

UNE MANIPULATION DE SPECTROMÉTRIE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Jean-Pierre LECARDONNEL
PC*, Lycée Louis le Grand, Paris

Rémi BARBET-MASSIN
PC*, Lycée Henri IV, Paris

Nous proposons ici une manipulation de spectrométrie par transformation de FOURIER que nous avons testée dans nos classes de PC*. Elle a aussi été effectuée dans des classes de PSI* de nos lycées. Elle ne nécessite aucune notion de programmation : nous l'avons réalisée en utilisant le logiciel Synchronie qui dispose de la transformée de FOURIER rapide (FFT en anglais, TFR en français) et permet une acquisition sur 4096 points de mesure. Le logiciel réalise d'autre part une interpolation avant calcul de la FFT, indispensable à la manipulation, et que nous décrivons plus loin. Tout autre logiciel disposant d'une feuille de calculs et d'une transformée de FOURIER rapide réalisant cette dernière interpolation conviendrait.

Pour des raisons qui tiennent aux limitations mêmes du logiciel utilisé, la manipulation est un peu lourde et elle nécessite le soutien du professeur. Mais l'intérêt des élèves est très fort, d'autant que le principe de la méthode a été décrit dans plusieurs problèmes de concours récemment posés.

Curieusement, une telle manipulation est réputée non réalisable avec les moyens dont dispose un lycée. Pourtant, après l'avoir mise au point, et lors des recherches bibliographiques que nous avons effectuées pour rédiger cet article, nous en avons trouvé le principe décrit dans une revue américaine datant de vingt-six ans¹ !

1. PETIT HISTORIQUE

1.1 De Fizeau à Fellgett²

La spectroscopie par transformation de FOURIER repose sur l'étude en continu de l'évolution d'une figure d'interférence lorsqu'on modifie la différence de marche. FIZEAU³ semble le premier à avoir ainsi prévu l'existence du doublet du sodium en observant la succession des coïncidences et anticoincidentes présentées par des anneaux de NEWTON lorsqu'on écarte progressivement une lentille convergente du bloc de verre sur lequel elle reposait initialement.

Plus tard, la toute première fonction de l'interféromètre construit par MICHELSON⁴ devait être de déterminer des profils de raies spectrales par la méthode de la visibilité. MICHELSON recherchait une raie suffisamment fine pour permettre une définition précise du mètre. C'est au cours de ces recherches qu'il découvrit que la raie rouge du cadmium pouvait convenir. MICHELSON, qui ne disposait pas d'ordinateur, avait mis au point un synthétiseur mécanique constitué de ressorts et de leviers grâce auquel il superposait huit mouvements harmoniques distincts. Le résultat de cette superposition était enregistré sur

papier grâce à un stylet et MICHELSON comparait l'allure du tracé obtenu et l'évolution en visibilité de la figure d'interférences que lui fournissait son interféromètre.

Le premier interférogramme publié le fut en 1911⁵. Sur un interférogramme est enregistrée l'évolution de l'intensité lumineuse au centre d'un système d'anneaux lorsqu'on y fait varier régulièrement la différence de marche. Nous rappellerons ci-dessous pourquoi la transformée de FOURIER de cette grandeur fournit le spectre de la lumière. A cette époque, on n'effectuait pas un tel calcul. A l'inverse, par essais successifs, on cherchait à deviner les raies spectrales qu'il fallait combiner pour rendre compte de l'interférogramme enregistré. Et ce n'est qu'en 1951 que le premier spectre obtenu par calcul numérique de la transformée de FOURIER d'un interférogramme fut présenté par FELLGETT⁶.

1.2 La spectrométrie par transformation de FOURIER aujourd'hui

Nous citerons trois applications contemporaines :

- la spectrométrie d'absorption infra-rouge utilisée en analyse chimique ;
- l'analyse spectrale du rayonnement de certains astres dans de grands observatoires⁷ ;
- l'étude de la composition spectrale du rayonnement fossile de l'univers à 3 K, développée à partir de 1989 à bord du satellite COBE par le FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer)⁸. Les points expérimentaux obtenus lors de cette étude prennent place avec une précision surprenante sur la courbe théorique représentant la densité spectrale énergétique du rayonnement du corps noir.

1.3 Rappel : méthode de la visibilité

1.3.1 Principe

La visibilité du système d'anneaux fournis par un interféromètre de MICHELSON varie lorsqu'on fait varier la différence de marche au centre du système par "chariotage". L'étude de son évolution permet de connaître certaines caractéristiques spectrales de la lumière. C'est la méthode utilisée par MICHELSON et rappelée ci-dessus. Nous l'utilisons en travaux pratiques (en classe préparatoire de seconde année) lors de la classique étude du doublet du sodium par relevé de la succession des coïncidences (contraste maximum) et anticoïncidences (contraste minimum) lors du "chariotage". L'étude est plus facile pour le doublet jaune du mercure dont les composantes sont presque quatre fois plus écartées en longueur d'onde que celles de la raie jaune du sodium.

Il ne s'agit pas à proprement parler du calcul d'une transformée de FOURIER. Nous en rappellerons cependant le principe. Le relevé de l'interférogramme s'effectue traditionnellement grâce une table traçante analogique. L'ordinateur fournit une autre possibilité intéressante.

