

Le câble de Melde

par Gilles REQUIN
Lycée Pierre Corneille - 76000 Rouen

RÉSUMÉ

Nous présentons une étude théorique et expérimentale d'un câble coaxial d'antenne de télévision de longueur 70 m qui se trouvait dans la collection de physique du lycée Corneille. Cette étude peut servir de base à une séance de TP-TD pour les classes de SPE PC et MP en liaison avec les thèmes guides d'onde, lignes à retard... La valeur de la longueur n'est pas critique, on verra plus loin une valeur minimum conseillée ; le prix de la fourniture est d'environ 5 F/m chez un fournisseur de matériel de télévision.

L'étude théorique sera juste rappelée ici ; pour plus de détails on pourra consulter les références [1] à [6]. Nous nous pencherons plus spécialement sur la validité des hypothèses faites habituellement pour le câble «parfait». Puis nous étudierons expérimentalement la propagation et la réflexion en bout de câble d'un «ébranlement» de tension, à la suite de quoi l'étude des ondes stationnaires retrouvera les conclusions de la «corde de Melde» utilisée dans la partie mécanique du programme de Maths Spé. Nous terminerons sur une autre manière d'envisager le problème, à savoir la propagation d'ondes électromagnétiques dans le diélectrique d'un guide d'onde coaxial aboutissant à mettre en relief une dualité des couples (\mathbf{E} , \mathbf{B}) et (v , i).

1. PROPAGATION DES SIGNAUX DE TENSION ET DE COURANT LE LONG D'UN CÂBLE COAXIAL

Le câble présente une capacité linéique Γ et une inductance linéique Λ données par les expressions classiques :

$$\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(b/a)} \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

où l'on note a le rayon de l'âme du câble et b le rayon intérieur de la tresse cylindrique extérieure, ϵ_r est la permittivité relative du diélectrique, sans doute du polyéthylène. Notons que la formule de Λ est établie pour des courants surfaciques sur les deux surfaces de conducteurs en regard, ce qui sera bien vérifié aux fréquences employées dans la suite grâce à l'effet de peau [1].

Nous noterons r la résistance linéique correspondant à la somme des résistances des deux conducteurs. L'imperfection de l'isolement qu'on supposera uniformément répartie apporte une conductance linéique transversale g ; la structure du guide coaxial permet de négliger les pertes par rayonnement [6].

La figure 1 définit le modèle employé dans la suite.

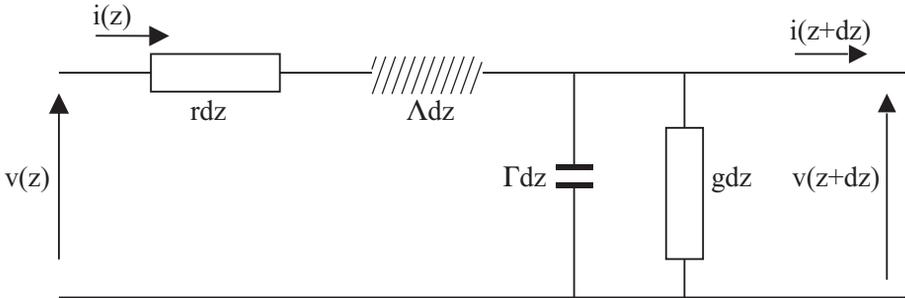


Figure 1

A l'aide des équations de Kirchoff on obtient les deux équations :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} - ri \quad (1)$$

et :

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} - gv \quad (2)$$

d'où vient l'équation des télégraphistes pour une ligne réelle :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + rgv + (r\Gamma + g\Lambda) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3)$$

Dans l'équation (3) on reconnaît les deux premiers termes comme les termes habituels de l'équation classique de propagation avec une célérité $c = 1/\sqrt{\Lambda\Gamma}$, les deux derniers étant les termes de pertes liés aux défauts r et g . Compte tenu des valeurs de Λ et Γ , la célérité c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans la gaine du diélectrique située entre l'âme du câble et la tresse externe [6].

