

Les montages déphaseurs

par Claude BRESÉ
Lycée Jean Rostand - 67084 Strasbourg

RÉSUMÉ

L'étude des montages déphaseurs présente de nombreux avantages pédagogiques. En plus de la partie pratique (réalisation du circuit, mesures et exploitation des résultats), ils permettent aussi d'approfondir les outils mathématiques utilisés pour l'étude théorique : les figures de Fresnel qu'il est dommage de n'introduire que pour le classique circuit RLC-série, et les nombres complexes qui simplifient l'étude une fois que leurs propriétés mathématiques de base sont acquises, mais qui réservent parfois des surprises lorsqu'il s'agit de revenir à la signification de l'argument d'une fonction de transfert : le déphasage. L'application à un même problème des différentes techniques de calcul envisageables montre qu'elles sont bien cohérentes, à condition de ne pas tomber dans les pièges classiques qui font perdre bien du temps à qui ne prend un jour le temps d'y réfléchir sérieusement.

INTRODUCTION

Les montages déphaseurs illustrent bien les différentes méthodes de calcul et les difficultés rencontrées pour l'étude des montages en régime sinusoïdal. Ils permettent de montrer les avantages d'une figure de Fresnel, ne nécessitant, pour sa construction et son exploitation, que des rudiments de géométrie et de calcul vectoriel, alors que le calcul avec les grandeurs complexes peut être plus long et source d'erreurs, parfois difficiles à éviter parce que la réalité physique est masquée dans cette approche plus mathématique.

Par ailleurs, ces montages sont faciles à mettre en œuvre puisqu'ils ne requièrent pas de matériel particulier et pourraient s'intégrer dans les séances de TP sur l'oscilloscope, sur l'amplificateur opérationnel ou sur les circuits RC dans pratiquement toutes les sections de lycée classique ou technique, ainsi que des classes post-baccalauréat. L'étude théorique n'est pas indispensable, mais la vérification de ces lois non-linéaires peut être proposée à partir des mesures expérimentales ; cela amène les élèves à un travail de réflexion intéressant sur les possibilités de travailler sur papier millimétré, à

condition de se ramener à un modèle linéaire par choix des variables à porter sur les axes, ou bien à utiliser un tableur-grapheur pour une modélisation.

La fonction de transfert des montages déphaseurs est telle que $|T| = 1$ (amplitudes de u_e et de u_s égales) et $\arg |T| \neq 0$ (déphasage non nul entre u_s et u_e).

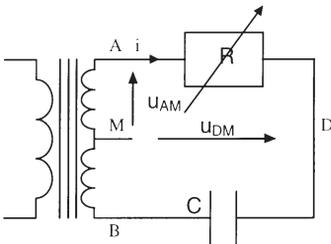
1. LES MONTAGES AVEC TRANSFO À POINT MILIEU :

Dans le montage avec transformateur à point milieu, on s'intéresse au déphasage φ de u_{DM} par rapport à u_{AM} . La loi des mailles permet d'écrire :

$$u_{AB} = Ri + u_C$$

Par ailleurs, $u_{AM} = u_{AB} / 2$, et u_C est en quadrature retard sur Ri.

En pratique, on remarquera, comme l'indique d'ailleurs la figure de Fresnel, que u_{MD} est en retard sur u_{AM} , que ce déphasage peut varier de 0 à $-\Pi$, et que l'amplitude de ces deux tensions est constante, égale à l'amplitude de la tension d'alimentation. Le point D décrit la moitié inférieure du cercle lorsqu'on fait varier l'un des trois paramètres R, C ou ω de 0 à l'infini, en passant par le point Q pour lequel $I/C\omega = Ri$ et $\varphi = -\Pi/4$.



