BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

Oscillateur de Van der Pol

par Françoise MICHEL
Lycée M.M. Fourcade - 13120 Gardanne
Bernard DESPERRIER
Lycée A. Benoît - Isle-sur-La Sorgue
Professeurs de Physique Appliquée
En Section de Technicien Supérieur Électronique

RÉSUMÉ

On réalise un oscillateur de Van der Pol avec des multiplieurs et un amplificateur opérationnel, de façon que la partie utile de la caractéristique ait une pente positive. Le bouclage est effectué par un circuit R, L, C série. Un réglage supplémentaire se fait par une tension continue V_o.

1. INTRODUCTION

La plupart des oscillateurs utilisant l'équation de Van der Pol se servent de la partie centrale à pente négative de la caractéristique V(I) d'un dipôle actif. La résistance différentielle négative qui apparaît permet de compenser la résistance d'un ensemble R, L, C monté en parallèle sur le dipôle. Ceci permet d'obtenir des oscillations quasi-sinusoïdales dont l'amplitude est limitée par la partie non-linéaire du dipôle actif.

Dans le cadre de la partie Physique Appliquée de l'épreuve de Construction pour le BTS Électronique, l'un d'entre nous a développé un oscillateur de Van der Pol utilisant un dipôle actif à pente positive réglable pour obtenir la caractéristique de transfert sortie (S), entrée (E) : S(E) (figure 2).

Lorsque cette pente est égale à 1, on obtient alors une structure classique d'oscillateur en ramenant la tension de sortie sur l'entrée par l'intermédiaire d'un ensemble L, C série. La fréquence d'oscillation est celle de la résonance du circuit L, C série qui présente alors une impédance nulle et permet d'avoir $V_s = V_e$, ce qui assure le fonctionnement de l'oscillateur.

2. **ÉTUDE DU DIPÔLE ACTIF**

Le schéma structurel est donné par la figure 1.

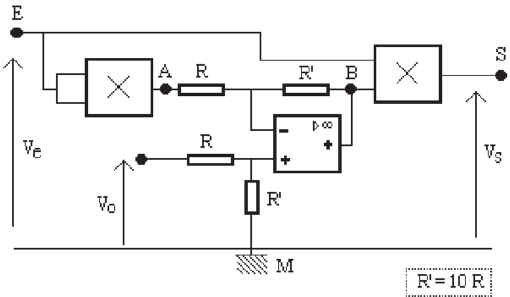

Figure 1

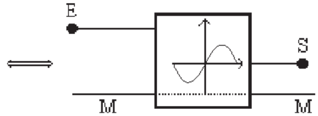

Figure 2

On utilise deux multiplieurs AD 633 JN et un amplificateur opérationnel TL 081. V_o est une tension continue réglable de 0 à 2,3 V. Si on applique en entrée du multiplieur deux tensions x et y, il fournit en sortie une tension égale à xy/10.

On a donc :

$$V_a = \frac{V_e^2}{10}$$

$$V_b = 10\,(V_o - V_a) = 10\,V_o - V_e^2 \text{ (amplificateur de différence)}$$

$$V_s = \frac{V_e V_b}{10} = V_e\left(V_o - \frac{V_e^2}{10}\right) = V_e\,V_o - V_e^3\,/\,10$$

$V_{s(Ve)}$ est donc une cubique qui passe par l'origine, la tangente au point d'inflexion étant donnée par $\left(\dfrac{d\,V_s}{dV_e}\right)_{(Ve\,=\,0)} = V_o$. On a donc, en première approximation : $V_s = V_o \times V_e$ à l'origine des axes.

3. ÉTUDE DE L'OSCILLATEUR

L'oscillateur s'obtient en plaçant un ensemble L, C série entre S et E, et une résistance R_1 entre E et M (figure 3).