Pour apprécier le poids respectif de ces divers termes examinons une propagation d'onde plane monochromatique de fréquence $\nu > 1$ MHz ($\omega \approx 10^7$ rad/s), ce que les générateurs BF délivrent facilement. En régime forcé l'équation (3) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \left[-\Lambda\Gamma\omega^2 + j\omega(r\Gamma + g\Lambda) + rg \right] v$$

ou :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\Lambda\Gamma\omega^2 \left[1 - j \frac{r\Gamma + g\Lambda}{\Lambda\Gamma\omega} - \frac{rg}{\Lambda\Gamma\omega^2} \right] v \quad (4)$$

Examinons successivement chacun des termes du crochet à l'aide des valeurs expérimentales relevées sur le câble de télévision :

Résistance linéique

Une mesure de la résistance du câble, extrémité en court-circuit, avec un ohmmètre fournit $R = 3,26 \Omega$ pour la longueur de $69,5 \text{ m} \pm 0,1$ m mesurée au mètre ruban soit $r = 4,69 \cdot 10^{-2} \Omega \text{m}^{-1}$. En fait à haute fréquence et compte tenu de la répartition des courants au voisinage de la surface des conducteurs par l'effet de peau, il faudrait réévaluer cette valeur de la résistance linéique. Une première idée est de calculer l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2 / \mu_0 \gamma \omega}$ où γ est la conductivité du cuivre prise égale à $5,8 \cdot 10^7 (\Omega \text{m})^{-1}$, le calcul fournit $\delta = 5,23 \cdot 10^{-2}$ mm pour une fréquence $\omega = 10^7$ rad/s puis de multiplier r par le rapport $(a / \delta) \approx 8$ pour obtenir alors une valeur corrigée $r = 3,75 \cdot 10^{-1} \Omega \text{m}^{-1}$.

Conductance linéique transversale

Le même ohmmètre aux bornes du câble avec extrémité ouverte, fournit $R > 20 \text{ M}\Omega$ (dépassement de calibre) soit $g < 7,1 \cdot 10^{-10} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$.

Capacité linéique

La mesure au pied à coulisse ou au palmer du diamètre du conducteur central donne $2a = 0,85$ mm, le diamètre de la tresse externe (d'épaisseur très faible) est $2b = 5,5$ mm. Notons tout de suite que les 70 m de câble sont enroulés sur une bobine et le diamètre minimum de l'enroulement est égal à 10 cm (l'encombrement est raisonnable !), nous négligerons la courbure du câble vis-à-vis de ses dimensions transversales et considérerons la propagation comme rectiligne. En prenant pour la permittivité diélectrique relative du polyéthylène la valeur $\epsilon_r = 2,3$ [1], l'application de la formule rappelée plus haut donne $\Gamma = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ Fm}^{-1}$. On ne peut pas le vérifier expérimentalement car les mesures ordinaires de capacité (et les capacimètres...) supposent le

régime quasistationnaire, en fait une mesure effectuée par curiosité au capacimètre donne $C = 5,04 \text{ nF}$ soit $7,25 \cdot 10^{-11} \text{ Fm}^{-1}$.

Inductance linéique

Le calcul fournit là encore $\Lambda = 3,9 \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$. Aux fréquences envisagées dans la suite, la formule qui suppose des courants purement surfaciques est valide compte tenu de l'effet de peau ($\delta / a \approx 0,12$), en revanche elle devrait être légèrement retouchée dans le cas où le conducteur central serait constitué de plusieurs brins torsadés [1] mais ce n'est pas le cas pour les câbles de télévision du commerce.

Conclusion : dans le crochet de l'équation (4) le premier terme correctif vaut $9,6 \cdot 10^{-2}$ à 1 MHz et moins pour des fréquences supérieures ; on peut noter que dans ce terme le facteur $g\Lambda$ est négligeable devant $r\Gamma$, les pertes éventuelles viendront de la résistance linéique et non d'un défaut d'isolement. Le second terme, de l'ordre de $3,4 \cdot 10^{-9}$ est parfaitement négligeable, d'autant qu'il diminue encore plus rapidement avec la fréquence. Dans un premier temps nous utiliserons l'équation de propagation du câble parfait ; de même dans les équations (1) et (2) nous ne retiendrons que le terme principal.

