Un vieux problème de mécanique dans l'actualité médiatique

par José-Philippe PÉREZ
OMP - 31400 Toulouse

RÉSUMÉ

On étudie l'influence d'une force de frottement due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse, sur le mouvement de chute verticale d'une bille. On compare alors les résultats obtenus avec une boule de pétanque et une balle de tennis.

1. INTRODUCTION

Comme on a pu le lire dans la presse, les propos de notre ministre sur la chute, presque libre, d'une boule de pétanque comparée à celle d'une balle de tennis, ont eu au moins le mérite de provoquer une discussion nationale sur un problème simple de physique et de constater que le niveau moyen en physique des Français n'est pas aussi mauvais qu'on le dit parfois.

Rappelons à notre ministre que l'étude de la chute libre, qu'il juge à juste titre importante, figure explicitement dans les programmes actuels de physique des classes des lycées, précisément ceux mis en place en 1992, alors qu'il jouait déjà un rôle majeur dans l'organisation de l'Éducation Nationale. Évidemment, on ne parle pas de l'équivalence de la masse inerte et de la masse grave, mais l'expérience du tube de Newton (n'oublions pas, préalablement vidé d'air) est encore montrée à nos élèves des lycées. Dans ce contexte, rapportons la phrase que l'on attribue souvent à Einstein, créateur de la théorie de la relativité générale : *«L'expérience du tube de Newton est la plus belle expérience qu'un professeur de lycée peut montrer à ses élèves»*.

En revanche, l'influence des forces de frottement visqueux, proportionnelles au carré de la vitesse, qui figurait autrefois dans les programmes scientifiques de niveaux bac + 1 ou bac + 2, elle, n'est pas systématiquement étudiée. L'occasion est donc belle d'analyser ce vieux problème éclairé brusquement par l'actualité médiatique.

2. ÉQUATION DU MOUVEMENT

Le théorème de la quantité de mouvement, appliqué à une boule (masse m), dans le champ de pesanteur **g**, et soumise à la force de frottement – βv^2, s'écrit :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m^{*}\mathbf{g} - \beta v^2$$

v étant la vitesse du centre de masse et m^* la masse grave, grandeur caractérisant la capacité qu'a un corps d'être attiré par un autre, ici la Terre. Il n'est pas inutile de souligner que la masse grave peut être choisie identique à la masse inerte m, grandeur caractérisant une autre propriété de la matière, l'inertie, c'est-à-dire la capacité qu'a un corps de résister à une modification de son mouvement.

Le coefficient β s'exprime en fonction de la masse volumique ρ du milieu environnant, de l'aire S de la surface perpendiculaire à la direction du mouvement et du facteur C_x [1]. Comme $\beta = C_x \rho S/2$, l'équation précédente s'écrit, en projection suivant la verticale descendante :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\beta}{m}\,v^2$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_l^2}\right)$$

en posant :

$$v_l = \left(\frac{2mg}{C_x \rho S}\right)^{1/2}$$

3. SOLUTION

L'équation précédente n'étant pas linéaire, on l'intègre en la mettant sous la forme suivante [1] :

$$\frac{\mathrm{d}v}{2(1 - v/v_l)} + \frac{\mathrm{d}v}{2(1 + v/v_l)} = g\mathrm{d}t$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 - v/v_l} + \frac{\mathrm{d}v}{1 + v/v_l} = \frac{2g}{v_l}\,\mathrm{d}t$$

Il vient :

$$\ln\left(\frac{1 + v/v_l}{1 - v/v_l}\right) = \frac{2gt}{v_l}$$

puisque, initialement, $v = 0$. On en déduit :

$$\frac{1 + v / v_l}{1 - v / v_l} = \exp\left(\frac{2gt}{v_l}\right)$$

soit :

$$v = v_l \tanh\left(\frac{gt}{v_l}\right)$$

Comme $\tanh(X)$ tend vers 1 lorsque X tend vers l'infini, v_l a la signification d'une vitesse limite. On retrouve le cas de la chute libre sans frottement en faisant v_l infini :

$$v \approx v_l \left(\frac{gt}{v_l}\right) = gt$$

Il est intéressant de calculer ces vitesses dans le cas d'un objet sphérique. Compte tenu de la grande valeur du nombre de Reynolds, ici de l'ordre de 10 000, on peut adopter pour C_x la valeur 0,44, couramment admise dans ce cas [2] :

