

Résolution des équations différentielles par les méthodes de l'analyse numérique

Gérard SERRA
Lycée Saint-Charles
5, rue Guy Fabre - 13001 Marseille

RÉSUMÉ

Les programmes de terminale S prévoient la résolution des équations différentielles à l'aide de méthodes numériques implémentées sur un ordinateur. Cet article tente de faire le point en comparant les plus courantes et met en évidence l'intérêt, pour la précision des résultats, sur des méthodes prédicteurs-correcteurs.

Si le modèle d'oscillateur auto-entretenu de Van der Pol n'est plus au programme de terminale S il reste utile dans les classes post-baccalauréat. C'est un domaine où les méthodes numériques s'imposent.

1. INTRODUCTION

Références

- BOEN n° 3 du 16 février 1995

Page 5 : «L'enseignement fera ressortir les relations transversales :

Physique et Mathématiques...

L'ordinateur sera l'outil privilégié pour la saisie et le traitement des données ainsi que pour la simulation...».

Page 8 : «Les exemples fournis peuvent être exploités en expériences de cours, en TP, en travaux de documentation en faisant une large part à l'utilisation des moyens technologiques modernes (audiovisuel, informatique...)».

- Document d'accompagnement

Page 74 : «En revanche les équations plus générales avec A, B, et C dépendant du temps ne peuvent en général être résolues qu'approximativement et numériquement selon une méthode du type Runge-Kutta...».

La plupart des graphieurs disposent pour cela de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, c'est le cas de DERIVE et GRAPHE (NATHAN), de WinLabo (LANGAGE ET INFORMATIQUE) et de WGRAPH'X (SOFTIA).

2. PRINCIPE DES MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Considérons une fonction $x(t)$ inconnue, définie sur $[t_a, t_b]$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

avec les conditions particulières :

$$t = t_0 \Rightarrow x(t_0) = x_0$$

On remplace l'équation différentielle par une équation intégrale :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (x'(t) dt) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(t, x(t)) dt$$

On va partager l'intervalle de définition de $x(t)$ en intervalles de largeur $h = t_{j+1} - t_j$. La relation précédente se généralise à :

$$x(t+h) = x(t) + \int_0^h f(t, x(t)) dt$$

L'intégrale définie se calcule par la **méthode des rectangles** approchée à l'ordre de h^2 :

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t, x(t)) + O(h^2)$$

En négligeant le terme d'ordre h^2 et en itérant sur l'ensemble de définition $[t_a, t_b]$, on obtient un ensemble de valeurs discrètes de $x(t)$:

$$x_{j+1} = x_j + h \cdot f(t_j, x_j)$$

c'est la **méthode d'Euler**.

Il est intéressant de noter que cette démarche est plus proche de l'évolution du phénomène physique, qui doit bien tenir compte de la valeur des données à l'instant t_j pour engendrer les valeurs des données à l'instant t_{j+1} , la fonction $x(t)$ étant une modélisation du processus.

On obtient une formule plus précise, en approchant mieux l'intégrale définie du second membre, par la **méthode des trapèzes** :

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} [f(t, x(t)) + f(t+h, x(t+h))] + O(h^3)$$

ou encore :
$$x_{j+1} = x_j + \frac{h}{2} [f(t_j, x_j) + f(t_{j+1}, x_{j+1})] + O(h^3)$$

mais c'est une équation implicite en x_{j+1} ! Fort heureusement en calculant x_{j+1} dans le crochet par la méthode des rectangles, on conserve l'approximation en h^3 . On obtient ainsi une **méthode prédicteur-correcteur** :

prédicteur :
$$x_{j+1}^* = x_j + h \cdot f(t_j, x_j)$$

correcteur :
$$x_{j+1} = x_j + \frac{h}{2} [f(t_j, x_j) + f(t_{j+1}, x_{j+1}^*)] + O(h^3)$$

Les erreurs d'arrondis se multipliant par le jeu de l'itération, on risque d'avoir par exemple une représentation graphique en forme de spirale alors qu'on attend un cercle. On limite leur effet en employant des méthodes construites sur le principe que l'on vient de voir.