La solution générale de l'équation de propagation s'écrira alors sous forme d'ondes planes :

$$v(z, t) = V e^{j(\omega t - kz)} + V' e^{j(\omega t + kz)} \quad (5)$$

avec $k = \omega/c$. De même la solution $i(z, t)$ comporterait deux termes de propagation d'amplitude I et I' , mais on préfère utiliser l'équation (2) simplifiée et mettre i sous la forme :

$$i(z, t) = \frac{V}{R_c} e^{j(\omega t - kz)} - \frac{V'}{R_c} e^{j(\omega t + kz)} \quad (6)$$

où $R_c = \sqrt{\Lambda / \Gamma}$ est la résistance caractéristique de la ligne. A l'extrémité de la ligne, en $z = L$, on branche un récepteur formé par un dipôle résistif R_u . Ce récepteur impose la condition à la limite : $v(L, t) = R_u \times i(L, t)$, les équations (5) et (6) sont alors liées et l'on obtient :

$$\frac{V'}{V} = \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c} e^{-2 jkL} = \rho_0 e^{-2 jkL}$$

le terme de phase représente le retard de l'onde de retour par rapport à l'onde directe lorsqu'on calcule la somme de ces ondes en un point z quelconque. Le facteur ρ_0 est le

coefficient de réflexion en amplitude dont on peut noter que le signe dépend de la valeur de R_u par rapport à celle de R_c .

Avec la condition aux limites du bout de ligne les solutions s'écrivent maintenant :

$$v(z, t) = V(e^{j(\omega t - kz)} + \rho_0 e^{-2jkL} e^{j(\omega t + kz)}) \quad (7)$$

et

$$i(z, t) = \frac{V}{R_c} (e^{j(\omega t - kz)} - \rho_0 e^{-2jkL} e^{j(\omega t + kz)})$$

on note alors le rôle particulier que va jouer la valeur R_c (caractéristique du câble) pour les valeurs possibles de la résistance du récepteur R_u puisque cette valeur annule ρ_0 et par suite le second terme dans chacune des équations (7).

2. PROPAGATION D'UN ÉBRANLEMENT DE TENSION

Un générateur BF (Métrix GX139) alimente le câble coaxial, et, grâce à un Té, l'oscilloscope est aussi relié au départ du câble que nous prenons comme abscisse curviligne du câble $z = 0$. Les connexions sont réalisées à l'aide de câbles coaxiaux courts. Grâce au potentiomètre d'asymétrie le générateur est réglé pour envoyer des créneaux positifs de durée faible devant la période (fréquence d'environ 500 kHz) afin de pouvoir observer sur l'oscilloscope à la fois le signal de départ et le signal de retour à l'intérieur d'une même période. L'oscilloscope a sa base de temps réglé à 2 $\mu\text{s}/\text{div}$ (et la loupe $\times 10$ éventuellement en fonction), les mesures de temps d'aller retour sont effectuées avec des curseurs sur les fronts montant du signal et de son écho. En faisant varier la résistance R_u avec un potentiomètre placé à la sortie du câble on observe les trois types d'oscillogramme suivants (voir figure 2).

Les enregistrements de la figure 2 ont été réalisés avec $R_u = 0$ (court-circuit) pour $R_u < R_c$ et $R_u = \infty$ (extrémité ouverte) pour $R_u > R_c$.