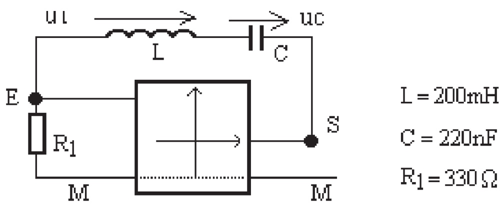

Figure 3

Étude simplifiée

En réglant $V_o = 1\,V$, on a $\left(\frac{d\,V_s}{dV_e}\right)_{(V_e\,=\,0)} = 1$ et, en première approximation, $V_s = V_e$ (dipôle actif) ainsi que $V_e = V_s$ à la fréquence de résonance du dipôle L, C. Le système oscille donc à cette fréquence, soit avec les données du montage :

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 760\ Hz$$

L'étude expérimentale montre que, avec les composants utilisés, il faut régler $V_o = 1{,}1\,V$ pour que les oscillations apparaissent, soit $V_s = 1{,}1 \times V_e$. Ceci est dû à la résistance $R = 30\ \Omega$ de l'inductance. A la résonance, l'effet de pont diviseur entre V_s et V_e *se traduit par :*

$$V_e = R_1\ /\ (R_1 + R)$$

Il faut donc multiplier V_e par $V_o = (R_1 + R)\ /\ R_1 = 360\ /\ 330$ pour retrouver V_s en sortie.

Expérimentalement, nous avons trouvé $f_o = 787\ Hz$, ce qui est très proche de la valeur calculée.

BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

4. MODÈLE DE VAN DER POL

Pour un oscillateur amorti, l'équation différentielle associée peut s'écrire :

$$x'' + Ax' + \omega_0^2\, x = 0$$

ce qui conduit à des pseudo-périodiques amorties si $A = cste > 0$.

Pour obtenir une évolution périodique permanente, le système doit recevoir de l'énergie pour compenser les phénomènes dissipatifs inévitables liés à son fonctionnement.

Il faut donc que le coefficient A puisse changer régulièrement de signe lors de l'évolution du système :
- si $A > 0$, l'amplitude des oscillations diminue,
- si $A < 0$, l'amplitude des oscillations augmente.

Le modèle le plus simple consiste à remplacer A par une expression du second degré du type $A(x) = A(x^2 - p)$, avec $p > 0$, $A(x)$ change de signe pour $x = \pm\sqrt{p}$.

L'équation s'écrit alors :

$$x''+A\ (A^2 - p)\, x' + \omega_0^2\, x = 0$$

Application au montage proposé

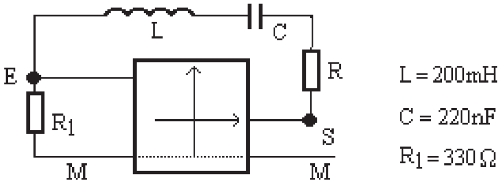

Figure 4

Soit **i** le courant dans le dipôle R, L, C. On a donc :

$$V_s = \frac{V_e\,V_b}{10} = V_e\left(V_o - \frac{V_e^{\,2}}{10}\right) = V_e V_o - \frac{V_e^{\,3}}{10}$$

L'équation différentielle liée au dipôle R, L, C s'écrit :

$$V_s = V_e + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt + Ri$$

Les deux premières équations nous donnent :

$$V_s = V_o R_1 i - \frac{R_1^{\,3} i^3}{10}$$

En reportant dans la troisième et en dérivant, il vient alors :

$$V_o R_1\,\frac{di}{dt} - \frac{3R_1^{\,3}}{10}\,i^2\,\frac{di}{dt} = (R_1 + R)\,\frac{di}{dt} + \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}\,i$$

$$L\,\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[3\,\frac{R_1^{\,3}}{10}\,i^2 - V_o R_1 + (R_1 + R)\right]\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 3\,\frac{R_1^{\,3}}{10L}\left[i^2 - \frac{10}{3R_1^{\,3}}\left(V_o R_1 - (R_1 + R)\right)\right]\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\,i = 0$$

Ce qui est bien la forme attendue. On remarquera que la variable est le courant i et donc la tension d'entrée V_e qui lui est associée ($V_e = R_1 i$).

Par ailleurs le terme p doit être positif et par conséquent :

$$V_o R_1 - (R_1 + R) > 0$$

D'où la condition sur V_o vue précédemment :

$$V_o > \frac{R_1 + R}{R_1}$$

5. RÉSOLUTION

En prenant comme hypothèse que l'oscillateur fonctionne à la pulsation ω_0 de résonance du circuit R, L, C pour laquelle son impédance est minimum et réelle, on peut déterminer l'amplitude des oscillations par la méthode du premier harmonique.