3. MÉTHODE DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4

On pose, avec t_j et x_j connues :

$$k_1 = h \cdot f(t_j, x_j)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_j + h, x_j + k_3)$$

alors :

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = x_j + \frac{h}{6} \left[f(t_j, x_j) + 2f\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j\right) \right] + \dots$$

L'erreur globale est alors en h^5 et l'erreur locale est en h^4 . Montrons sur un exemple où la solution est connue analytiquement.

4. EXEMPLE

Exemple trivial : $x'(t) = ax(t)$, où $x(t_0) = x_0$. Solution analytique : $x = Ce^{at}$.

Disposition des calculs :

t	x	k
t_0	x_0	$k_1 = h \cdot f(t_0, x_0) = h \cdot ax(t_0) = h \cdot ax_0$
$t_0 + h/2$	$x_0 + k_1/2$	$k_2 = h \cdot f(t_0 + h/2, x_0 + k_1/2) = h \cdot a(x_0 + k_1/2) = h \cdot ax_0 (1 + h \cdot a/2)$
$t_0 + h/2$	$x_0 + k_2/2$	$k_3 = h \cdot f(t_0 + h/2, x_0 + k_2/2) = h \cdot ax_0(1 + h \cdot a(1 + h \cdot a/2)/2)$
$t_0 + h$	$x_0 + k_3$	$k_4 = h \cdot f(t_0 + h, x_0 + k_3) = h \cdot ax_0(1 + h \cdot a(1 + h \cdot a(1 + h \cdot a/2)/2))$
$t_1 + t_0 + h$	x_1	$k_1 = h \cdot f(t_0 + h, x_1) = (t_0 + h) = h \cdot ax_1 \dots$

Application Numérique :

$a = 1$; $h = 0,1$; t pris entre 0 et 1, on se donne $t_0 = 0$ et $x(t_0) = x_0 = 1$ (donc $C = 1$).

Pour $t_1 = t_0 + h$,

$$x_1 = x_0 + h \cdot x_0(1 + h/2 + h^2/6 + h^3/24)$$

soit :

$$x_1 = 1,10517083$$

Appliquons à la solution analytique la valeur $t_1 : x_1 = 1,10517092$. L'erreur relative est de $8 \cdot 10^{-8}$ soit de l'ordre de 10^{-7} ou encore de h^7 !

5. ANALYSE DE QUELQUES LOGICIELS

- **WGRAPH'X** (la dernière version pour Windows est de 1995), de la Société SOFTIA, dont la licence mixte a expiré en 1997, permet de résoudre les équations différentielles du premier et du second ordre, dans le cas où l'on peut les écrire sous la forme :

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) \quad \text{ou} \quad y''(x) = A(x) \cdot y'(x) + B(x) \cdot y(x)$$

avec les conditions initiales : $y_0 = y(0)$, et $y'_0 = y'(0)$.

Ce logiciel est très efficace comme grapheur et comme solveur. Il permet de construire le portrait de phase de l'oscillateur, quand on peut résoudre analytiquement son équation du mouvement, en calculant les équations paramétriques donnant $y(x)$ et $y'(x)$. Pour l'oscillateur de Van der Pol, c'est évidemment impossible.

- **DERIVE (NATHAN)** a une interface un peu rébarbative mais permet d'effectuer les mêmes opérations que GRAPH'X avec en plus, de nombreuses fonctionnalités en géométrie.

Se renseigner auprès des collègues de mathématique qui l'emploient souvent.

- **GRAPHE** (NATHAN) possède lui aussi une interface un peu déroutante. Il permet d'afficher simultanément l'équation avec ses conditions particulières, le pas et le graphe. Il s'en suit que la résolution de ce graphe est un peu réduite. On retrouve les mêmes limitations que précédemment.
- **ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES** (JÉRIKO) très orienté vers les applications à la physique et à la cinétique chimique avec de nombreux exemples utilisables avec les nouveaux programmes de terminale S.
- **EQUADIFF** (JEULIN) spécialisé dans la résolution et la représentation graphique de l'équation différentielle régissant un oscillateur électrique ou mécanique. On peut afficher l'oscillogramme ou le portrait de phase.