On notera tout d'abord l'inversion d'amplitude de l'écho selon le signe de ρ_0 , et l'absence d'écho pour la valeur $R_u = R_c$. Avec un potentiomètre de 4,7 $k\Omega$ qui réalise l'absence d'écho, on mesure alors à l'ohmmètre $R_{c \text{ exp}} = 79 \Omega$, en voulant explorer plus précisément cette zone, par exemple en composant R_u avec des boîtes de résistance étalonnées, on se heurte à la difficulté présentée par un minimum de $|\rho_0|$ assez plat (la variation de 20 % du rapport R_u / R_c autour de la valeur 1 entraîne une amplitude de l'écho qui reste inférieure à 5 % de l'amplitude du signal de départ, donc confondue dans le bruit de fond), et la difficulté pour l'oscilloscope d'être un bon appareil de zéro à ces fréquences. La valeur calculée de R_c est 77 Ω , en accord avec $R_{c \text{ exp}}$ et proche de la norme des câbles vidéo, soit 75 Ω , ce qui valide les expressions utilisées pour Γ et Λ .

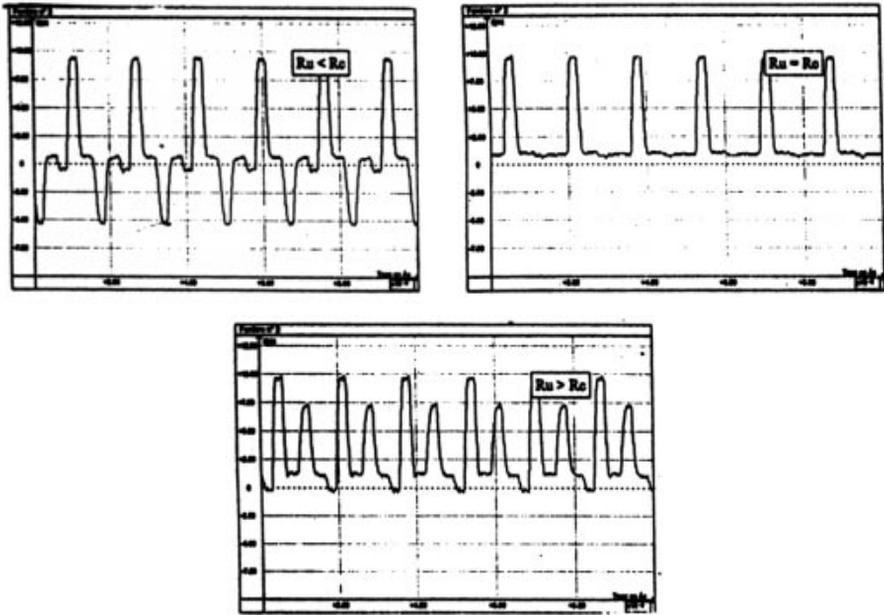


Figure 2

On conclut qu'avec une extrémité fermée sur sa résistance caractéristique le câble se comporte comme un milieu infini ($V' = 0$ dans (5) et (6)) : tension et courant sont en phase...

On remarque aussi un deuxième écho, d'amplitude toujours inversée, dû à la réflexion sur la résistance de sortie du générateur en $z = 0$. $R_s = 50 \Omega < R_c$ donc $\rho_0 = -0,21$ ce qui impose un changement de signe à la réflexion, le second écho résulte donc soit de un soit de trois changements de signe...

La durée de parcours du signal pour une longueur de 139 m donne $\tau = 714 \text{ ns}$ quelque soit R_u c'est-à-dire une vitesse de propagation $c = 1,95 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ou encore $\epsilon_r = 2,35$, ce qui est compatible avec nos hypothèses de départ sur la nature du diélectrique qui remplit la gaine du câble coaxial. On notera à ce stade qu'une longueur de câble de 30 m donnerait une durée de l'ordre de 300 ns, ce qui serait encore mesurable.

