Les dérives de la dérivée

par Jean-Paul ROUX
Lycée J. Holtzer - 42704 Firminy
jean.p.roux@wanadoo.fr

RÉSUMÉ

Dans l'article que je propose, je souhaite prolonger les réflexions exposées dans un récent article sur les ***calculs numériques de valeurs dérivées****. Je veux en particulier montrer que la* ***sensibilité des mesures*** *est un obstacle infranchissable au gain de précision dans les calculs de valeurs dérivées. Et plus profondément, la dérivation est une opération bien plus risquée que* ***l'intégration*** *qui lui est préférable.*

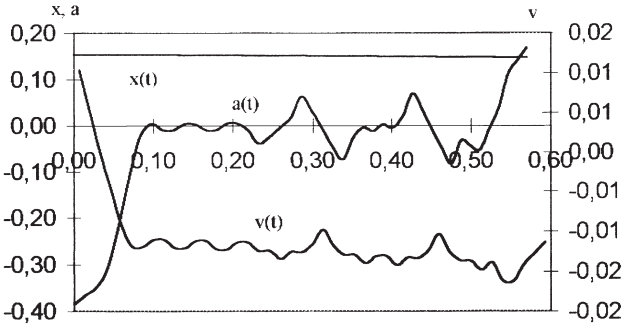
Un récent article du Bulletin de l'Union des Physiciens [1] attire l'attention sur les difficultés de l'emploi de méthodes de dérivation numérique en s'appuyant sur un sujet de bac de 1996. Je voudrais ajouter deux remarques à cet article.

1. UN PETIT INTERVALLE NE FAIT PAS FORCÉMENT GAGNER EN PRÉCISION

Mathématiquement, certes, l'erreur est proportionnelle à h, intervalle entre deux mesures. Mais dans la pratique d'une expérience, contrairement aux calculs théoriques sur les fonctions, le fait de réduire h peut être plus dommageable que profitable.

Considérons par exemple l'expérience qui consiste à lâcher sans vitesse initiale un mobile «à coussin d'air» sur une table à digitaliser inclinée. Le mouvement se déroule sur un axe Oy de plus grande pente et, si on a bien respecté la condition «sans vitesse initiale», on néglige le mouvement le long de l'axe perpendiculaire Ox. Dans la pratique, on n'obtient jamais rigoureusement x = constante.

Étudions, pour une fois, le mouvement le long de Ox. Confions le calcul de la dérivée première et de la dérivée seconde à un tableur qui d'ordinaire donne «de bons résultats».



Observons ces courbes :

– *x(t)* est quasi constante, on le savait. Les points sont alignés sur une droite quasi horizontale de coefficient de corrélation – 0,997 (sur la figure ci-dessus on peut observer des sauts qui sont dus à l'affichage informatique).

– *v(t)* présente des pics. Ceux-ci ne traduisent pas une réalité physique (il y a une légère vitesse transverse qui doit être très proche d'une constante) mais proviennent du fait que deux valeurs mesurées successives sont séparées soit par 0, soit au moins par la sensibilité des mesures (fixée ici par le maillage de la table). Les mesures forment obligatoirement des marches d'escalier, et quand on calcule la dérivée au niveau d'un nez de marche cela donne une valeur de dérivée importante (sans aucune réalité physique) et d'autant plus importante que h est petit !!

– *a(t)* ne fait qu'amplifier la catastrophe ; si on appliquait la deuxième loi de NEWTON on en déduirait que des forces transverses importantes ont agi sur le mobile.
La sensibilité, toujours limitée, des appareils de mesures ne peut qu'amener à ce genre de problème.

2. LE CALCUL NUMÉRIQUE DE DÉRIVÉES EST PÉRILLEUX

L'article cité en référence [1] montre deux exemples où le calcul de la dérivée est erroné. En fait, il y a toujours un risque d'erreur dû au fait qu'on ne sait pas ce qu'il y a entre les points servant aux calculs. Dans la pratique on a peu de problèmes parce que les fonctions sous-jacentes sont en général de «bonnes fonctions» dont les dérivées successives ont des valeurs de plus en plus faibles (nulle pour la dérivée troisième d'un trinôme du second degré par exemple) ; généraliser de telles méthodes peut amener à des erreurs.

En fait, il est possible d'améliorer les résultats par des méthodes plus sophistiquées que celles citées dans l'article [1]. Mais les calculs deviennent alors compliqués

et il est difficile, voire impensable, de les expliquer aux élèves. De toute façon il subsiste des difficultés pour les mesures extrêmes pour lesquelles on ne dispose pas de valeurs à t_{n-1}, t_{n-2}, etc.

Il est à remarquer que les méthodes d'intégration numérique sont beaucoup plus développées et nombreuses que les méthodes de dérivation.

La référence [2] explicite et compare les sources d'erreurs des deux méthodes. La dérivation numérique a tendance à accentuer les erreurs dues à l'imprécision des données contrairement à l'intégration.

Le mathématicien T.J. FLETCHER écrit : *«en analyse numérique, les méthodes d'intégration sont plus précises et plus efficaces que les méthodes de dérivation»* [3].

Le fait d'intégrer produit une sorte de lissage (surtout avec les «bonnes fonctions» de la physique) à l'inverse de ce que j'ai montré dans le premier paragraphe. Les «marches» et «pointes» sont rabotées. Cela veut dire, par exemple, que la bonne méthode pour étudier un mouvement consisterait à :

– mesurer l'accélération,
– en déduire la vitesse par intégration,
– puis la position, par une nouvelle intégration.

Il est facile de voir pourquoi cela n'est pas dans nos pratiques pédagogiques :

• Il est plus facile de réaliser et faire comprendre aux élèves des mesures de positions que des mesures d'accélérations grâce à des accéléromètres dont le fonctionnement n'est compréhensible qu'à partir des lois de la dynamique et mettent en œuvre des phénomènes comme la piézo-électricité.

• Historiquement, la dérivation a été maîtrisée avant l'intégration ; nos élèves étudient la dérivation avant l'intégration.

3. CONCLUSION PROVISOIRE

Nos méthodes de dérivation, qu'elles soient numériques («à la main», ou avec un logiciel) ou graphiques (tracé de la tangente à une courbe) ne peuvent qu'être critiquables, mais difficilement remplaçables.

La meilleure façon de limiter les difficultés venant de cet enseignement consiste :

– à connaître ces problèmes,

– nous tenir au courant de ce qu'apprennent les élèves en cours de mathématiques,
– de temps en temps dire à nos élèves que nos méthodes ont des limites.

Il me paraît sain d'inculquer à nos élèves l'idée qu'il subsiste des doutes sur nos résultats, surtout sur des calculs, y compris lorsqu'on les confie à un logiciel, sans entrer dans les détails. En plus ces résultats sont obtenus dans une séance de TP d'une heure et demie. La science n'a pas été bâtie à cette vitesse !

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jean-Luc GASSER : *«Mathématiques de sciences physiques : problèmes soulevés par le sujet du bac de physique de série S 1996»* - BUP n° 807 - octobre 1998 - p. 1435.

[2] Francis SCHEID : *«Analyse numérique»* - Cours et problèmes - Mc Graw Hill (1986).

[3] T.J. FLETCHER : *«L'algèbre linéaire par ses applications»* - Cedic (1972).