

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE ET CARACTERE UNIVERSEL DES LIAISONS MECANQUES

SOULAS François

UMR 5513 ENISE 42000 St. ETIENNE

Résumé

Les liaisons mécaniques classiques sont généralement présentées sous forme d'un tableau dont le classement est établi en fonction des degrés de liberté relatifs. Il se présente comme un ensemble hétéroclite de dix éléments dont on ignore si la liste est exhaustive.

L'analyse suivante, faite à l'aide de la géométrie différentielle des courbes et des surfaces, construit de proche en proche la famille complète des liaisons. Cette famille comprend la liaison ponctuelle, les liaisons linéaires qui sont en nombre infini, et les liaisons à contact surfacique qui forment un ensemble fini comprenant les sept liaisons classiques : liaison rotule, liaison appui plan, liaison pivot glissant, liaison pivot, liaison glissière, liaison glissière hélicoïdale et liaison encastrement. Le but de cette étude est précisément de montrer que ce dernier ensemble est fini, ce qui confère à ces liaisons un caractère universel. On montre également que la liaison "glissière hélicoïdale" engendre par un processus convenable de dégénérescence : les six liaisons mobiles à contact surfacique de l'espace à trois dimensions, les deux liaisons mobiles à contact linéaire de l'espace à deux dimensions, la liaison ponctuelle de l'espace à une dimension.

1. INTRODUCTION

1.1 Présentation

Cette étude, basée sur la géométrie différentielle des courbes et des surfaces, constitue une introduction à la théorie des mécanismes. L'ensemble des liaisons mécaniques élémentaires est méthodiquement construit en s'appuyant sur les propriétés des contacts ponctuels, linéaires et surfaciques. On en déduit la liste exhaustive de ces liaisons : ponctuelle, linéaire annulaire, linéaire rectiligne, rotule, appui-plan, pivot-glissant, pivot, glissière, glissière hélicoïdale, encastrement. On montre ainsi le caractère d'unicité de l'ensemble des liaisons mécaniques élémentaires. Chaque liaison est considérée comme une classe d'équivalence dans l'ensemble des liaisons, et la théorie des mécanismes comme une théorie sur l'ensemble quotient des liaisons. Dans la suite, on considère que les corps liés sont à l'état solide mais pas nécessairement indéformables. Par contre, les surfaces ou lignes de contact assurant des liaisons sont supposées indéformables.

L'étude des déplacements est la méthode habituellement utilisée pour construire l'ensemble des liaisons [CLE 94], [SRI 99], [TUT 98].

Rappelons qu'il existe un seul déplacement, au sens du produit d'une translation et d'une rotation, qui applique un repère sur un autre repère, donc un solide sur un autre solide. Il

existe ainsi une correspondance bijective entre l'ensemble des déplacements et l'ensemble des positions relatives d'un solide par rapport à un autre. Du point de vue structurel, l'ensemble des déplacements possède naturellement une structure de groupe de Lie, c'est à dire une structure de groupe pour des déplacements, des produits de déplacements et des déplacements inverses, différentiables. La différentiabilité étant évidente puisque l'on peut effectuer des déplacements aussi petits que l'on veut.

Une liaison entre deux solides fait alors correspondre l'ensemble des positions relatives du solide lié à un sous ensemble du groupe de Lie des déplacements, et la définition suivante d'une liaison lui fait correspondre un sous groupe particulier du groupe de Lie des déplacements. Définition : les déplacements relatifs, permis par la liaison à partir d'une position donnée d'un solide par rapport à l'autre, sont les mêmes, quelle que soit cette position.

On fait ainsi correspondre l'ensemble des sous groupes de ce groupe de Lie des déplacements avec l'ensemble des liaisons élémentaires.

1.2 Définition canonique d'une liaison entre deux solides

Une liaison est un lien qui s'établit entre deux solides, par contact : ponctuel, linéaire ou surfacique. Ce contact et sa nature se maintiennent au cours d'un mouvement relatif des deux solides.