Un dernier fait à noter est la présence d'amortissement après un aller retour dans le câble. L'amplitude de l'écho est affaiblie par rapport à celle du signal de départ, que l'extrémité soit ouverte ou en court-circuit, et ne représente plus qu'environ 70 % de l'amplitude initiale. Pour l'interpréter, reprenons l'équation (4), en ne retenant que le premier terme correctif, et réécrivons la sous forme d'une équation de dispersion :

$$k^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 - jr \Gamma \omega \quad (4')$$

que l'on résout en posant $k = k' + jk''$. Avec l'hypothèse $k'' \ll k'$, ceci donne $k' = \omega / c$ comme attendu et $k'' = - (1 / \delta')$ où $\delta' = 2 \sqrt{\Lambda / R} / r = 2 R_c / r$. δ' représente une distance typique d'atténuation exponentielle, indépendante de la fréquence d'ailleurs, qui vaut $\delta' = 403,5 \text{ m}$. Après un parcours de $2L = 139 \text{ m}$ l'amplitude initiale est multipliée par le facteur $e^{-2L/\delta'} = 0,71$. On met bien ainsi en valeur l'amortissement du signal dans sa propagation le long du câble réel. Pour terminer remarquons que l'amplitude du second écho est d'environ 12 %, ce qui correspond sommairement à $(0,71)^2 \times 1 \times 0,21 = 0,11$ soit le produit des facteurs de transmission et des facteurs de réflexion.

3. ONDES STATIONNAIRES DANS LE CÂBLE

L'entrée du câble est maintenant alimentée par une tension sinusoïdale de fréquence ν (le générateur monte jusqu'à 10 MHz environ). Pour simplifier, on ne traite que les cas de l'extrémité ouverte ou en court circuit, il suffit alors de faire varier la fréquence du générateur et d'observer sur l'oscilloscope (bande passante 20 MHz) les maxima d'amplitude du signal qui se produisent régulièrement pour des fréquences de résonance. Les fréquences sont mesurées au fréquencemètre Métrix GX240 dont la BP est de 120 MHz, branché en parallèle, les connexions étant réalisées en câble coaxial court et Té coaxial également.

3.1. Extrémité en circuit ouvert

Avec la valeur $\rho_0 = +1 (R_u \infty)$, les équations (7) se simplifient et l'on peut alors revenir aux valeurs réelles de $v(z, t)$ et $i(z, t)$; on obtient :

$$v(z, t) = 2V \cos k(z - L) \cos(\omega t - kL)$$

$$i(z, t) = 2 \frac{V}{R_c} \sin k(L - z) \sin(\omega t - kL)$$

On reconnaît bien les expressions classiques d'ondes stationnaires, la stationnarité de la phase, la présence des nœuds et ventres de tension et de courant... L'oscilloscope, situé en $z = 0$, repérera un ventre de tension si $kL = p \times \pi$ où p est un entier soit, comme

$k = \omega / c$, si $v = p(c / 2L)$ ou encore $L = p\lambda / 2$, ce que l'on vérifie en mesurant les fréquences de résonance. Entre deux maxima le signal passe par un minimum noyé dans le bruit de fond et donc trop difficilement repérable en fréquence.

Fréquences de résonance ν (MHz)	1,34	2,76	4,12	5,60	6,89	8,34	9,74
Longueurs d'onde $\lambda = c / \nu$ (m)	145,5	70,65	47,33	34,82	28,3	23,4	20,0
Nombre de fuseaux $p = 2L / \lambda = \nu / \nu_0$	1	2	3	4	5	6	7

En posant $\nu_0 = c / 2L$, la fréquence fondamentale, et en établissant un relevé des valeurs des fréquences de résonance en fonction de p , en y adjoignant les valeurs obtenues un peu plus loin dans le cas de l'extrémité en court circuit, on obtient le graphe de la figure 3 ci-dessous, dont la pente doit être ν_0 . Une modélisation de la courbe obtenue (logiciel Synchronie) fournit $\nu_0 = 1,40$ MHz ce qui conduit à une valeur de la vitesse de phase égale à $1,95 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. C'est la même valeur que celle qui avait été tirée de la durée du trajet de l'ébranlement au paragraphe précédent (on aurait pu attendre un léger écart compte tenu de la distinction vitesse de groupe / vitesse de phase dans le polyéthylène mais la dispersion très faible du milieu pour ces fréquences n'induit pas de différence notable entre ces deux vitesses).