6. APPLICATION AU MOUVEMENT DE SATELLITES

Il y a un domaine où la précision de la méthode Runge-Kutta d'ordre quatre est particulièrement intéressante, c'est son application pour simuler le mouvement d'un satellite en modifiant les conditions initiales, sous réserve que l'énergie du système soit négative. La méthode permet d'obtenir une trajectoire réaliste alors que la méthode d'Euler risque de donner une trajectoire qui ne se referme pas sur elle-même.

Les copies d'écran (cf. figure 1 à 3) qui suivent sont obtenues à partir de programmes que j'ai écrit avec DELPHI de la Société BORLAND dont la raison sociale a changé depuis peu pour IMPRISE.

L'exemple suivant (cf. figure 1) illustre le problème à deux corps : un astre représenté à droite du dessin est le centre attracteur supposé fixe. Un deuxième astre entre dans son voisinage avec une vitesse et une position initiale que l'on peut modifier à volonté. Les lois de Képler sont traduites par le tracé de la trajectoire. La copie d'écran permet de juger le résultat.

L'efficacité de ces méthodes peut encore être illustrer par l'étude d'un comportement chaotique : celui du problème des trois corps. On lance un satellite dans la direction de la médiatrice du segment joignant deux astres supposés de même masse. En dehors de cette médiatrice l'attraction du plus proche infléchit la trajectoire et de ce fait le deuxième agit à son tour. Le mouvement peut alors devenir extrêmement complexe et donner une trajectoire qui ne se referme plus.