Pour respecter cette définition, il suffit en fait que, seuls, les arcs de courbe ou les domaines surfaciques frontières en contact soient supposés indéformables. Pour cette raison les arcs de courbe ou les domaines surfaciques frontières des corps (S_1), (S_2), définissent des solides indéformables notés (S'_1) et (S'_2). Afin de ne pas augmenter le nombre de notations, les surfaces frontières seront aussi notées : (S_1), (S_2).

Remarques : On supposera que le domaine frontière de contact est connexe (d'un seul tenant), ce qui ne restreint pas la généralité. Des domaines frontières non connexes ne sont pas nécessairement associés à une même liaison. Toute perte de contact annihile la liaison. Tout changement de nature du contact revient à un changement de liaison.

1.3 Définition des liaisons équivalentes

Lorsque la topologie d'une liaison aura été déterminée, il sera possible de caractériser vectoriellement le déplacement relatif d'un solide par rapport à l'autre. On pose alors que **deux liaisons qui permettent les mêmes déplacements relatifs des solides sont équivalentes**. Cette notion provient de la condition sine qua non de liaison qui impose le maintien du contact. Il en résulte des propriétés concernant les courbures et torsions laissant indéterminés d'autres paramètres définissant des dimensions ou des formes. Par exemple : une liaison réalisée par assemblage d'un arbre dans un alésage appartient à la classe d'équivalence liaison pivot glissant, quel que soit le diamètre. De même, une liaison réalisée par assemblage de deux surfaces de révolution identiques non cylindriques et non planes appartient à la classe liaison pivot, quelle que soit la forme de révolution.

2. LIAISONS DANS UN ESPACE EUCLIDIEN À UNE DIMENSION E1

Les frontières des solides filiformes rectilignes sont des points. Les seuls contacts possibles sont ponctuels. Il n'existe dans cet espace que la liaison ponctuelle et la liaison encastrement qui sont confondues.

3. LIAISONS DANS UN ESPACE EUCLIDIEN À DEUX DIMENSIONS E2

Les frontières des solides plans sont des arcs de courbe.

Soient (C_1) et (C_2) , les arcs de courbe frontière, assurant la liaison entre les corps (S_1) et (S_2) .

3.1 Construction

Supposons (voir figure 1) que dans un voisinage (intervalle ouvert) d'un point M_1 appartenant à l'arc (C_1) , cet arc soit continu, à pente continue, à courbure continue.

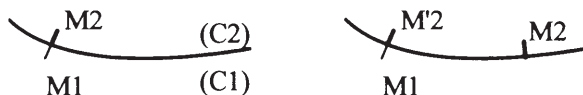


Figure 1. Construction

Dans une première position relative des arcs, soit M_2 , le point appartenant à l'arc (C_2) et coïncidant avec M_1 . Le contact linéaire implique que les arcs soient identiques dans le voisinage de M_1 . En particulier, la courbure en M_2 est égale à la courbure en M_1 . Dans une deuxième position relative des arcs, soit $M'2$, le point appartenant à l'arc (C_2) et coïncidant avec M_1 . La courbure en $M'2$ est alors égale à la courbure en M_1 , et ceci, quel que soit $M'2$. Donc, l'arc (C_2) a une courbure constante. Par ailleurs, si l'on permute les indices 1 et 2, dans le texte qui précède, on en déduit que les arcs ont même courbure.

En conclusion : les arcs frontière sont des courbes planes à courbure constante, c'est-à-dire des arcs de cercle ou des segments de droite. Dans le premier cas, la liaison obtenue est une **liaison linéaire annulaire** ; dans le second, une **liaison linéaire rectiligne**.

Si le contact des arcs associés d'une même liaison se réduit à un point obtenu par réduction d'un des arcs à un seul point, l'autre arc n'ayant plus obligatoirement une courbure constante, on trouve une **liaison ponctuelle**.