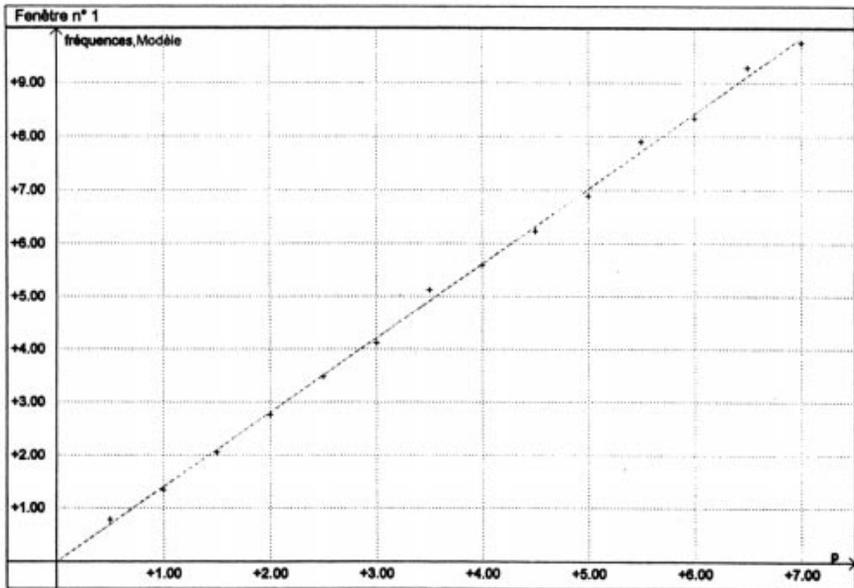


Figure 3

La valeur de ν_0 permet de recalculer «expérimentalement» les nombres $p = 2L / \lambda = \nu / \nu_0$ qui sont trouvés très proches des entiers attendus (précision meilleure que 2 % dès la seconde mesure).

On voit ici l'intérêt d'une longueur de câble de 70 m pour observer un nombre suffisant de résonances ; compte tenu de la limitation des générateurs BF de lycée en haute fréquence à environ 10 MHz, une longueur de 30 m donnerait une fréquence fondamentale de 3,27 MHz et permettrait quand même de mettre en évidence l'essentiel du phénomène à savoir l'existence de trois maxima.

3.2. Extrémité en court circuit

La valeur $R_u = 0$ entraîne $\rho_0 = -1$, et les équations (7) conduisent maintenant aux deux expressions :

$$v(z, t) = 2V \sin k(L - z) \sin(\omega t - kL)$$

$$i(z, t) = 2 \frac{V}{R_c} \cos k(L - z) \cos(\omega t - kL)$$

dans lesquelles les variations de i et v sont inversées par rapport au cas précédent. L'oscilloscope en $z = 0$ repérera les ventres de tension si $kL = (2p' + 1)(\pi / 2)$ ou $\nu = (2p' + 1)(c / 4L)$ ou encore $L = (2p' + 1)\lambda / 4$.

Fréquences de résonance ν (MHz)	0,78	2,05	3,48	5,12	6,23	7,9	9
Longueurs d'onde λ (m)	250	95,1	56,0	38,1	31,3	24,7	21,7
Nombre de fuseaux entiers : p'	0	1	2	3	4	5	6
$\nu / \nu_0 = p$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5

Ici aussi les valeurs de p calculées à partir des fréquences ν et ν_0 sont obtenues très proches d'un demi entier avec une précision de l'ordre de quelques pour-cent dès la seconde mesure.

C'est la présence des fréquences de résonance et le décompte des fuseaux qui rapproche cette manipulation des expériences faites en mécanique avec la corde de Melde. Ici le mode opératoire est complémentaire puisque classiquement en mécanique la fréquence d'excitation est fixe (vibreux à 100 Hz) et on fait varier la tension de la corde (c'est-à-dire la célérité des ondes) pour modifier le nombre de fuseaux. On trouvera dans l'ouvrage du Pr. JAMIN [7] une discussion de «l'expérience de M. Melde» dans laquelle la fréquence d'excitation était fixée par un diapason, avec la référence originale du travail de F. Melde (physicien allemand (1832-1901)).