Supposons pour simplifier que les deux composantes du doublet du sodium soient d'égale intensité. Les éclaircissements qu'elles produisent en un point du champ d'interférences où la différence de marche est égale à δ sont alors, conformément à la théorie élémentaire¹ des interférences à deux ondes, de la forme :

¹ Une étude plus précise nécessiterait la prise en compte des effets induits sur la polarisation de la lumière par la réflexion sur la lame séparatrice, car ils sont différents sur les deux voies⁹

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (1 + \cos 2 \pi \sigma_1 \delta), \quad \text{et} : \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (1 + \cos 2 \pi \sigma_2 \delta),$$

σ_1 et σ_2 désignant les nombres d'onde des deux radiations. On rappelle que : $\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_{01}}$, et $\sigma_2 = \frac{1}{\lambda_{02}}$, λ_{01} et λ_{02} désignant les longueurs d'onde, très proches, de chacune des radiations constituant le doublet ($\lambda_{02} > \lambda_{01}$; $\Delta\lambda_0 = \lambda_{02} - \lambda_{01}$). L'éclairement total se met, après factorisation de la somme des cosinus, sous la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 (1 + \cos [\pi \delta (\sigma_1 + \sigma_2)] \cos [\pi \delta (\sigma_2 - \sigma_1)]).$$

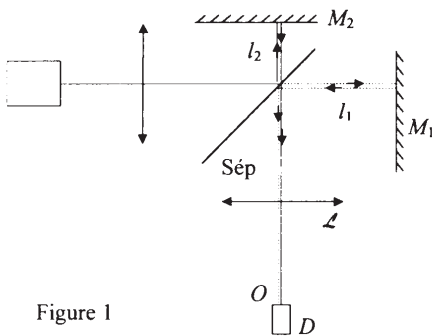


Figure 1

En posant $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0$ et $\sigma_2 - \sigma_1 = \Delta\sigma$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 (1 + \cos[2\pi\sigma_0\delta] \cos[\pi\Delta\sigma\delta]).$$

Au centre O du système d'anneaux fournis par l'interféromètre (figure 1) :

$$\delta = 2(l_1 - l_2) = 2v t,$$

où v est la vitesse de déplacement du miroir mobile M_1 , et t la date considérée. Le facteur 2 apparaît à cause des allers et retours de la lumière sur les deux bras de l'appareil. Ainsi, si un détecteur photoélectrique est placé au centre du système d'anneaux, la tension produite par ce dernier est la somme d'un

terme constant et du produit de la fonction sinusoïdale du temps "rapidement variable" $\cos 2 \pi \sigma_0 \delta$ par la fonction sinusoïdale "lentement variable" $\cos \pi \Delta \sigma \delta$, réalisant une modulation d'amplitude. Les situations d'anticoïncidence, révélées par les "nœuds" séparant les fuseaux visibles sur l'enregistrement présenté figure 2 (4096 points de mesure ; durée d'échantillonnage $\tau_E = 120$ ms), correspondent aux valeurs de δ pour lesquelles ce facteur de modulation s'annule, c'est à dire :

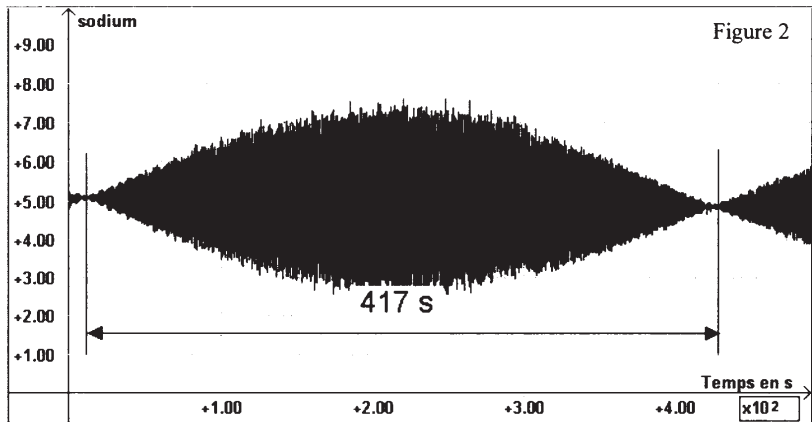


Figure 2

$$\delta = \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{1}{\Delta\sigma}.$$

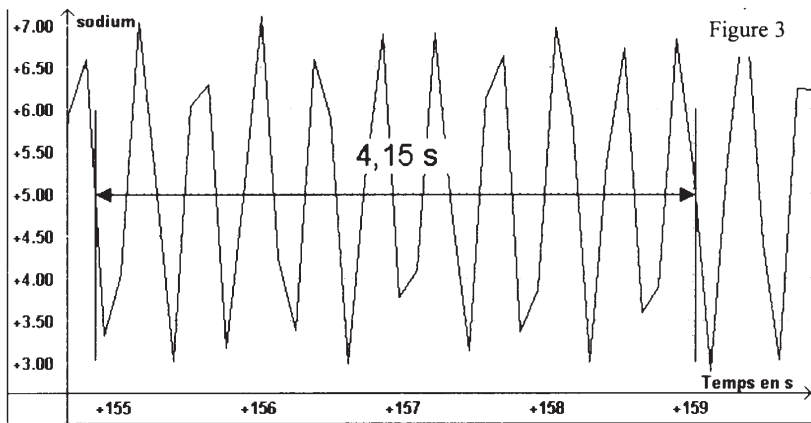
1.3.2 Mesure de $\Delta\lambda_0$, λ_0 étant supposé connu