Si le contact se fait par des arcs identiques, impliquant le contact dans une position relative donnée, mais n'ayant pas une courbure constante, il n'existe aucune mobilité et on trouve une **liaison encastrement**.

3.2 Discontinuité

Toute discontinuité concernant l'arc, la pente, ou la courbure, peut provoquer, lors d'un déplacement, un changement de liaison. On peut, par exemple, passer d'une liaison linéaire annulaire à une liaison linéaire rectiligne.

3.3 Classes d'équivalence

Les déplacements relatifs des solides S'_1 , S'_2 , sont :

- Pour une liaison linéaire annulaire, des rotations d'axes perpendiculaires au plan E_2 .
- Pour une liaison linéaire rectiligne, des translations parallèles aux segments en contact.
- Pour une liaison encastrement des déplacements nuls.
- Pour une liaison ponctuelle des déplacements assurant le maintien du contact.

On en déduit que dans E_2 il existe 4 classes d'équivalence : la liaison ponctuelle, la liaison linéaire annulaire, la liaison linéaire rectiligne, la liaison encastrement.

4. LIAISONS DANS UN ESPACE EUCLIDIEN À TROIS DIMENSIONS E_3

L'essentiel de ce paragraphe est consacré à l'étude des liaisons à contact surfacique, obtenu : par prolongement des liaisons linéaires apparues dans l'espace euclidien E_2 , par contact de courbes gauches, par contact surfacique quelconque.

4.1 Contact surfacique

4.1.1 Contact surfacique obtenu par prolongement dans E_3 , des liaisons linéaires de E_2 .

4.1.1.1 Prolongement de la liaison linéaire annulaire :

Dans E_2 , les déplacements relatifs des solides indéformables (S'_1) et (S'_2), en liaison linéaire annulaire, sont des rotations R , d'axe perpendiculaire à l'arc de cercle frontière (C_1) en son centre. On prolonge (S'_1) et (S'_2) dans E_3 .

Dans E_3 , tout arc de courbe continu (Γ_1), tracé dans (S'_1) et coupant (C_1), engendre par rotation R , une surface de révolution.

Dans le cas général, la liaison qui s'établit entre S'_1 et S'_2 est la **liaison pivot**.

Dans le cas où la surface de révolution est un cylindre de base circulaire (C_1), la liaison permet des déplacements relatifs, combinant des rotations et des translations de même axe : c'est la **liaison pivot glissant**.

Dans le cas où la surface de révolution est une sphère, on obtient la **liaison rotule**.

Dans le cas où la surface de révolution est un plan (contenant (C_1)), on réalise la **liaison appui-plan**.

4.1.1.2 Prolongement de la liaison linéaire rectiligne :

Dans E_2 , les déplacements relatifs des solides indéformables (S'_1) et (S'_2), en liaison linéaire rectiligne, sont des translations T , parallèles au segment de droite frontière (C_1). On prolonge (S'_1) et (S'_2) dans E_3 .

Dans E_3 , tout arc de courbe continu (Γ_1), tracé dans (S'_1) et coupant (C_1), engendre par translation T , une surface cylindrique à base quelconque.

- Dans le cas général, la liaison qui s'établit entre (S'_1) et (S'_2) est la **liaison glissière**.
- Dans le cas où la surface cylindrique est un cylindre à base circulaire, on réalise une **liaison pivot glissant**.
- Dans le cas où la surface cylindrique est un plan, on réalise la **liaison appui-plan**.

4.1.2 Contact surfacique obtenu par contact linéaire de deux arcs de courbe gauche (C_1), (C_2).

4.1.2.1 Construction

On suppose que les arcs de courbe gauche (C_1), (C_2), frontière de (S_1) et (S_2), sont : continus, à pente continue, à courbure continue, à torsion continue (voir figure 2).