- *Boule de pétanque :* $m_1 = 700\ g$, $D_1 = 7{,}6\ cm$, d'où $v_{l,\,1} = 72{,}75$ m/s ;
- *Balle de tennis :* $m_2 = 58\ g$, $D_2 = 6{,}7\ cm$, d'où $v_{l,\,2} = 23{,}75$ m/s.

Poursuivons l'analyse en exprimant la distance parcourue :

$$x = \int v \mathrm{d}t = \int v_l \tanh\left(\frac{gt}{v_l}\right) dt = \left(\frac{v_l^2}{g}\right) \int \tanh\ w\ \mathrm{d}w$$

en posant :

$$w = \frac{gt}{v_l}$$

Il vient, en intégrant : $$x = \left(\frac{v_l^2}{g}\right) \ln\ \cosh\ w + \mathrm{Cte}$$

soit :

$$x = \left(\frac{v_l^2}{g}\right) \ln\ \cosh\left(\frac{gt}{v_l}\right)$$

puisque $x = 0$ lorsque $w = 0$. Ici aussi, on retrouve le cas de la chute libre sans frottement en faisant v_l infini :

$$x \approx \left(\frac{v_l^2}{g}\right) \ln\left(1 + \frac{g^2 t^2}{2 v_l^2}\right) \approx \frac{gt^2}{2}$$

4. BOULE DE PÉTANQUE ET BALLE DE TENNIS

La boule de pétanque A_1, plus lourde, atteint le sol la première, au bout de la durée τ_1 telle que :

$$h_1 = \left(\frac{v_{l,\,1}^2}{g}\right) \ln \cosh \left(\frac{g\tau_1}{v_{l,\,1}}\right)$$

soit : $$\tau_1 = \left(\frac{v_{l,\,1}}{g}\right) \arg \cosh \left(\frac{gh_1}{v_{l,\,1}^2}\right)$$

Sa vitesse v_1 est alors : $$v_1 = v_{l,\,1} \tanh \left(\frac{g\tau_1}{v_{l,\,1}}\right)$$

La balle de tennis A_2, plus légère, atteint, elle, le sol au bout d'une durée plus grande τ_2, telle que :

$$\tau_2 = \left(\frac{v_{l,\,2}}{g}\right) \arg \cosh \left(\frac{gh_1}{v_{l,\,2}^2}\right)$$

avec la vitesse v_2 suivante : $$v_2 = v_{l,\,2} \tanh \left(\frac{g\tau_2}{v_{l,\,2}}\right)$$

Sur la figure 1, on a représenté, en fonction de la hauteur de chute h_1 en mètre, la différence $\tau = \tau_2 - \tau_1$ des durées de chute en milliseconde.

Sur la figure 2, on peut lire, en fonction de h_1, les vitesses finales de chute v_1 (en trait plein) et v_2 (en pointillés).

Enfin, sur la figure 3, plus commode à interpréter, on a tracé le graphe donnant, en fonction de h_1, l'écart h en centimètre qui sépare les deux boules, lorsque la plus lourde touche le sol :

$$h = h_1 - h_2$$

avec : $$h_2 = \left(\frac{v_{l,\,2}^2}{g}\right) \ln \cosh \left(\frac{g\tau_1}{v_{l,\,2}}\right)$$