Compte tenu de $\delta = 2 \nu t$, la mesure au curseur de la durée Δt séparant les deux nœuds observables sur l'enregistrement vérifie donc :

$$2 \nu \Delta t = \frac{1}{|\Delta\sigma|} \quad (1).$$

La mesure de la durée $\Delta t'$ de 10 périodes du même enregistrement, après usage de la loupe (figure 3), fournit :

$$2 \nu \Delta t' = \frac{10}{\sigma_0} \quad (2).$$



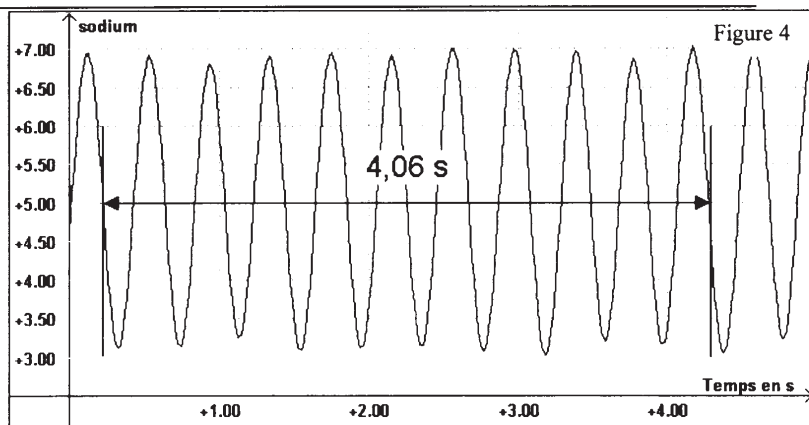
Le quotient membre à membre de (2) par (1) conduit à :

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{|\Delta\sigma|}{\sigma_0} = \frac{1}{10} \frac{\Delta t'}{\Delta t}.$$

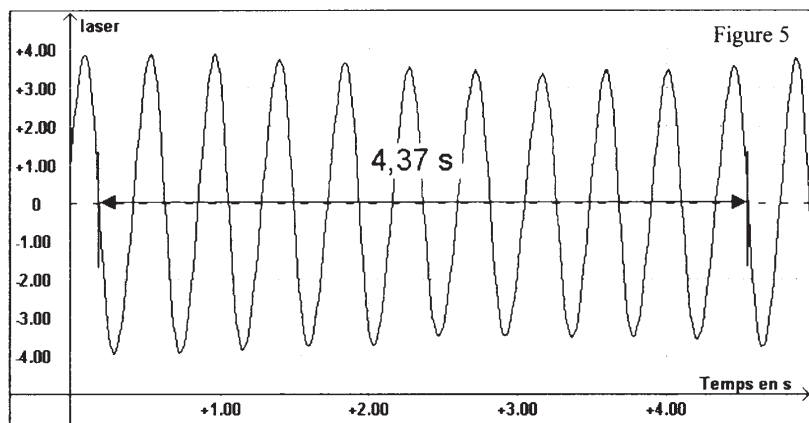
Avec les valeurs relevées sur les enregistrements, on obtient :

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = 1,0 \times 10^{-3}.$$

La connaissance de la valeur $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$ permet d'obtenir : $\Delta\lambda_0 = 0,59 \text{ nm}$. À dire vrai, la mesure de $\Delta t'$ sur un enregistrement donné n'est pas tout à fait reproductible dans les conditions d'enregistrement adoptées : elle dépend notablement de la région de l'enregistrement élargie par la loupe. Elle nous a fourni des valeurs de $\Delta\lambda_0$ comprises entre $0,57 \text{ nm}$ et $0,64 \text{ nm}$. Une mesure plus fine peut être obtenue en adoptant d'autres paramètres d'acquisition (500 points ; $\tau_E = 10 \text{ ms}$). On obtient ainsi l'enregistrement de la figure 4, qui conduit à $\Delta\lambda_0 = 0,57 \text{ nm}$.



1.3.3 Mesure de λ_0 par comparaison



La mesure de la durée $\Delta t''$ de 10 périodes du signal obtenu en envoyant un faisceau laser ($\lambda_{\text{las}} = 632,8 \text{ nm}$) dans l'interféromètre (sans élargisseur de faisceau) conduit au document de la figure 5 (mêmes paramètres de réglage que pour l'enregistrement de la figure 4). Alors :

$$2 \nu \Delta t'' = 10 \frac{1}{\sigma_{\text{las}}} \quad (3).$$

La division membre à membre de (2) par (3) permet d'obtenir :

$$\lambda_0 = \frac{\Delta t'}{\Delta t''} \lambda_{\text{las}}.$$

ce qui conduit à $\lambda_0 = 588$ nm. Cependant, pour obtenir ce résultat avec une bonne précision, il est nécessaire que la tache laser se forme, dans le plan focal de la lentille $\mathcal{L}$ (figure 1), au point où se formait lors de l'étude précédente le centre du système d'anneaux du sodium, ce qui nécessite un peu de doigté. La pupille d'ouverture du détecteur D peut faire office de repère. Il est nécessaire également que les enregistrements 4 et 5 aient été réalisés dans le même domaine de positions du chariot de l'interféromètre. En fait, avouons le : les enregistrements 4 et 5 présentés ici ont été effectués **simultanément**, en utilisant la méthode décrite ci-dessous.

2. L'UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

2.1 Un point de vue naïf

Tout paraît donc simple. L'éclairement au centre du système d'anneaux produits par une lampe émettant une lumière complexe (nous nous référerons maintenant à une lampe Cadmium-Mercure moyenne pression) est une fonction du temps de la forme :

$$\mathcal{E} = \sum_i \frac{\mathcal{E}_i}{2} (1 + \cos [2 \pi 2 \nu \sigma_{0i} t]).$$

La transformée de FOURIER de cette fonction du temps, disponible sur la plupart des logiciels de traitement actuels, fournira les fréquences $F_i = 2 \nu \sigma_{0i}$ et donc, après un étalonnage approprié permettant de déterminer le coefficient 2ν , les longueurs d'onde λ_{0i} des radiations présentes dans la lumière utilisée. Las ! La figure 6 montre le résultat d'un tel traitement. C'est un ensemble confus de raies spectrales indistinctes dont il est