Le courant $i(t)$ est sinusoïdal :

$$i(t) = I_M \cos(\omega_0 t)$$

et donc : $$V_e(t) = R_1 I_M \cos(\omega_0 t) = V_M \cos(\omega_0 t)$$

On a donc :

$$V_s = V_M \cos \omega_0 t \left[V_o - \frac{V_M^{\,2} \cos \omega_0 t}{10} \right] = V_o V_M \cos \omega_0 t - \frac{V_M^{\,3} \cos^3 \omega_0 t}{10}$$

Soit en linéarisant :

$$\cos^3 \omega_0 t = \frac{\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t}{4}$$

$$V_s = V_o V_M \cos \omega_0 t - \frac{3 V_M^{\,3} \cos \omega_0 t}{40} - \frac{V_M^{\,3} \cos 3\omega_0 t}{40}$$

Le terme de pulsation $3\,\omega_0$ est bloqué par le circuit série, et on a pour le terme ω_0 la relation :

$$V_s - V_e = Ri$$

Soit : $$V_o V_M \cos \omega_0 t - \frac{3 V_M^{\,3} \cos \omega_0 t}{40} - V_M \cos \omega_0 t = R \frac{V_M \cos \omega_0 t}{R_1}$$

Il vient, après simplification :

$$V_M = 2 \sqrt{\frac{10}{3}} \sqrt{\frac{V_o R_1 - (R_1 + R)}{R_1}}$$

Remarque

L'équation de Van der Pol peut être présentée sous la forme :

$$x'' - 2\varepsilon\,\omega_0\,(1-\beta\,y^2)\,x' + \omega_0^{\,2}\;y = 0$$

Les oscillations obtenues seront d'autant plus sinusoïdales que le terme ε est petit. En modifiant l'écriture de l'équation différentielle de *i*, il vient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} - \frac{1}{L}\left(V_oR_1 - (R_1 + R)\right)\left[1 - \frac{3R_1^{\,3}}{10\left(V_oR_1 - (R_1 + R)\right)}\right]\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\;i = 0$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\left(V_oR_1 - (R_1 + R)\right)$$

$$\beta = \frac{3R_1^{\,3}}{10\left(V_oR_1 - (R_1 + R)\right)}$$

Pour $1{,}1 < V_o < 2\,V$, $0 < \varepsilon < 0{,}3$ ce qui est assez faible pour observer des oscillations sinusoïdales d'amplitude :

$$I_M = \frac{2}{\sqrt{\beta}}$$

On peut alors montrer que l'amplitude de l'harmonique 3 est :

$$I_{M3} = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\;\varepsilon = 0{,}15\;I_M \qquad \text{pour } V_o = 2\,V$$

ce qui est presque négligeable. Rappelons que $V_e = R_1\;I$ pour les observations à l'oscillographe.

Remarque

Pour mieux étudier la pureté du signal sinusoïdal, on peut visualiser à l'oscillographe la courbe de Lissajoux : $V_e' = f\;(V_e)$ qui, avec des échelles convenables, est un cercle si V_e est sinusoïdal. $V'_e\,(t)$ est obtenue simplement en dérivant $V_e(t)$ à l'aide d'un circuit C, R convenable.

BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE – BUP PRATIQUE

Cet article doit beaucoup au travail remarquable fait par M. Pierre PICARD, professeur au lycée Paul Langevin à Martigues pour une action de formation sur les oscillateurs.

BIBLIOGRAPHIE

– R. GUILLIEN : *«Électronique»* - Tome II, PUF, 1961.

– B. VAN DER POL : *«L'onde électrique»*, 9, 1930, pp. 245-256, 293 et 312.

– J.-P. CARON : *«Oscillateurs sinusoïdaux "LC" : systèmes à réaction positive ou systèmes à résistance dynamique négative»* - BUP n° 628, novembre 1980, pp. 211-231.

– H. GIÉ et J.-P. SARMANT : *«Le portrait de phase des oscillateurs»* - BUP n° 744, mai 1992, pp. 719-755.

– S. MEIER : *«Un modèle expérimental de l'oscillateur de Van der Pol»* - BUP n° 787, octobre 1996, pp. 1475-1483.

Annexe
Matériel et composants

COMPOSANTS MAQUETTE :
Multiplieurs AD633JN (2) ;
Ampli op TL081 (1) ;
Résistance R = 22 kΩ (2)
R' = 220 kΩ (2).

MATÉRIEL :
Alimentation ± 15 V ;
Alimentation variable 0,5 V ;
GBF ; Oscilloscope ;
Inductance variable.

COMPOSANTS SUR SUPPORT :
Résistances : 330 W, 10 kW,
2,2 kW ;
Condensateurs : 1 nF, 220 nF.

PLAN D'IMPLANTATION