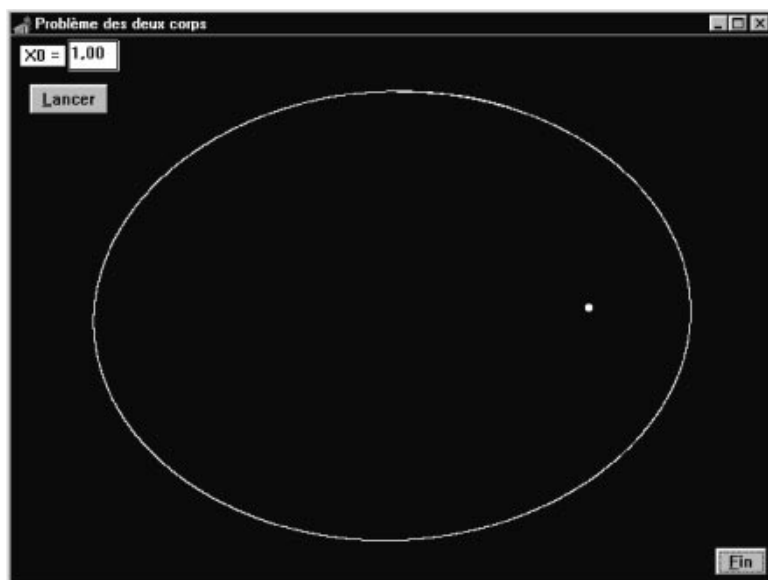


Figure 1

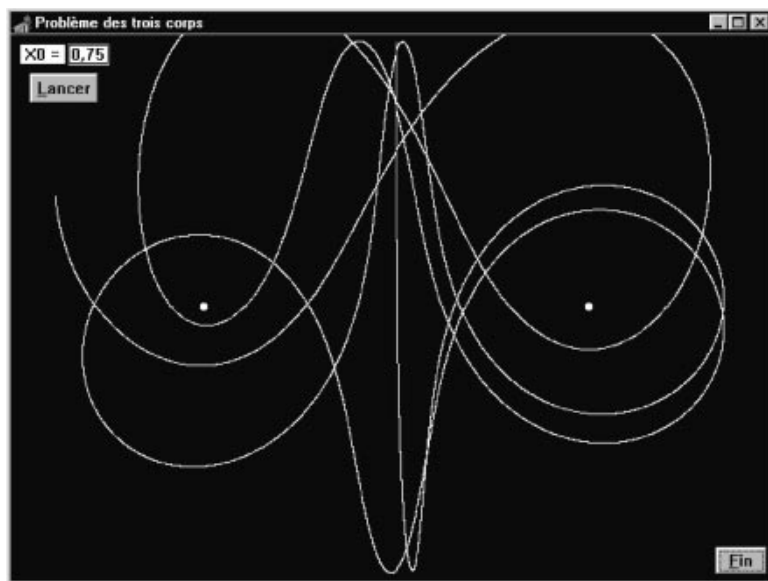


Figure 2

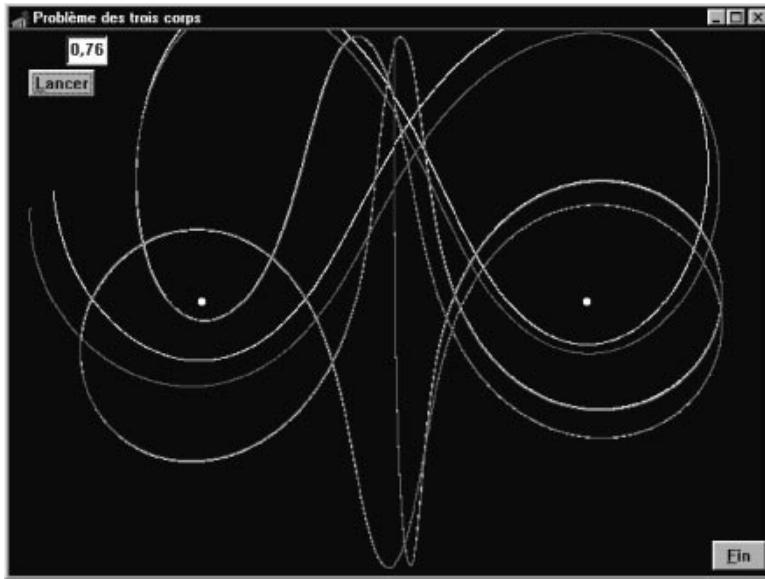


Figure 3

Ce qui caractérise les systèmes chaotiques c'est la sensibilité aux conditions initiales. Ici on peut les modifier d'une toute petite quantité et constater que la nouvelle trajectoire (de couleur distincte), devient très vite différente de la précédente : 0,75 pour la première et 0,76 pour la seconde soit moins de 1 % !

La précision du tracé est due à la méthode de Runge-Kutta, la rapidité du tracé dépend de la machine utilisée.

7. OSCILLATEUR DE VAN DER POL

7.1. Position du problème

L'équation des oscillations libres amorties, s'écrit pour un dipôle RLC :

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0$$

et pour un pendule élastique :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + r \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

On peut se ramener à une seule équation :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Pour ce type d'équation les élèves disposent d'une méthode analytique. La résolution à l'aide de méthodes numériques sur une calculatrice ou sur un ordinateur, permet d'obtenir rapidement le graphe de plusieurs solutions correspondant à des conditions expérimentales variées. On pourra ainsi simuler l'influence du coefficient λ .

