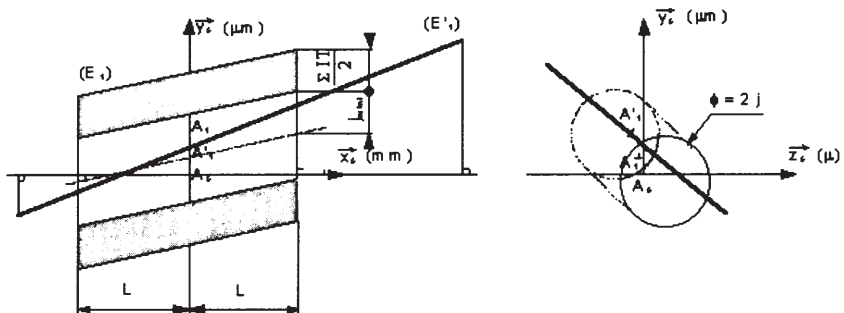


Fig 13 - Modélisation des tolérances dimensionnelles d'une liaison pivot glissant

2.13 Discussion

L'espace des jeux et des tolérances fait intervenir à la fois des plans de petits déplacements et une dimension finie orthogonale. Il se distingue de l'espace jeu construit à l'aide des petits déplacements seuls et de l'espace écart construit également sur l'espace des petits déplacements [9] et [13]..

Cette notion d'espace, encore restreinte,, peut être étendue à priori à tous les mécanismes hyperstatiques mettant en oeuvre au moins des liaisons en parallèles, mais peut être aussi des chaînes complexes. De même, plusieurs types de projections, propres à cet espace peuvent être utilisées pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes d'assemblage.

2.14 Conclusion

Le traitement des conditions nécessaires et suffisantes d'assemblage est loin d'être résolu. L'espace des jeux et des tolérances apporte une contribution graphique, indispensable pour extraire les caractères propres de chaque assemblage. (Voir « contrôle intrinsèque d'une liaison pivot hyperstatique »).

3. BIBLIOGRAPHIE

- [1] Agati P., Rosseto M., *Liaisons et mécanismes*, 1994, Dunod.
- [2] Ballot E., Thèse : *Lois de comportement des mécanismes pour le tolérancement*, 1995, ENS de Cachan.
- [3] Bouttes J., *Mécanique des systèmes de solides indéformables liés*, 1983, Ed. Ecole polytechnique
- [4] Clément A., Rivière A., Temmerman M., *Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques. Théorie et pratique*, 1994, PYC Editions.
- [5] Collectif; *Tolérancement et chaînes de cotes*, 1995, ENS de Cachan.
- [6] Cubélès Valade C., Rivière C., Clément A., *Ingenierie courante : l'intégration du tolérancement et du contrôle via le modèle SATT*, Mécanique Industrielle et Matériaux, nov 97, vol.50, n°4,
- [7] Collectif; *Tolérancement et chaînes de cotes*, 1995, ENS de Cachan.
- [8] Gaunet D., Thèse : *Modèle formel de tolérancement de position. Contribution à l'aide au tolérancement des mécanismes en C.F.A.O*, 1994, ENS de Cachan.
- [9] Giordano M., Duret D., *Espace Jeu. Espace Ecart*, troisième séminaire CIRP : ENS de Cachan : Tolérancement géométrique
- [10] Hervé J. M. *Principe fondamentaux d'une théorie des mécanismes*, Revue roumaine de Sciences et Techniques, Série de mécanique appliquée; sept 78, Tome 23, N° 5.
- [11] Leborzec R., Loterie J., *Principe de la théorie des mécanismes*, Dunod 1975.
- [12] Shigley J.E., Vicker J.J., *Theory of machines and mechanisms*, 1995, McGraw Hill.
- [13] Tichadou S., Duret D., Giordanno M., *Un nouvel outil et une démarche pour représenter le jeu. Cotation fonctionnelle 2D*. Technologie et formation, 1993, N° 47.