
 BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

Pendule paramétrique avec une aiguille aimantée

par Vincent BOURGES et Maurice GROZELIER
Lycée Etienne Mimard

32, rue Etienne Mimard - 42021 Saint-Etienne Cedex 1

RÉSUMÉ

Il s'agit d'un TP destiné aux élèves de Mathématiques Supérieures d'après l'article de A. DEIBER et J.-P. SIMON paru dans le BUP n° 796 (juillet-août-septembre 1997) «Un oscillateur paramétrique sur rétroprojecteur» auquel on se rapportera pour une description détaillée du montage. Son intérêt réside dans un va-et-vient entre l'expérience et la résolution graphique de l'équation différentielle par Maple d'une part, et d'autre part, par la mise en évidence de caractères propres aux phénomènes non-linéaires : possibilité de régimes multiples pour les mêmes valeurs des paramètres et transition chaotique d'un régime à l'autre.

RAPPEL DU PRINCIPE DE L'EXPÉRIENCE

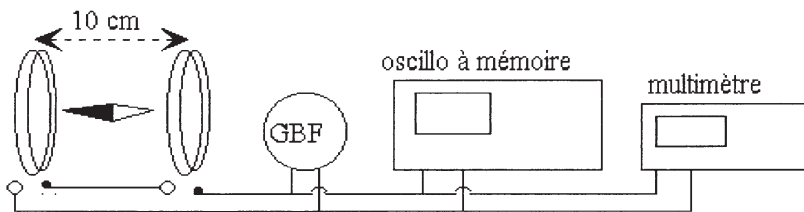


Figure 1

On étudie dans ce TP les divers mouvements d'une aiguille aimantée soumise à la superposition d'un champ magnétique constant et d'un champ magnétique variable. Ces champs sont créés par une paire de bobines de Helmholtz, que l'on alimente par la somme d'une tension continue et d'une tension sinusoïdale dont on peut faire varier la fréquence. L'aiguille est soumise de la part du champ à un couple de forces dont le

 BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

moment est $\mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$, ce qui donne comme équation, en tenant compte d'un amortissement fluide :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + m(B_0 + B_{1m} \sin(\omega t)) \sin(\theta) = 0$$

ou :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 (1 + h \sin(\omega t)) \sin(\theta) = 0$$

$\omega_0 = (mB_0 / J)^{\frac{1}{2}}$ est la pulsation propre de l'aiguille soumise au champ constant, que l'on tire de la mesure de la période à faible amplitude, h est le coefficient de couplage du pendule égal au rapport B_{1m} / B_0 du champ magnétique variable au champ magnétique fixe. Ce pendule dont le terme en $\sin(\theta)$ dépend d'un paramètre de contrôle s'appelle *pendule paramétrique*.

Dans ce qui suit, θ sera noté x et sa dérivée par rapport au temps u .

DÉTERMINATION DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT

On place au départ l'axe des bobines parallèle au champ magnétique terrestre et, le circuit étant branché, on prend au départ du GBF une tension continue de valeur 180 mV. Mesurer la période du pendule et voir que celle-ci varie en fonction de l'amplitude des oscillations, ce qui montre que le pendule n'est pas linéaire. Déterminer le temps nécessaire pour que l'oscillation décroisse, par exemple, de 90° à 20°. Par simulation à l'aide de Maple, on adapte le coefficient de frottement pour retrouver la décroissance expérimentale. $x(t)$ représente l'angle et $u(t)$ la vitesse angulaire ; la pulsation propre a été prise égale à 8, et on introduit $y(t)$, qui est en fait le temps, pour pouvoir représenter x en fonction de y (pour la syntaxe, voir l'aide en ligne de Maple).

```
> with(DEtools) :
> phaseportrait([D(x)(t)=u,D(u)(t)=-0.1*u-8^2*sin(x),D(y)(t)=1],[x,u,y],t=0..60,[[x(0)=1.5,u(0)=0,y(0)=0]],stepsize=0.05,scene=[y,x],title=`coefficient de frottement 0,1`);
>
```

 BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

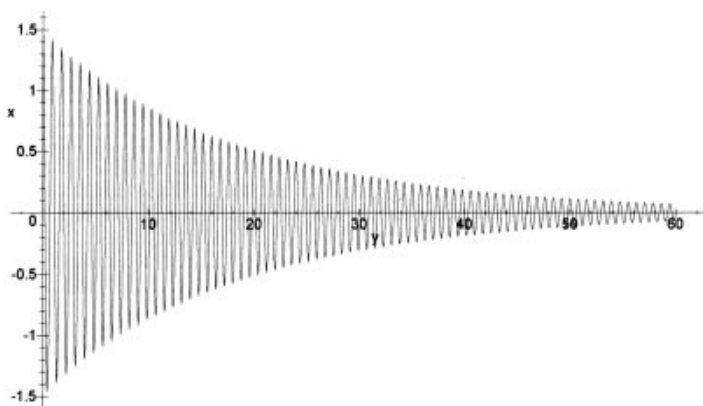


Figure 2 : Coefficient de frottement 0,1.

MOUVEMENT OSCILLANT ET RÉGIME TRANSITOIRE

Ajouter une tension sinusoïdale d'amplitude 80 mV et de fréquence 2,7 Hz (correspondant à une pulsation de l'ordre de 17 rad/s), ce qui donne un coefficient de couplage de 0,5. On mesurera cette tension à l'oscilloscope numérique en utilisant la mémoire en mode Refresh pour visualiser le mouvement lent.

Lancer très légèrement l'aiguille, observer les régimes transitoires et permanent, mesurer la période et vérifier qu'elle est la moitié de la période excitatrice. Retrouver le régime avec Maple en mettant les coefficients convenables dans l'équation.

```
> phaseportrait([D(x)(t)=u,D(u)(t)=-0.1*u-8^2*(1+0.5*sin(17*t))*sin(x)], [x,u], t=0..50, [[x(0)=0.05,u(0)=0]], stepsize=0.05, scene=[t,x], title='fréquence 2,7 Hz et h=0,5');
>
```

 BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

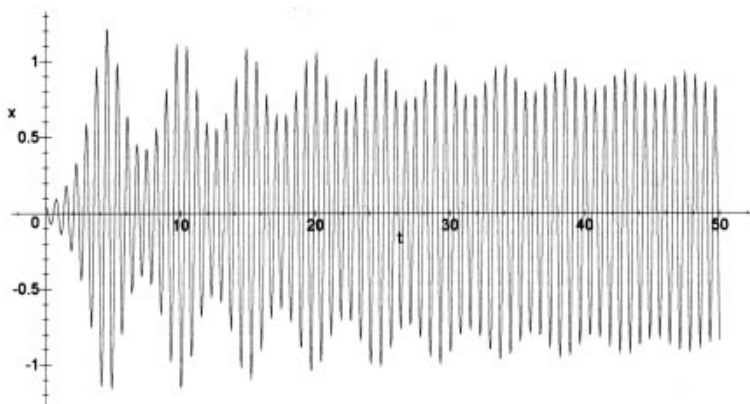


Figure 3 : Fréquence 2,7 Hz et $h = 0,5$.

On retrouve le phénomène de *résonance paramétrique*, la fréquence d'excitation étant le double de la fréquence d'oscillation (penser à une balançoire que l'on pousse des deux côtés). Le régime transitoire se compose de battements qui décroissent progressivement.

Vérifier que l'amplitude des oscillations permanentes augmente si l'on diminue la fréquence d'excitation, jusqu'à ce que le pendule décroche.

DÉCROCHAGE DU PENDULE

Lorsque le pendule décroche, on observe un régime chaotique où l'aiguille hésite, part d'un côté, s'arrête, repart de l'autre. Ce régime peut durer longtemps, mais il finit par retomber sur l'un des quatre régimes permanents possibles :

- arrêt total de l'aiguille,
- régime d'oscillations permanent analogue au régime étudié précédemment,
- accrochage sur l'une ou l'autre des deux composantes tournantes du champ variable, venant du fait qu'un vecteur dont l'amplitude varie sinusoidalement est la somme de deux vecteurs tournant en sens contraire. L'aiguille joue le rôle de l'inducteur dans une machine synchrone élémentaire monophasée. Si l'on n'arrive pas à accrocher l'aiguille, on peut supprimer la tension continue, ce qui permet un accrochage facile, et la remettre ensuite progressivement.

 BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

Le régime d'accrochage étant atteint, mesurer le nombre de tours par seconde et vérifier qu'il est égal à la fréquence excitatrice.

Vérifions avec Maple les différents régimes auxquels on peut aboutir pour des valeurs identiques des coefficients, la seule différence étant le choix des conditions initiales.

RÉGIME CHAOTIQUE SUIVI D'UN ACCROCHAGE

On se place à 2,2 Hz ; h est toujours égal à 0,5 ; les conditions initiales seront $x(0) = 0,7$ et $u(0) = 0$.

```
> phaseportrait([D(x)(t)=u,D(u)(t)=-0.1*u-8^2*(1+0.5*sin(14*t))*sin(x)], [x,u], t=0..150, [[x(0)=0.7,u(0)=0]], stepsize=0.05, scene=[t,x], title='régime chaotique et accrochage';
x(t)', linecolor=black);
```

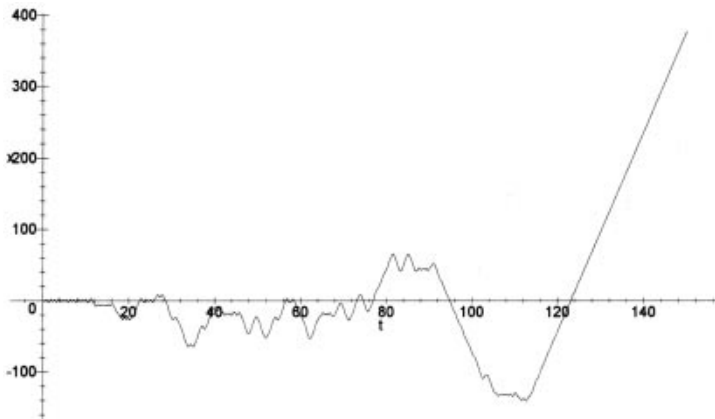


Figure 4 : Régime chaotique et accrochage ; $x(t)$.

On constate un régime chaotique qui se transforme vers 110s en un accrochage sur le champ tournant dans le sens direct : l'aiguille tourne alors régulièrement en suivant le champ. On obtient le diagramme de phase en traçant u en fonction de x ; la première partie correspondant au régime chaotique est une portion d'attracteur étrange.

 BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

```
> phaseportrait([D(x)(t)=u,D(u)(t)=-0.1*u-8^2*(1+0.5*sin(14*t))*sin(x)], [x,u], t=0..150, [[x(0)=0.7,u(0)=0]], stepsize=0.05, scene=[x, u], title='diagramme de phase');
```

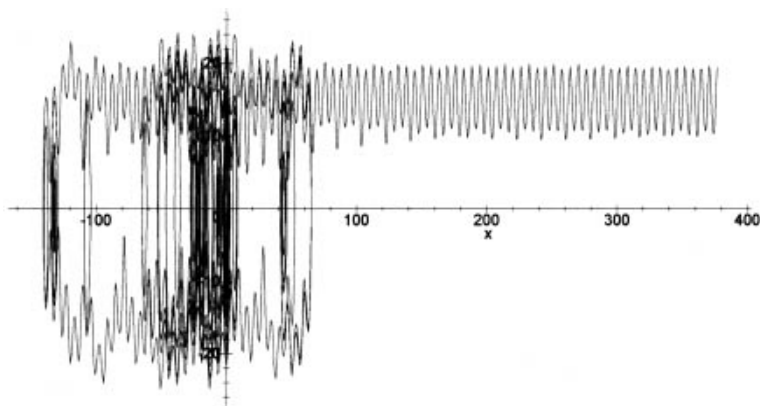


Figure 5 : Diagramme de phase.