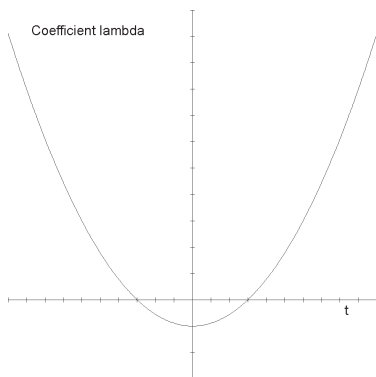
Il apparaît ainsi que son signe est déterminant sur l'évolution de l'amplitude :

amortissement pour $\lambda > 0$; croissance pour $\lambda < 0$

Pour avoir une amplitude constante (oscillations auto-entretenues), il faut se fixer cette valeur d'amplitude à x_{Max} et forcer le coefficient λ à changer de signe dès que l'oscillateur s'en écarte. La méthode proposée par Van der Pol est la suivante :

$$\lambda = \lambda_0 \left[\left(\frac{x(t)}{x_{Max}} \right)^2 - 1 \right]$$

Figure 4



Ce graphe suffit à montrer que le résultat escompté est atteint. L'équation différentielle s'écrit maintenant :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\lambda_0 \left[\left(\frac{x(t)}{x_{Max}} \right)^2 - 1 \right] \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mais ce n'est plus une équation différentielle linéaire et par conséquent la méthode analytique classique ne convient plus ! C'est ici que les méthodes de résolution par l'analyse numérique deviennent indispensables.

D'autre part on a une équation différentielle du second ordre et on a vu que la méthode de Runge-Kutta est destinée à résoudre des équations différentielles du premier ordre.

Un changement de variable permet de remplacer cette équation différentielle du second ordre par un système de deux équations du premier ordre :

posons :
$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$$

On a alors :

$$v(t) = x'(t) \dots \text{et} \quad v'(t) = f(t, x, x') = 2\lambda_0 \left[1 - \left(\frac{x(t)}{x_{Max}} \right)^2 \right] x'(t) - \omega_0^2 x(t)$$

7.2. Résultats

Voici à titre d'exemple deux copies d'écran (cf. figure 5 et 6) avec WGRAPH'X :

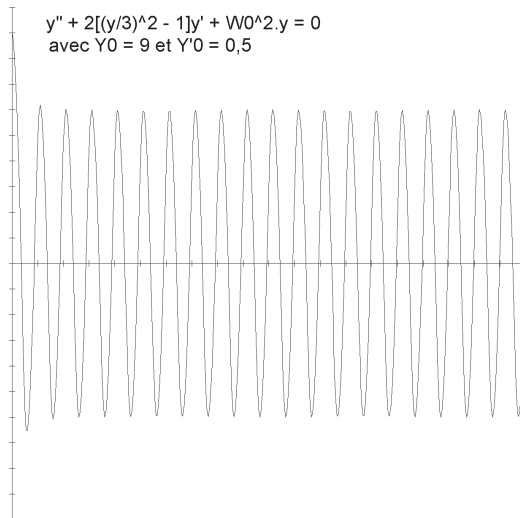


Figure 5

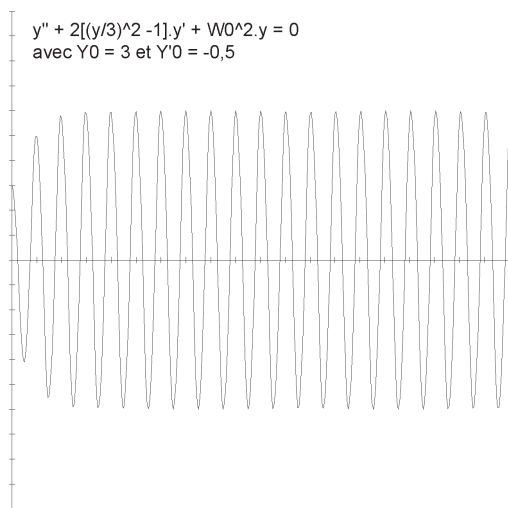


Figure 6

pour lesquels l'efficacité du processus régulateur est nettement perceptible.

8. APPLICATIONS

On peut représenter les oscillations ou le portrait de phase d'un oscillateur de Van der Pol en modifiant les paramètres λ_0 , x_{Max} , le pas h et bien entendu les valeurs initiales $x(0)$ et $(dx/dt)(0)$.