L'analogie câble-corde peut être développée de deux manières : dans le câble en court-circuit c'est la tension qui sera l'analogie du déplacement de la corde, alors que pour le câble à extrémité ouverte ce sera l'intensité qui sera l'analogie, l'analogie étant fixée par la condition de nœud à l'extrémité du câble.

4. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN GUIDE D'ONDE COAXIAL

Une autre manière d'envisager le problème pourrait être la suivante : la sortie du générateur, constituée de deux «électrodes» entre lesquelles la tension varie à la fréquence ω se comporte comme une antenne qui impose dans le diélectrique du câble, en $z = 0$, un champ \mathbf{E} oscillant à la fréquence ω qui va se propager entre les deux conducteurs cylindriques. Cette manière de voir est initiée par l'apparition, dans l'expression de la célérité des ondes de courant et de tension, des propriétés du diélectrique et non des propriétés ou des dimensions des deux conducteurs.

Le repère cylindrique d'axe Oz définissant les variables radiale et angulaire r et θ , on étudie donc la propagation d'une onde électromagnétique dans l'espace situé entre deux cylindres métalliques parfaitement conducteurs de rayon a pour le cylindre intérieur et b pour le cylindre extérieur. L'espace inter conducteur est rempli d'un milieu diélectrique parfait, linéaire, homogène, isotrope et parfaitement isolant caractérisé par sa permittivité relative ϵ_r . Examinons la possibilité de faire propager dans ce milieu une onde transverse électrique de champ radial (c'est la seule possibilité ici pour des fréquences inférieures à 10 MHz [3]), c'est-à-dire de la forme :

$$\mathbf{E}(r, \theta, z, t) = E(r)e^{j(\omega t - kz)} \mathbf{u}_r$$

Alors l'équation de Maxwell - Gauss entraîne dans le diélectrique non chargé pour $E(r)$ une expression de la forme $E(r) = E_0 a / r$, tandis que l'équation de propagation relative à \mathbf{E} donne comme équation de dispersion $k = \omega / c$ où c a pour valeur $c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$. L'équation de Maxwell Ampère, en l'absence de courant dans le diélectrique, implique pour le champ magnétique l'expression :

$$\mathbf{B}(r, \theta, z, t) = \frac{E_0 a}{cr} e^{j(\omega t - kz)} \mathbf{u}_\theta$$

on observe que le module de \mathbf{B} vaut en tout point $E(r) / c$ et que l'onde est aussi transverse magnétique, les surfaces équiphasées étant constituées des plans $z = cte$, l'onde a une structure d'OPPM dans le diélectrique.

L'examen des conditions aux limites aux voisinages des deux cylindres conducteurs impose :

Les densités surfaciques de charges :

$$\sigma_a(a, z, t) = \epsilon_0 \epsilon_r E_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

et

$$\sigma_b(b, z, t) = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{E_0 a}{b} e^{j(\omega t - kz)}$$

on remarque que la conservation de la charge est respectée pour toute «tranche» d'épaisseur dz , ces deux charges opposées peuvent être interprétées par une capacité linéique Γ de l'ensemble de ces deux cylindres.

Les densités surfaciques de courant :

$$\mathbf{i}_{sa}(a, z, t) = \frac{E_0}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - kz)} \mathbf{u}_z$$

et

$$\mathbf{i}_{sb}(b, z, t) = -\frac{E_0 a}{\mu_0 c b} e^{j(\omega t - kz)} \mathbf{u}_z$$

on peut alors définir pour le conducteur central un courant :

$$i(z, t) = 2\pi a \mathbf{i}_{sa}(a, z, t) \cdot \mathbf{u}_z = \frac{2\pi a E_0}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - kz)} = I_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

et un courant exactement opposé dans le conducteur externe. De même le champ \mathbf{E} défini en tout point du diélectrique un potentiel $V(r, \theta, z)$ donné par la formule de Lorentz : $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$; le potentiel vecteur étant dirigé selon l'axe Oz, la circulation du champ entre le conducteur central et le conducteur externe, en restant dans un plan de côté z permet de définir la tension entre ces deux conducteurs en fonction de z :

$$v(z, t) = V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_0 a \ln(b/a) e^{j(\omega t - kz)}$$