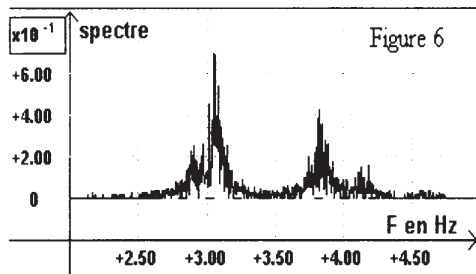


Figure 6

impossible de tirer quelque enseignement que ce soit. Un tel résultat tient à l'existence de faibles irrégularités dans le mouvement du chariot, dues vraisemblablement à des problèmes mécaniques (irrégularités dans les frottements solides). De ce fait, au lieu d'être une somme de fonctions sinusoïdales du temps, le signal est une somme de fonctions très faiblement, mais très irrégulièrement modulées en fréquence. La transformation de FOURIER échoue

donc à déterminer les nombres d'onde réels de la source.

2.2 Principes du traitement informatique

Pour contourner cette difficulté, sans avoir recours à un procédé complexe de synchronisation du relevé de chaque échantillon sur le mouvement du chariot, nous avons eu l'idée de réétalonner les dates d'acquisition du signal. Pour cela, nous nous sommes référés à un faisceau laser traversant l'interféromètre en même temps que la lumière à étudier. Le dispositif (figure 7) met maintenant en œuvre deux détecteurs distincts, l'un

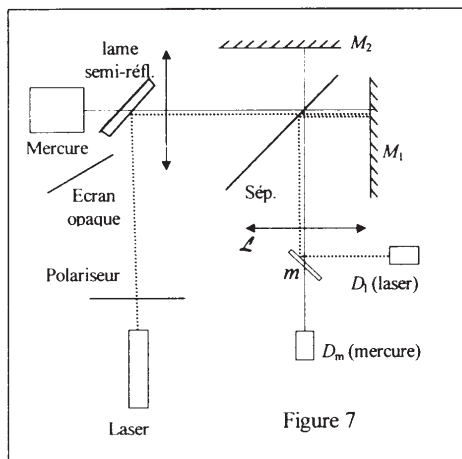


Figure 7

relatif à la lumière laser, l'autre à la lumière à étudier. Les détails concernant la séparation des faisceaux et le conditionnement des signaux avant traitement informatique seront abordés dans les paragraphes suivants. Le conditionnement des signaux consiste principalement à les débarrasser de leur composante continue. Par convention, nous appellerons maintenant "signal laser" et "signal mercure" les deux signaux obtenus après ce conditionnement. En l'absence d'irrégularités de vitesse, le signal laser devrait être parfaitement sinusoïdal.

Après être passé une première fois par zéro, le signal laser reprend cette valeur chaque fois que le chariot subit un déplacement égal à $\frac{l\lambda\alpha\sigma}{4}$. Le relevé

informatique des passages du signal laser par zéro fournit donc les dates (vraies) pour lesquelles la différence de marche est égale à un multiple entier de $\frac{l\lambda\alpha\sigma}{2}$. Ce relevé est

effectué par la fonction **seuil** de Synchronie. Le logiciel rassemble les dates obtenues dans un tableau appelé **lascross** dans les annexes I et II de cet article. Le comptage du nombre total de passages par zéro permet de déterminer une fréquence moyenne $F_0 = 2 \nu \sigma_{las}$ pour le signal laser (et du même coup d'ailleurs de calculer une valeur précise de la vitesse moyenne du chariot). Le logiciel construit alors un signal **modele** sinusoïdal de fréquence F_0 (rappelons que le signal laser ne l'est pas parfaitement), calé sur le signal laser à un instant **teta** obtenu au moyen d'une interpolation linéaire. Puis il relève les passages par zéro du signal modèle et rassemble leurs dates dans le tableau **modcross**. Les dates rassemblées dans modcross sont donc celles (fictives) pour

lesquelles le chariot subirait des déplacements successifs égaux à $\frac{\lambda_{las}}{4}$ si, pendant une durée pratiquement égale à la durée réelle d'acquisition, son mouvement était rigoureusement rectiligne et uniforme. Dans les conditions choisies, un relevé comportant 4096 points fournit des tableaux lascross et modcross comportant environ 1500 points, la différence entre les nombres de points des deux tableaux étant au plus de un ou deux (ce qui ne génère pas d'erreur dans la suite). Enfin, par un traitement effectué depuis sa fenêtre de visualisation, le logiciel extrapole la fonction :

$$\text{lascross} \mapsto \text{modcross}$$

à l'ensemble des valeurs des dates d'acquisition :

$$T \mapsto t_{corr}.$$

Le tableau **tcorr** (temps corrigé) fournit les dates pour lesquelles les acquisitions auraient été effectuées si, pour une durée d'acquisition pratiquement égale à sa durée réelle, le mouvement du chariot avait été rigoureusement rectiligne et uniforme.

À ce stade, on peut lancer la transformation de FOURIER depuis une fenêtre où t_{corr} est utilisé comme abscisse et où **mercure** est visualisé. C'est alors qu'intervient l'interpolation que nous avons mentionnée dans l'introduction. En effet, l'algorithme de la TFR nécessite que les échantillons soient séparés de durées égales. Or les dates du tableau t_{corr} ne le sont justement pas. Le logiciel y pourvoit. On peut penser qu'il détermine à partir de t_{corr} les valeurs qui devraient être celles du signal à des dates séparées de durées égales. À titre de vérification, nous avons nous mêmes construit avec le logiciel Matlab (version éducation) un algorithme de ce type qui permet ensuite à Matlab de calculer la transformée de FOURIER rapide du signal en fournissant un excellent résultat¹⁰.