En cliquant dans le plan du portrait de phase, sur le tracé du graphe ou à l'extérieur de ce tracé, on ouvre une fenêtre qui indique la valeur de l'énergie en ce point. Le graphe apparaît alors comme une zone où l'énergie mécanique n'est plus constante, contrairement à ce qu'on obtiendrait avec un oscillateur harmonique. On peut ainsi comparer pour ce type d'oscillateurs la valeur de l'énergie mécanique à celle qui correspond à de l'énergie cinétique pure (sur l'intersection du tracé avec l'axe des vitesses) et à celle qui correspond à de l'énergie potentielle pure (sur l'intersection du tracé avec l'axe des positions).

Les conditions initiales sont évidemment les mêmes pour l'oscillogramme et pour le portrait de phase soit :

$$X(0) = 0,05 \quad \text{et} \quad dX/dt = 0$$

Un bouton permet d'imprimer ces graphes (cf. figures 7 et 8) afin de les exploiter en travaux pratiques éventuellement.

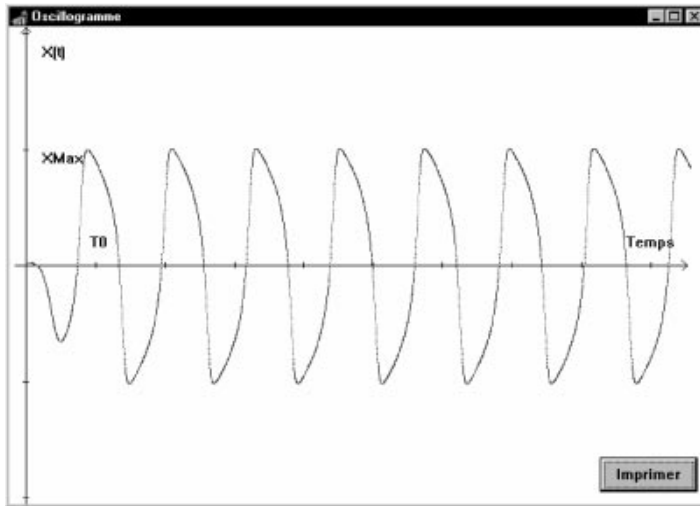


Figure 7

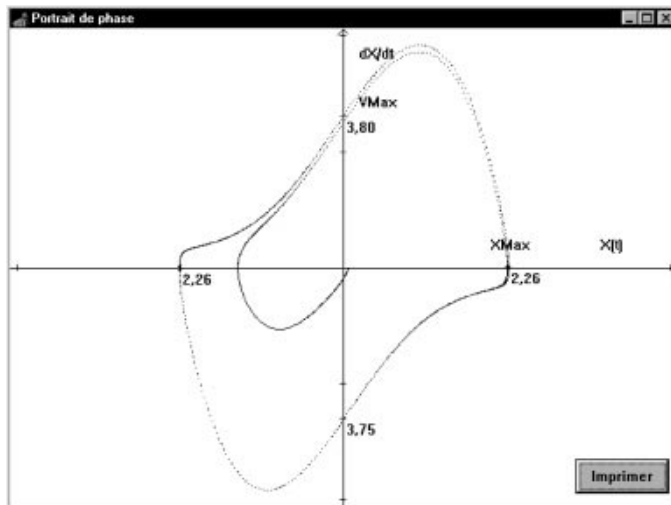


Figure 8

POUR EN SAVOIR PLUS...

- N. BAKHVALOV : «*Méthodes numériques*» - Éditions de Moscou.
- J.-Cl. TRIGEASSOU : «*Recherche de modèles expérimentaux*» - Tec & Doc - Langage et Informatique.
- H. GIÉ et J.-P. SARMANT : «*Le portrait de phase des oscillateurs*» - BUP n° 744.
- P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL : «*L'ordre dans le chaos*» - Hermann.
- L. SARTRE : «*De l'oscillateur harmonique à Van der Pol*» - BUP n° 804.
- Françoise MICHEL et Bernard DESPERRIER : «*Oscillateur de Van der Pol*» - BUP n° 811.