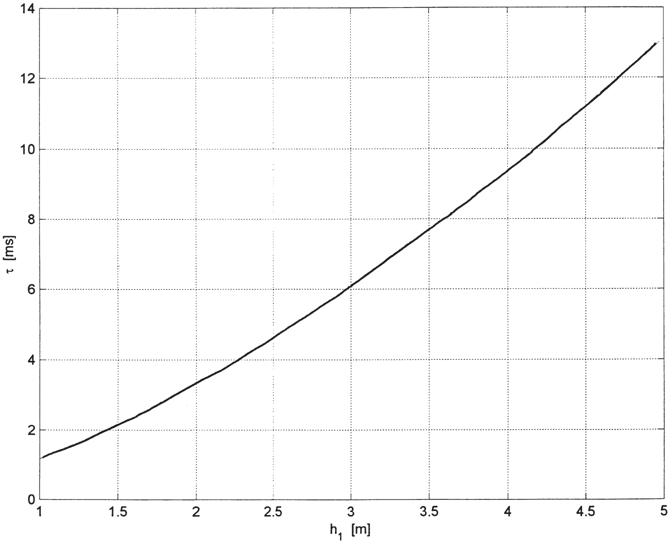

Figure 1

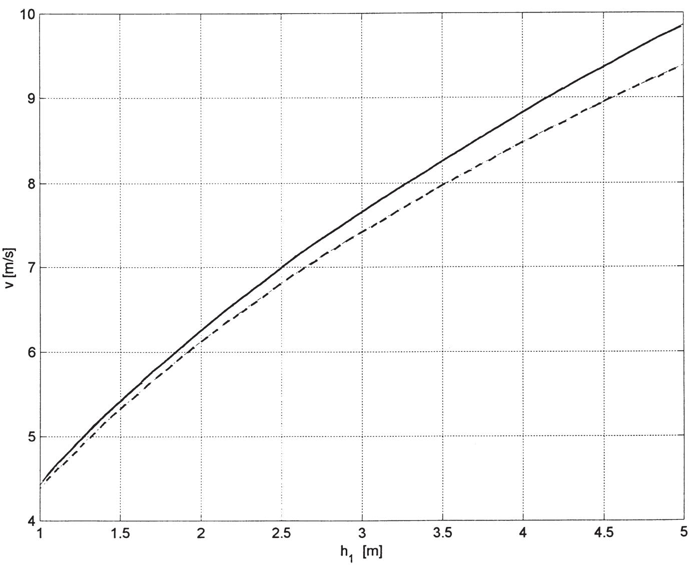

Figure 2

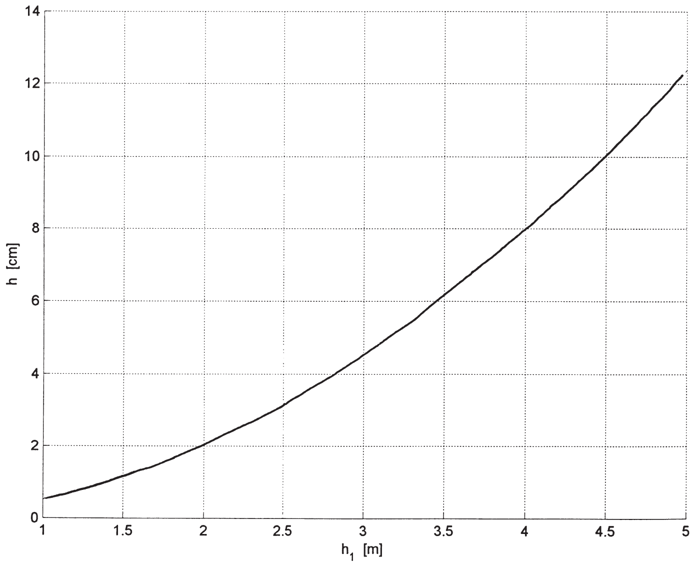

Figure 3

CONCLUSION

On voit que l'écart *h* est faible, mais détectable à l'œil, même lorsque les balles sont abandonnées à hauteur d'homme.

Les calculs et les tracés de courbe ont été effectués avec Matlab.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-Ph. PÉREZ : *«Mécanique, fondements et applications»* - 5e édition, Masson, 1997, p. 483 et 553.

[2] P. REBUFFET : *«Aérodynamique expérimentale»* - Tome 1, Dunod, 1969, p. 295.