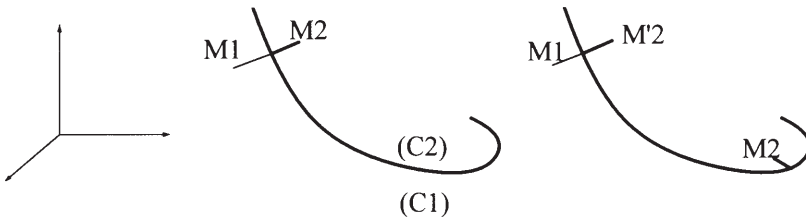


Figure 2. Contact glissant entre deux courbes gauches

On envisage les déplacements dans lesquels les deux arcs glissent l'un sur l'autre.

Dans une première position relative, soit M_2 , le point appartenant à l'arc (C_2) et coïncidant avec M_1 . Le contact linéaire implique que, dans un voisinage de M_1 , les deux arcs soient identiques, en particulier :

- la courbure en M_2 est égale à la courbure en M_1 ,
- la torsion en M_2 est égale à la torsion en M_1 .

Dans une deuxième position relative, soit M'_2 , le point appartenant à l'arc (C_2) et coïncidant avec M_1 . La courbure et la torsion de l'arc (C_2) en M'_2 , sont égales respectivement à celles de l'arc (C_1) en M_1 , et ceci, quel que soit M'_2 . Donc, l'arc (C_1) a une courbure et une torsion constantes.

Si l'on permute les indices 1 et 2 dans le texte ci-dessus, on constate que les arcs ont même courbure et même torsion. En conséquence, les arcs frontière associés dans une liaison, sont des arcs d'hélices circulaires superposables.

- ♦ On considère d'abord les arcs d'hélices non dégénérés en arcs de cercle ou segments de droite. Chaque arc d'hélice définit un solide indéformable. L'arc (C_1) définit un solide (S'_1) dont les déplacements relatifs sont hélicoïdaux. Tous les points de S'_1 , non situés sur l'axe de l'hélice, décrivent des trajectoires hélicoïdales, de même axe, de même sens, et de même pas.

Tout arc de courbe (Γ_1) , coupant (C_1) et tracé dans (S'_1) , décrit par déplacement hélicoïdal, une surface hélicoïdale. Le cas de la surface cylindrique à base circulaire a déjà été traité.

Réciproquement, une liaison définie par contact de surfaces hélicoïdales identiques, assure le contact par glissement des hélices. On obtient la **liaison glissière hélicoïdale**.

- ♦ Dans le cas où l'arc d'hélice (C_1) dégénère en arc de cercle, on retrouve, en partie, l'étude faite au paragraphe 1-1-1.
- ♦ Dans le cas où l'arc d'hélice (C_1) dégénère en segment de droite, tout point de (S'_1) situé à l'extérieur du segment de droite, décrit une trajectoire (Γ_1) tracée sur un cylindre à base circulaire (R_1) .
 - Si cette trajectoire est parallèle à (C_1) , on retrouve, en partie, l'étude faite au paragraphe 1-1-2,
 - Si cette trajectoire n'est pas parallèle à (C_1) :
 - $\Rightarrow$ ou bien (Γ_1) reste en contact avec une courbe (Γ_2) de S'_2 , et alors ce sont des courbes d'égale courbure et d'égale torsion et l'on retrouve la liaison glissière hélicoïdale,
 - $\Rightarrow$ ou bien (Γ_1) ne reste pas en contact avec une courbe (Γ_2) du cylindre (R_2) ; les cylindres coaxiaux (R_1) et (R_2) subissent des déplacements relatifs quelconques : on retrouve la liaison pivot glissant.

4.1.2.2 Discontinuité

Toute discontinuité concernant l'arc, la pente, la courbure ou la torsion, peut provoquer un changement de liaison.

4.1.3 Contact surfacique quelconque :

Rappelons qu'en chaque point d'une surface, il existe, dans le plan tangent, deux directions perpendiculaires entre elles pour lesquelles la courbure des sections droites

admet un maximum et un minimum. Ces directions sont appelées : directions principales et les courbures : courbures principales.