En posant $V_0 = E_0 a \ln(b/a)$ on obtient :

$$V_0 / I_0 = R_c$$

$$i(z, t) = \frac{V_0}{R_c} e^{j(\omega t - kz)}$$

et

$$v(z, t) = V_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

c'est-à-dire les mêmes relations que les relations (5) et (6) dans le cas de la propagation libre dans un câble de longueur infinie, sans onde de retour.

Notons que les conditions aux limites peuvent être rapprochées également, le court-circuit sera représenté par un plan conducteur placé en $z = L$ ($E_r(r, L, t) = 0$); l'extrémité ouverte par une terminaison des cylindres conducteurs en $z = L$ ($B_\theta(r, l, t) = 0$).

De même le défaut d'isolement ou conductance transversale du câble sera représenté par la loi d'Ohm en introduisant une densité radiale de courant proportionnelle à E_r , avec une conductivité γ très faible mais non nulle, un calcul classique fournit $g = \frac{2\pi\gamma}{\ln(b/a)}$. La résistance linéique est plus compliquée à modéliser, elle devrait prendre en compte la pénétration des champs par effet de peau dans les conducteurs ..., c'était déjà le paramètre le moins bien défini dans l'étude électrocinétique.

CONCLUSION

Il apparaît que cette étude des champs électromagnétiques peut se substituer à l'étude de l'équation des télégraphistes et fait double emploi, il y a donc une dualité entre le couple $((v(z, t), i(z, t)))$ utilisé dans l'étude électrocinétique et le couple (\mathbf{E}, \mathbf{B}) utilisé dans la propagation d'onde pour étudier finalement un phénomène unique.

Cette remarque a fait l'objet d'une utilisation systématique dans la modélisation électrocinétique des conditions aux limites pour l'étude de la propagation d'ondes centimétriques dans une ligne de transmission plane d'épaisseur finie par H. BAUDRAND, H. AUBERT et al. [8], [9] à l'ENSEEIH à Toulouse.

Dans le cas du guide coaxial, l'étude expérimentale est facilitée par l'utilisation du couple électrocinétique.

Avec le matériel usuel déjà en place dans une salle de TP des classes préparatoires, le coût du câble n'est pas rédhibitoire et la séance de TP peut être dense avec des aller-retour fréquents entre théorie et pratique, discussion et critique des résultats...

REMERCIEMENTS

Un grand merci à Thomas CHÉNEL qui a bien voulu relire le manuscrit et a bien contribué, par ses critiques et commentaires, à la mise en forme définitive de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. DUSSEAU : «*Circuits électriques utilisant certains éléments constitués par des câbles coaxiaux*» - BUP n° 768, novembre 1994.
- [2] Concours Commun Mines-Ponts - Physique II M - Session 1990.
- [3] Concours ENS Lyon - M' - 1991.
- [4] Concours ENS Ulm - C - 1989.
- [5] Concours ENSI M - Physique 2 - 1996.
- [6] M. SOUTIF : «*Vibrations. Propagation. Diffusion*» - Dunod Université 1970.
- [7] J. JAMIN : «*Cours de physique de l'école polytechnique*» - Tome 3 - Fascicule 1. Gauthier-Villars - 1879.
- [8] H. BAUDRAND et al. : «*Equivalent Network Representation of Boundary Conditions Involving Generalized Trial Quantities*» - Ann. Télécommun. - Vol. 52 - n° 5-6 - 1997.
- [9] F. BOUZIDI, H. AUBERT, D. BAJON et H. BAUDRAND : «*Equivalent Network Representation of Boundary Conditions Involving Generalized Trial Quantities - Application to Lossy Transmission Lines With Finite Metallization Thickness*» - IEEE Transactions on Microwave Theory And Techniques - Vol. 45 - n° 6 - juin 1997.