3. LE DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

3.1 Le montage

Il a déjà été présenté figure 7. La largeur du miroir m (5 mm environ ; m est taillé dans un miroir banal) est juste suffisante pour intercepter la lumière du laser, mais non toute la lumière de la lampe spectrale : celle-ci sort de la lentille L sur toute sa section d'ouverture et n'est donc pas complètement occultée par le miroir m . Une fraction non négligeable passe au dessus et au dessous de m pour atteindre le détecteur D_m . Le détecteur D_1 , de son côté reçoit la lumière du laser et une faible partie de la lumière de la lampe spectrale. On peut d'ailleurs observer sur ce " bras " du dispositif et en arrière de D_1 les anneaux formés par cette source, centrés sur la tache laser. Mais l'intensité de cette dernière est telle que la lumière de la lampe spectrale ne joue pratiquement aucun rôle au niveau du signal détecté par D_1 . La lumière laser sature d'ailleurs ce détecteur qui ne fournit pas un signal d'apparence sinusoïdale indiscutable. Aussi avons nous disposé un polariseur rectiligne P sur le trajet incident du faisceau laser. Nous pouvons de cette façon atténuer ce dernier à volonté, ce qui permet aussi de pratiquement supprimer la lumière laser résiduelle sur D_m (si elle n'est pas totalement absente, elle ne gêne d'ailleurs pas la manipulation. On retrouvera simplement dans le spectre de la lumière étudiée une raie spectrale " souvenir " de la lumière du laser).

En pratique, le réglage de la position de m est assez délicat : s'il est placé symétriquement par rapport au plan horizontal de symétrie du faisceau lumineux issu de L , l'atténuation de la lumière à étudier peut être trop importante. On a plutôt intérêt à disposer m de façon que l'un de ses bords soit rasant par rapport au faisceau laser afin de dégager au mieux un demi-champ de la lentille L . Une autre difficulté consiste à régler la position du laser. Ce réglage s'effectue en l'absence de m . Un écran remplace le détecteur D_1 . Par tâtonnements, on amène la tache du laser au centre du système d'anneaux. Alors seulement on place m , qui doit pouvoir tourner à la fois autour d'un axe horizontal (tige métallique) et d'un axe vertical (pied).

3.2 Le montage simplifié

Le montage décrit au paragraphe 1 permet de réaliser, en se référant à la longueur d'onde de la radiation émise par un laser hélium-néon, l'étalonnage complet (pour les raies les plus lumineuses) des radiations émises par des sources de luminosité suffisante, avec une précision de l'ordre de 2 %. Si une telle précision n'est pas recherchée, il n'est pas nécessaire que la tache laser se forme juste au centre du système d'anneaux, ce qui fait disparaître la difficulté du réglage du miroir m (n'exagérons tout de même pas celle-ci !). Les deux détecteurs sont alors placés dans la même région (figure 8). Dans ces

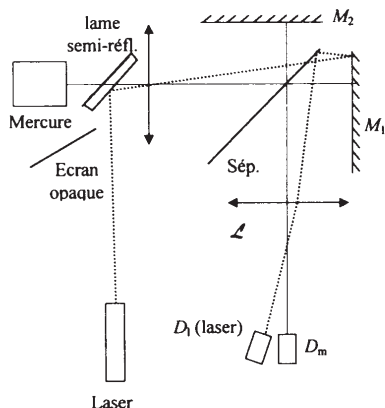


Figure 8

conditions, la différence de marche sur la tache laser fait apparaître un facteur $\cos i$, en notant i l'angle sous lequel la tache est vue depuis le centre optique de la lentille L à partir du centre des anneaux. Ce coefficient ne nuit pas à l'analyse de Fourier, mais à l'étalonnage, la valeur de i n'étant jamais connue exactement. Pour procéder à l'étalonnage proprement dit, il faut considérer connue l'une des radiations émises par la lampe spectrale (par exemple la raie verte du mercure) et se référer à la fréquence de cette dernière au lieu de celle du signal laser pour convertir les autres fréquences présentes en nombres d'onde. Tout cela peut être programmé par deux lignes dans la feuille de calculs, et réalisé de façon automatique.

3.3 Les détecteurs et le conditionnement des signaux

3.3.1 Les détecteurs

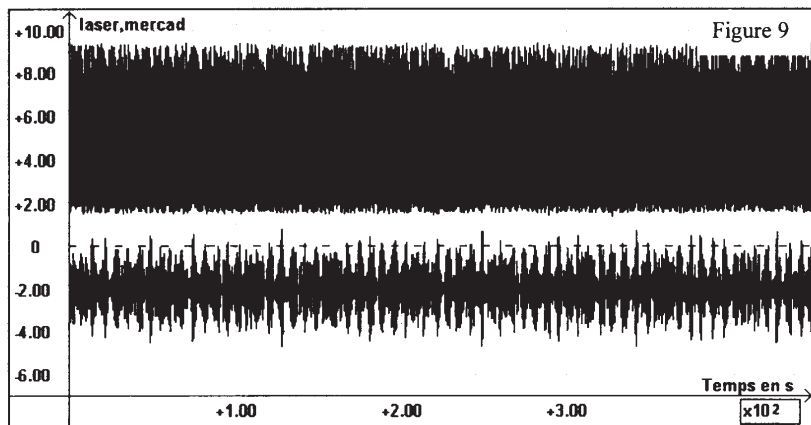
Les détecteurs sont très simples : ils sont constitués d'une photorésistance (LDR) en série avec une résistance de $10\text{ k}\Omega$. Le tout est alimenté par une pile de 9 V . Les tensions entre les bornes de chacune des résistances de $10\text{ k}\Omega$ fournissent les signaux images de l'éclairement au centre du système d'anneaux d'une part, de l'éclairement de la tache laser (convenablement atténuée) d'autre part. Chaque tension relevée est appliquée à un boîtier de conditionnement de signal.