4.1.3.1 Etude des contacts restreints

On suppose que les domaines surfaciques (S_1) et (S_2) sont connexes, et que les courbures principales sont continues. On convient d'affecter de l'indice 1 ou 2 les éléments appartenant respectivement à (S_1) ou (S_2) . Sur le domaine de contact, (S_2) est identique à (S_1) .

Dans une position initiale des surfaces, soit M_2 , un point coïncidant avec M_1 . Au cours d'un déplacement relatif, ou bien M_2 reste confondu avec M_1 , ou bien M_2 décrit sur (S_1) un arc de courbe (Γ_1) .

On envisage successivement ces deux cas :

- ♦ Au cours d'un déplacement relatif, M_2 reste confondu avec M_1 .

S'il existe un point P_2 , distinct de M_2 , qui reste confondu avec un point P_1 , tout déplacement relatif est impossible : on exclut donc, provisoirement, ce cas correspondant à la liaison encastrement.

Il existe donc un point P_2 qui décrit sur (S_1) une courbe (C_1) . La surface (S_2) étant indéformable, la distance $M_2 P_2$ est constante, et (C_1) est une courbe sphérique, de centre M_1 . Par ailleurs, grâce au contact surfacique, la courbe (C_1) reste en contact linéaire avec une courbe sphérique (C_2) de (S_2) .

On a vu que (C_1) et (C_2) ont une courbure et une torsion constantes. Ce sont des arcs de cercle. On en déduit que (S_1) et (S_2) sont associées dans une liaison pivot.

- ♦ Au cours du déplacement, M_2 décrit sur (S_1) une courbe (Γ_1) , (voir figure 3)

Tous les points de (S_1) situés sur (Γ_1) , coïncident, au cours du déplacement, avec le point M_2 de (S_2) ; donc, tous ces points sont identiques. Leurs rayons de courbure principaux sont ceux de (S_2) au point M_2 . Ceci est vrai en particulier pour le point M_1 de (S_1) .

Envisageons un déplacement qui conduit M_2 du point M_1 au point P_1 de (Γ_1) . Soit P_2 , le point coïncidant avec P_1 dans la position initiale. Le point P_2 décrit sur (S_1) une courbe (C_1) .

- Si (C_1) est un arc de (Γ_1) , on retrouve le cas développé au paragraphe 1-2.
- Si (C_1) n'a pas d'autres points communs avec (Γ_1) que le point P_1 , on considère alors l'ensemble (Q_2) des points de (S_2) qui coïncident avec M_1 , au cours du

déplacement. Tous les points de (S_2) , situés sur l'arc Q_2 , sont identiques. Leurs rayons de courbure principaux sont ceux de (S_1) au point M_1 . L'arc (Q_2) a pour extrémités M_1 et P_1 , et n'est pas confondu avec (Γ_1) .

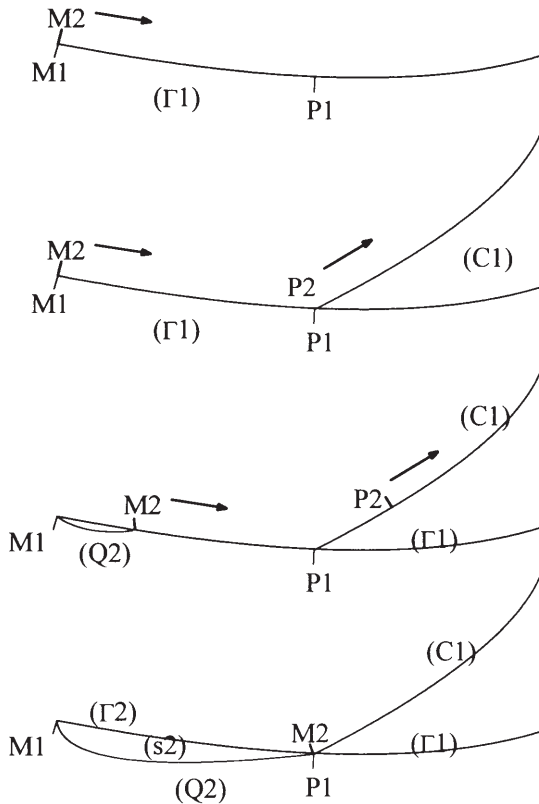


Figure 3 Etude du contact surfacique quelconque.