RÉGIME CHAOTIQUE SUIVI D'OSCILLATIONS SINUSOÏDALES

On prend pour conditions initiales : $x(0) = 1$ et $u(0) = 0$. Après un court régime transitoire chaotique, l'aiguille oscille de façon sinusoïdale.

```
> phaseportrait([D(x)(t)=u,D(u)(t)=-0.1*u-8^2*(1+0.5*sin(14*t))*sin(x)], [x,u], t=0..100, [[x(0)=1,u(0)=0]], stepsize=0.05, scene=[t,x], title='chaos suivi d'oscillations sinuïdales', linecolor=black);
```

 BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

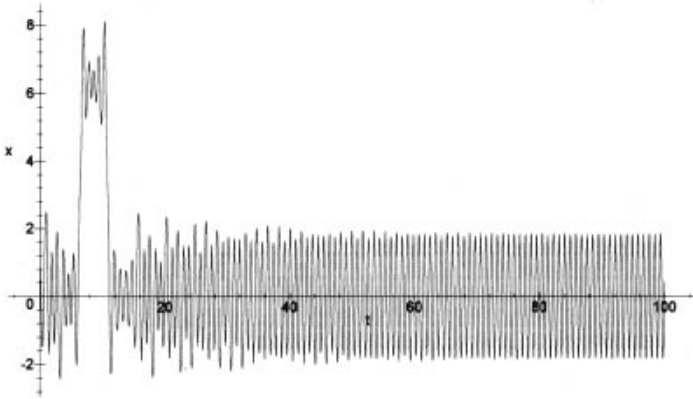


Figure 6 : Chaos suivi d'oscillations sinusoïdales.

```
> phaseportrait([D(x)(t)=u,D(u)(t)=-0.1*u-8^2*(1+0.5*sin(14*t))*sin(x)], [x,u], t=80..100, [[x(0)=1,u(0)=0]], stepsize=0.05, scene=[x,u], title='diagramme de phase', linecolor=black);
```

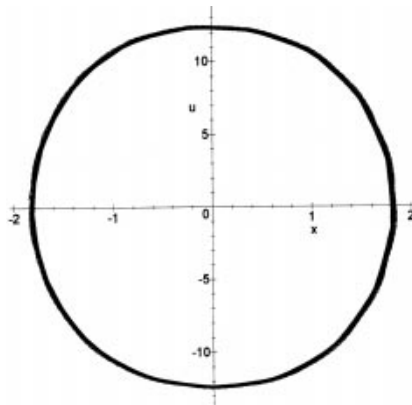


Figure 7 : Diagramme de phase.

L'aspect du portrait de phase montre que les oscillations sont sinusoïdales.

BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

CONCLUSION

Les enseignements que l'on peut tirer de ce TP sont nombreux.

Il s'agit d'un phénomène *non linéaire* venant de la présence du terme en $\sin(x)$; tous les aspects un peu « bizarres » du TP proviennent de là.

La non-linéarité entraîne la possibilité d'existence de *solutions multiples* ; pour les mêmes valeurs des paramètres : on a vu que, pour 2,2 Hz et $h = 0,5$, on a quatre régimes possibles. Il y en a deux à 2,7 Hz : le repos et les oscillations sinusoïdales. Le changement du nombre de régimes possibles se fait par des *bifurcations*.

L'explication du *régime chaotique* est la suivante : tout changement de régime s'accompagne d'un régime transitoire d'adaptation, qui disparaît progressivement du fait des frottements. Les battements transitoires qui augmentent et diminuent l'amplitude peuvent faire passer l'aiguille « par dessus bord » ; d'où un nouveau régime transitoire pouvant entraîner un nouveau changement de régime, et ainsi de suite. Le régime chaotique est en fait une suite de régimes transitoires et on verra l'aiguille tourner d'un côté, s'arrêter, faire quelques oscillations, repartir... jusqu'à ce que des conditions initiales favorables lors d'une transition stabilisent l'aiguille dans un des régimes permanents dont il ne sortira plus sauf changement des paramètres.

A noter également la *très grande sensibilité* aux paramètres du comportement de l'aiguille. C'est là également un trait distinctif des non-linéarités.

L'ordinateur est une aide indispensable pour la résolution des équations différentielles et la simulation de situations que l'on ne peut atteindre expérimentalement. Les phénomènes naturels, qui occuperont la physique de demain, sont toujours très complexes et non-linéaires ; leur étude nécessitera un usage intensif de cet outil.