3.3.2 Le conditionnement des signaux

Les signaux électriques produits comportent une importante composante continue due pour partie au fond continu de l'éclairement et pour partie à l'alimentation de la photorésistance. L'élimination de ce fond continu ne va pas de soi. Un simple filtrage élimine en effet du même coup le fond continu et la partie significative du signal, de fréquence très basse (de l'ordre de 2 Hz). Pour résoudre ce problème, l'un d'entre nous a conçu un dispositif de conditionnement¹¹ permettant à la fois d'éliminer le fond continu et d'amplifier le signal significatif. Le système est rustique et mériterait d'être amélioré, mais il fonctionne. C'est en l'utilisant que nous avons réalisé tous les enregistrements reproduits dans cet article.

4. LES RÉSULTATS

4.1 Etude d'une lampe à vapeur de cadmium et mercure, moyenne pression

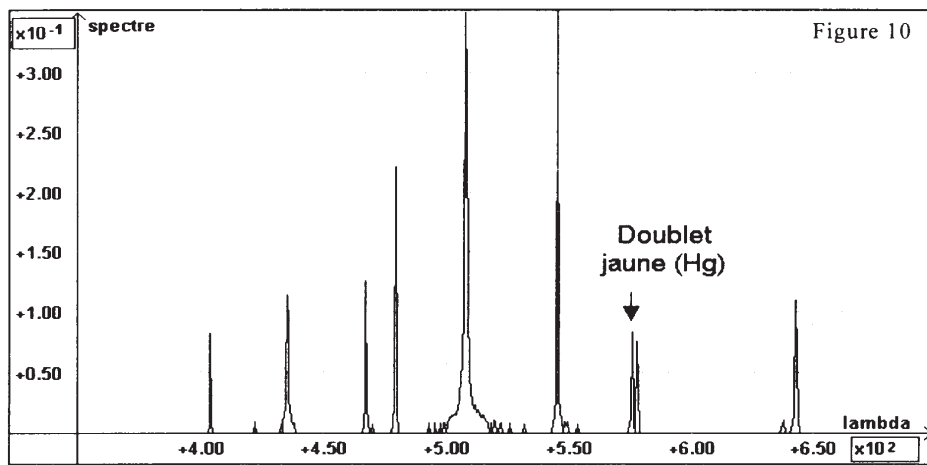


Les résultats ont dépassé toutes nos espérances. Les figures 9 et 10 fournissent respectivement les signaux enregistrésⁱⁱ (fig. 9 ; $\tau_E = 110$ ms) et le spectre calculé en fonction des longueurs d'onde (fig. 10). On distingue nettement le doublet jaune du mercure. Les valeurs des longueurs d'onde, obtenues plutôt en consultant les tableaux des valeurs calculées qu'au curseur, pour éviter toute erreur de "pixelisation", sont indiquées sur la première ligne du tableau ci-dessous. La seconde ligne indique les valeurs lues dans une table.

Élément	Cadmium				Mercure				
Valeurs calculées (nm)	643,1	507,7	479,4	467,3	578,3	576,3	545,4	435,1	404,1
Table (nm)	643,8	508,6	480,0	467,8	579,1	577,0	546,1	435,8	404,7
Valeurs corrigées (nm)	643,4	508,6	480,2	468,1	579,3	577,3	546,4	435,9	404,8

ⁱⁱ Le moteur utilisé pour ce relevé n'était pas le même que celui utilisé lors du relevé précédent.

L'écart maximum entre la valeur calculée et la valeur lue dans une table est atteint avec la raie verte du cadmium. Il est alors de l'ordre de 1,8 ‰. Cependant, les valeurs calculées dans ce cas nous sont apparues systématiquement plus faibles que les valeurs de la table. Nous avons alors repris le calcul des longueurs d'onde du spectre après avoir soumis le signal laser lui-même au même traitement que le signal mercure. Nous avons constaté que sa fréquence avait été légèrement sous-estimée (1,7588 Hz au lieu de 1,7556 Hz), ce qui ne se produit pas à chaque fois. Les calculs menés sur la base de cette correction ont fourni les résultats de la troisième ligne du tableau. L'écart relatif maximum avec les valeurs de la table tombe à 0,6‰.



4.2 La précision

La précision de la mesure est limitée d'une part par la méthode elle-même, d'autre part par l'identification du centre du système d'anneaux pour y disposer le détecteur du signal laser.

4.2.1 La méthode

L'incertitude absolue sur les fréquences calculées est égale à l'inverse de la durée totale de l'acquisition (voir annexe III). On a donc intérêt, pour une vitesse de chariot donnée, à réaliser l'acquisition la plus longue possible. Dans le cas traité ici, la fréquence du signal laser est $F_0 = 1,76$ Hz, ce qui correspond à une vitesse moyenne du chariot égale à $0,56 \mu\text{m.s}^{-1}$ (soit 1 millimètre en 30 minutes). Selon le critère de Shannon, au moins deux échantillons doivent être relevés par période de la composante du signal de fréquence la plus élevée. Pour être "larges", nous en avons pris 3, ce qui conduit à une période d'échantillonnage voisine de 110 ms (valeur adoptée). Ainsi, la durée totale de l'acquisition de 4096 points est d'environ 450 s (7 minutes et demi). Alors :

$$\Delta F \approx 2,2 \times 10^{-3} \text{ Hz,} \quad \text{et :} \quad \frac{\Delta F}{F} \approx 1,3 \times 10^{-3}.$$

Cette valeur est tout à fait compatible avec les résultats obtenus.