En position finale, soit (Γ_2) , l'arc de courbe coïncidant avec (Γ_1) entre les points M_1 et P_1 . (Γ_2) et (Q_2) délimitent un domaine surfacique (s_2) dont tous les points coïncident au cours du déplacement avec un point de (Γ_1) . Donc, tous les points du domaine (s_2) sont identiques. Leurs rayons de courbure principaux sont ceux de (S_1) au point M_1 , d'où la propriété :

Si le déplacement avec contact surfacique ne se fait pas par glissement avec contact linéaire de deux courbes, tous les points des domaines surfaciques sont identiques.

On distingue :

- Les points elliptiques dont la courbure des sections droites ne changent pas de signe. Les normales des sections droites ont le même sens.
- Les points paraboliques dont la courbure des sections droites ne change pas de signe mais s'annule une fois (dans une direction principale).
- Les points hyperboliques. dont la courbure des sections droites change de signe en s'annulant deux fois.

Remarques : un déplacement qui produirait successivement un contact linéaire de (C_1) et (Γ_1) , puis un déplacement sans contact linéaire, doit être considéré comme un déplacement dû à un changement de liaison. La non connexité des domaines surfaciques en contact, ou toute discontinuité dans les rayons de courbure principaux, peut provoquer un changement de liaison.

4.1.3.2 Etude des surfaces ayant tous leurs points identiques :

. Considérons les lignes de courbure de la surface. Rappelons qu'elles sont tangentes en tout point à une direction principale et forme un réseau orthogonal. On obtient la propriété suivante :

Si tous les points d'un domaine surfacique sont identiques, les rayons de courbure principaux sont invariants le long des lignes de courbure.

Le long d'une ligne de courbure (L) , on considère la normale unitaire à la surface $\mathbf{n}$, le rayon de courbure principal R_p et le rayon vecteur $\mathbf{r}$.

On a : $d\mathbf{r} + R_p d\mathbf{n} = \mathbf{0}$ formule de Rodrigues, valable le long de (L) .

En intégrant, on obtient :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + R_p (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = \mathbf{0} \quad \text{avec } R_p = \text{constante le long de } (L).$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_L + R_p \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_L - R_p \mathbf{n}$$

Cette formule indique qu'une ligne de courbure (L) est une courbe tracée sur la sphère centrée à l'extrémité de $\vec{r}_L$, et de rayon R_p , (voir figure 4). $\vec{r}_L$ dépend de (L), R_p est le même pour toutes les lignes de courbure de la même famille.

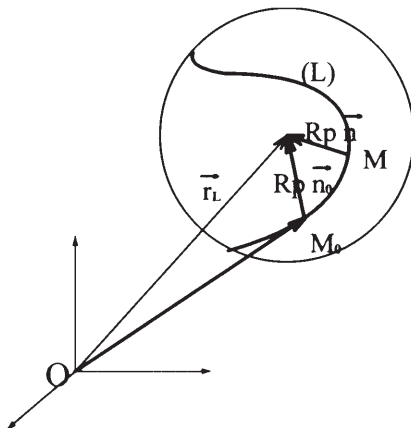


Figure 4. Propriété des lignes de courbure.

♦ **Surfaces identiques, à points elliptiques :**

Soit, une ligne de courbure (L_1), on a :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{L1} - R_{p1} \vec{n}$$

(L_1) est une courbe tracée sur la sphère (s_1) centrée à l'extrémité de $\vec{r}_{L1}$ et de rayon R_{p1} .

Soit, une ligne de courbure orthogonale (L_2), on a :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{L2} - R_{p2} \vec{n}$$

(L_2) est une courbe tracée sur la sphère (s_{L2})

La normale à la surface au point d'intersection est commune aux deux courbes.

On pose : $R_{p1} > R_{p2}$.

Considérons la famille (s_2) des sphères (s_{L2}), tangentes intérieurement à (s_1) le long de (L_1). Il est impossible de construire une famille infinie de sphères, de rayon R_{p1} , tangentes à toutes les sphères de la famille (s_2). Il est donc impossible de construire un réseau orthogonal de lignes de courbure.

On pose : $R_{p1} = R_{p2}$;

la famille (s_2) est confondue à la sphère (s_{L1}) . La surface cherchée est donc la sphère. La liaison obtenue est la liaison rotule.

♦ **Surfaces identiques, à points paraboliques :**

Le long d'une ligne (L_1) , le rayon de courbure de la surface est infini :

$$\begin{array}{ll} dr + R_p dn = 0 & \text{peut s'écrire :} \\ \frac{dr}{R_p} + dn = 0 & dn = 0 \quad n = \text{constante.} \end{array}$$

La courbe (L_1) est une courbe plane. Les sphères de la famille (s_2) sont tangentes au plan de (L_1)

Si la courbe (L_1) a une courbure différente de zéro, il est impossible de construire une famille infinie de plans tangents à toutes les sphères de la famille (s_2) . Il est donc impossible de construire un réseau de lignes de courbure.

Si la courbe (L_1) est un segment de droite, la surface cherchée est un cylindre à base circulaire. La liaison obtenue est la liaison pivot glissant.

Si la deuxième courbure principale est nulle, la liaison obtenue est l'appui-plan.

♦ **Surfaces identiques, à points hyperboliques :**

Les sphères de la famille (s_2) sont tangentes extérieurement à (s_{L1}) . Il est impossible de construire une famille infinie de sphères, de rayon R_{p1} , tangentes extérieurement à toutes les sphères de la famille (s_2) . Il n'existe donc pas de solution.

4.1.3.3 Récapitulatif

L'ensemble des surfaces de liaison a pour éléments : les surfaces hélicoïdales, les surfaces cylindriques à base quelconque dont le plan, les surfaces de révolution, dont la sphère et le plan. Toute autre surface interdit tout déplacement relatif

4.1.4 La surface génératrice des liaisons :

Soit H , le champ des hélices à base circulaire, de même axe, de même pas et de même sens, définit sur l'ensemble des points du solide S'_1 .

Soit (C) , un arc de courbe, orthogonal en tout point à une hélice appartenant à H .

L'ensemble des arcs d'hélices limités à S'_1 , et s'appuyant sur (C) , définit, selon les arcs de courbe (C) la surface de contact d'une liaison glissière hélicoïdale ou d'une liaison pivot glissant.

- Si H dégénère en une famille de droites, la liaison glissière hélicoïdale dégénère selon les arcs de courbe (C), en : liaison glissière, liaison pivot glissant, liaison appui plan, liaison linéaire rectiligne dans E_2 .
- Si H dégénère en une famille de cercles coaxiaux, la liaison glissière hélicoïdale dégénère

selon les arcs de courbe (C), en : liaison pivot ou pivot glissant, liaison rotule, liaison linéaire circulaire dans E_2 .

En conclusion : La liaison glissière hélicoïdale apparaît comme la liaison mobile à contact surfacique la plus générale ; les autres liaisons de E_2 et de E_3 présentant un caractère de mobilité ne sont que des cas particuliers de cette liaison.

4.2 Contact linéaire

Dans E_3 , on peut construire une infinité de liaisons à contact linéaire. Par exemple, considérons une famille de courbes gauches à un paramètre, décrivant une surface lorsque le paramètre varie. La liaison ainsi établie entre le solide associé à la courbe gauche et le solide associé à la surface est une liaison linéaire. Son maintien nécessite des déplacements relatifs conditionnels assurés par le mécanisme pour reproduire fidèlement les déplacements qui ont engendrés la surface.