4.2.2 Le centrage de la tache laser

Un défaut de centrage pour le détecteur laser conduit à sous-évaluer la fréquence F_0 en la remplaçant par $F_0 \cos i$. Cette erreur systématique contribue à sous-évaluer les longueurs d'onde, qui sont calculées par la formule :

$$\lambda_{0i} = \lambda_{\text{las}} \times \frac{F_0}{F_i} \quad \text{avec } \lambda_{\text{las}} = 632,82 \text{ nm}$$

Bien sûr, un défaut de centrage du détecteur mercure se traduit par un effet du même type, tendant à compenser le précédent.

En ne tenant pas compte de ce dernier (pour simplifier), et en évaluant à 1 cm l'écart entre la pupille du détecteur laser et le centre des anneaux de la lumière à étudier, on obtient, pour une lentille L de distance focale égale à 50 cm :

$$\frac{\delta \lambda_{0i}}{\lambda_{0i}} = -(1 - \cos i) \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{50} \right)^2 \quad \text{soit : } \frac{\delta \lambda_{0i}}{\lambda_{0i}} \approx -0,2 \times 10^{-3}.$$

On voit que cet effet reste faible devant le précédent.

4.3 Le doublet du sodium

Pour pouvoir résoudre le doublet du sodium, il faut que l'incertitude sur la mesure des fréquences devienne nettement plus faible que (voir paragraphe 1.3):

$$\Delta'F = 2 \vee \Delta\sigma,$$

expression qui conduit à :

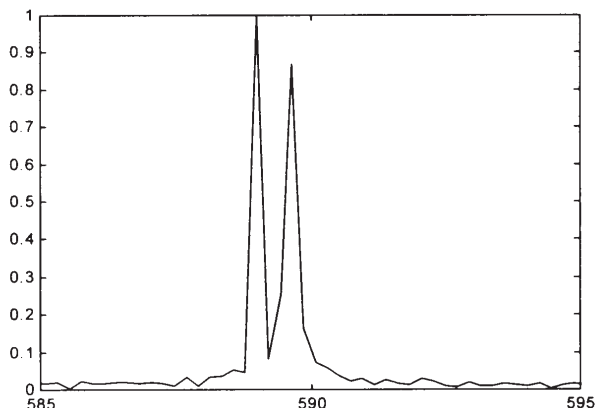
$$\frac{\Delta'F}{F_0} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{\text{las}}}.$$

En termes de longueurs d'onde : $\Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$, et $\sigma_{\text{las}} = \frac{1}{\lambda_{\text{las}}}$. On obtient donc :

$$\Delta'F = F_0 \lambda_{\text{las}} \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}.$$

Avec le moteur utilisé dans les premiers relevés (figure 2), $F_0 = 2,2291 \text{ Hz}$, d'où l'on déduit : $\Delta'F = 2,44 \times 10^{-3} \text{ Hz}$. La durée d'acquisition correspondante (voir annexe 3) est égale à $\frac{1}{\Delta'F}$, soit 410 s. L'écart avec la valeur indiquée sur la figure 2 (417 s), qu'il faudrait obtenir, provient de l'incertitude sur la détermination des anticoincidences.

Nous avons choisi une durée égale à 2,5 fois cette valeur, en effectuant l'acquisition sur 8000 points (maximum possible avec Synchronie) et 130 ms. Le logiciel fournit alors des résultats décevants (manque de clarté de l'algorithme d'interpolation : fait-il passer à 4096 points, ou à 8192 ?). Le résultat du traitement par Matlab mentionné plus haut est illustré figure 11. Le programme utilisé prend en compte la correction éventuelle de fréquence du signal laser. Les longueurs d'onde calculées ont été 588,98 nm et 589,64 nm (valeurs lues dans une table : 588,9950 nm et 589,5924 nm).



Nous tenons à remercier Patrice BOTTINEAU pour son aide irremplaçable dans la réalisation pratique de la manipulation, Jean-François LOGEAS pour ses précieuses remarques, ainsi que Monsieur Jean-Pierre BARRAT pour avoir bien voulu relire l'article et nous faire d'utiles suggestions.

NOTES

- [1] D.K. BERKEY et A.L. KING, Am. J. Phys. **40**, 267 (1972)
- [2] Les éléments cités ici sont tirés du très intéressant article :
E.W. LOEWENSTEIN, Applied Optics **5** (5), 854 (1966).
- [3] H. FIZEAU, Ann. Chim. Phys. **66** (3), 429 (1862).
- [4] A.A. MICHELSON, Phil. Mag. **31** (5), 256 (1891).
- [5] H. RUBENS et R.W. WOOD, Phil. Mag. **21**, 249 (1911).
- [6] P.B. FELLGETT, Thèse, U. de Cambridge (1951).
- [7] Voir par exemple le manuel en ligne consacré l'utilisation de la spectrométrie par transformation de Fourier en astronomie sur le site internet de l'observatoire franco-canadien de Hawaï (Canadian-France-Hawai- Telescope, ou CFHT) :
<http://www.cfht.hawaii.edu/manuals/fts>
- [8] Voir le site :
http://www.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html
- [9] A.L. FYMAT, Applied Optics **11**, 160 (1972)
- [10] Nous fournissons cet algorithme par mél aux lecteurs intéressés qui nous en feront la demande, mais sans documentation et sans garantie de lisibilité:
Jean-Pierre LECARDONNEL, adresse: lecardo@claranet.fr
- [11] J.-P. LECARDONNEL et P. BOTTINEAU, Bull. Un. Phys. **794**, 947 (1997)