4.3 Contact ponctuel

La réduction du domaine surfacique ou linéaire de contact, à un point permet d'introduire dans E_3 , la liaison ponctuelle.

4.4 Classes d'équivalence

L'étude des déplacements relatifs permis par chaque type de liaison permet d'affirmer que dans E_3 , il existe :

- 7 classes d'équivalence de liaisons à contact surfacique :
 - la liaison encastrement
 - la liaison glissière hélicoïdale
 - la liaison glissière
 - la liaison pivot
 - la liaison pivot glissant
 - la liaison appui plan
 - la liaison rotule
- 2 classes d'équivalence de liaisons à contact linéaire plan :
 - la liaison linéaire annulaire
 - la liaison linéaire rectiligne

- 1 classes d'équivalence de liaisons à contact ponctuel :
 - liaison ponctuelle
- Une infinité de classes d'équivalence de liaisons à contact linéaire gauche, ?

5. CONCLUSION

Les résultats de la méthode différentielle sont les suivants :

- Dans l'espace euclidien de dimension 3, il existe sept liaisons à contact surfacique, soit dans l'ordre croissant des mobilités : les liaisons : encastrement, glissière hélicoïdale, glissière, pivot, pivot glissant, appui-plan, rotule. Il existe également une infinité de liaisons à contact linéaire, et une liaison à contact ponctuel.
- Dans l'espace euclidien de dimension 2, il existe trois liaisons à contact linéaire : la liaison encastrement, la liaison linéaire annulaire, et la liaison linéaire rectiligne. Il existe également une liaison à contact ponctuel.
- Hiérarchiquement, dans l'ensemble des liaisons possédant au moins un degré de mobilité, la liaison glissière hélicoïdale engendre, en faisant varier ses paramètres, toutes les liaisons à contact surfacique de E_3 , à contact linéaire de E_2 , à contact ponctuel de E_1 .

La méthode vectorielle classique des déplacements et la méthode différentielle présentée ici sont élaborées sur des concepts différents. La méthode différentielle est plus fondamentale car elle s'appuie sur une définition canonique des liaisons qui n'exige que le maintien du contact. Son développement est entièrement construit sur les propriétés des courbes et des surfaces. Le passage d'un point à un autre nécessite plusieurs démonstrations sans introduire d'hypothèses supplémentaires. Au contraire, la méthode vectorielle utilise une définition inspirée de l'observation des liaisons réelles, définition rappelée dans la présentation et qui intègre une propriété, a priori non évidente, concernant les déplacements vectoriels permis par une liaison.

Après avoir déterminé l'ensemble des liaisons par la méthode différentielle, l'étude des classes d'équivalence permet : de retrouver, en tant que propriété, la définition des liaisons utilisée par la méthode des déplacements et, par suite, d'identifier l'ensemble des positions relatives du solide lié à un sous groupe du groupe de Lie des déplacements.

On peut donc considérer la méthode différentielle comme un chaînon manquant dans la théorie des mécanismes.

6. BIBLIOGRAPHIE

[CAG 70] Cagnac G., Ramis E., Commeau J. Cours de Mathématiques Spéciales. *Application de l'analyse à la géométrie*, 1970, Masson & Cie.

[DEL 70] Delachet A., *La Géométrie différentielle*, Editions « Que Sais-je » ? 1970

[SMI 70] Smirnov V., *Cours de mathématiques supérieures, tome 2, Eléments de géométrie différentielle*, 1970, Editions MIR, p.406.

[LUR 68] Lur'e L., *Mécanique analytique, tome 2, éléments de la théorie des surfaces* p.793, 1968, Editions Masson & C^{ie}.

[CLE 94] Clément A., Rivière A., Temmerman M., *Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques*, P.Y.C. Editions, p. 53.

[SRI 99] Srinivasan V., *A Geometrical Product Specification Language based on a classification of symmetry groups*, 18 janvier 1999, ResearchReport.

[TUT 98] Collectif, *I.E.E.E. International Conference on Robotics and Automation*. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, may 16-20, 1998.