{Egalisation des tailles des deux tableaux pour preparer l'interpolation}

t4=max(modcross)

nbm=indice(t4,modcross)

nbmod=nbm+1

taille=ensemble(nblas,nbmod) {Permet de pouvoir comparer les tailles des deux}

mintail=min(taille) {tableaux}

lascross=trunc(lascross,mintail)

modcross=trunc(modcross,mintail)

{Ici apparaît le message d'erreur " Stop ! Erreur de calcul. Symbole non défini ". En effet}

{la variable S_Module ci-dessous n'a pas encore été construite}

{Trace du spectre en longueurs d'onde}

spectre=S_Module {Recopie le spectre du mercure.}

lambda=632.82*F0/F {Calcule les longueurs d'onde des raies}

{en se referant au laser}

Annexe II : Suite des traitements informatiques

Remarques préliminaires :

1) Le tracé dans Synchronie de la représentation d'une grandeur f en fonction d'une variable v dans une " Fenêtre " i nécessite toujours deux types de réglages :

- la déclaration de la variable v comme abscisse pour la Fenêtre i , dans le menu " Paramètres-Fenêtres ", et le choix des échelles correspondantes " en X " et " en Y " dans le même menu ;
- la déclaration de f comme " courbe " à tracer dans le menu " Paramètres-Courbes ", en cochant la case de numéro i sur la ligne " Fenêtres "

Il est suggéré d'utiliser :

- la fenêtre 1 pour tracer les représentations de " laser " et " mercure " en fonction de T ou du temps corrigé (" tcorr ") ;
- la fenêtre 2 pour effectuer l'interpolation permettant de calculer les dates virtuelles de passage du chariot par ses différentes positions si son mouvement avait été uniforme ;
- la fenêtre 3 pour obtenir le tracé du spectre du mercure (" spectre " en fonction de " lambda ").

2) Les réglages du gain et du décalage par les boîtiers de conditionnement doivent être réalisés en mode " permanent ", sur 500 points séparés de 10 ms. Après quoi, après avoir désactivé le mode " permanent ", on peut passer à 4096 points et 110 ms. Cette valeur est donnée en exemple. Elle est relative à l'utilisation d'un interféromètre de marque Sopra " nouveau ", et doit être convenablement adaptée pour l'utilisation d'un autre modèle d'interféromètre.

Phase 1

Après l'acquisition, lancer les calculs grâce à la touche F2. Au bout de quelques instants, ils sont arrêtés et le message d'erreur suivant apparaît : " symbole non défini ".

- Sélectionner la fenêtre 2. Dans " Paramètres-Fenêtres " choisir " lasecross " pour " Abscisse " et " Echelle en X ", " modcross " pour " Echelle en Y ". Dans " Paramètres-Courbes ", choisir " modcross " et cocher " Fenêtre 2 ". Valider.
- Dans le menu " Traiter ", choisir " Rééchantillonnage ". Déclarer " modcross " comme " Variable source ", puis " tcorr " (comme " temps corrigé ") comme " Variable de destination ". Choisir 4096 points. Valider.
- Dans le menu " Paramètres-Fenêtres " choisir " Fenêtre 1 " puis " tcorr " pour " Abscisse ". Dans " Paramètres-Courbes ", supprimer la coche de " laser ". Valider puis sélectionner la fenêtre 1.
- Dans le menu " Traiter " choisir " Analyse de Fourier " puis " mercure " pour " Signal à analyser ". Sélectionner l'ensemble du signal **à l'aide des curseurs**. Cliquer sur " terminer " (flèche bleue en angle droit en bas), puis " Calculer ". La fenêtre d'analyse apparaît. Dans " Paramètres-Fenêtres " choisir " Fenêtre d'analyse n° 1 ", puis définir

MANUELLEMENT les valeurs extrêmes 2 Hz et 5 Hz dans la case " Echelle en X ". Valider. Relever l'indication de précision de la fenêtre d'analyse. Cliquer sur " fenêtres en mosaïque " (quatre fenêtres).

Phase 2

A la fin des opérations précédentes, relancer les calculs par F2 (sans quitter la fenêtre active). Il n'apparaît plus de message d'erreur.

Sélectionner la fenêtre 3. Dans " Paramètres-Fenêtre ", choisir " Fenêtre 3 ", puis " lambda " pour " Abscisses " et " spectre " pour " Echelle en Y ". **Choisir MANUELLEMENT pour l'"Echelle en X " les valeurs extrêmes 350 et 700.**

Annexe III : Transformée de FOURIER et précision

L'algorithme de la TFR conduit en fait à calculer les valeurs approximatives des coefficients d'une **série de FOURIER** : celle du signal qui serait obtenu par répétition périodique ininterrompue du signal acquis. La période d'un tel signal serait donc égale à la durée totale T_a de l'acquisition. La fréquence de son fondamental serait alors : $\nu_a = \frac{1}{T_a}$.

Pour un signal acquis de fréquence ν ($\nu \gg \nu_a$), un calcul simple de coefficients de Fourier montre que l'amplitude de l'harmonique de rang n du signal " étendu ", de fréquence $\nu_n = n \nu_a$, est de la forme :

$$a_n = a \operatorname{sinc} [2 \pi (\nu - \nu_n) T_a],$$

où sinc désigne la fonction sinus cardinal ($\sin X / X$).

Le logiciel relève les valeurs de ν_n pour lesquelles a_n prend des valeurs significatives. Elles sont comprises dans un intervalle de fréquence de demi-largeur de l'ordre de $\frac{1}{T_a}$, et fournissent donc une approximation de ν à moins de $\frac{1}{T_a}$ près.