Montage 1

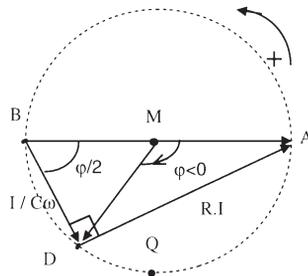


Figure 1

Figure 1

L'étude par les vecteurs de Fresnel utilise la propriété géométrique du cercle concernant l'angle ABD, égal à la moitié de l'angle AMD ; le point D est nécessairement sur la partie inférieure du cercle, puisque le vecteur représentant u_C doit être en retard

sur le vecteur représentant le courant i , lui-même colinéaire au vecteur représentant u_R .
On en déduit donc :

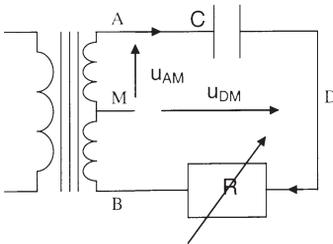
$$\tan (\varphi / 2) = -RC\omega$$

Composants

- Transformateur à point milieu (0, 6, 12 V),
- C = 0,5 μ F ou 0,2 μ F étalon,
- R boîtes à décades $\times 100$, $\times 1000$ et $\times 10000$.

Si on inverse le rôle de R et de C, le lieu des points possibles pour D est le demi-cercle supérieur, et on obtient cette fois-ci :

$$\tan (\varphi / 2) = 1/RC\omega$$



Montage 2

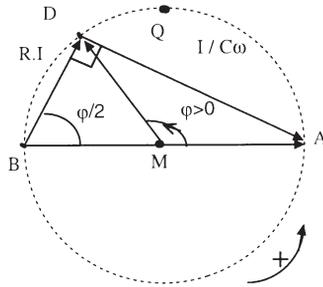


Figure 2

Figure 2

Dans le cas de ce montage, le signe du déphasage de U_{DM} par rapport à U_{AM} est positif, alors que pour le montage précédent, il était négatif.

Étude par les nombres complexes

Montage 1

Maille AMBDA :

$$2 \underline{U}_{AM} = [R - j / (C\omega)] \cdot \underline{I}$$

Maille AMDA :

$$\underline{U}_{AM} = \underline{U}_{DM} + R \cdot \underline{I}$$

Montage 2

Maille AMBDA :

$$2 \underline{U}_{AM} = [R - j / (C\omega)] \cdot \underline{I}$$

Maille AMDA :

$$\underline{U}_{AM} = \underline{U}_{DM} [j / (C\omega)] \cdot \underline{I}$$

En éliminant \underline{I} entre ces deux relations, on obtient :

$$\underline{T}_1 = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

En éliminant \underline{I} entre ces deux relations, on obtient :

$$\underline{T}_2 = \frac{-1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Ces deux fonctions de transfert complexes sont les mêmes que celles des deux montages à amplificateur opérationnel qui suivent et seront exploitées dans la troisième partie.

2. LES MONTAGES DÉPHASEURS À AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

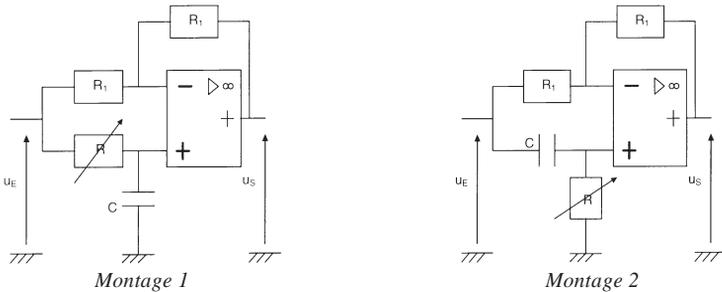


Figure 3

Les montages fonctionnant en régime linéaire, et l'amplificateur opérationnel étant idéal, il y a égalité des potentiels \underline{V}_+ et \underline{V}_- . Par ailleurs, le courant \underline{I}_+ étant nul, le potentiel \underline{V}_+ peut être exprimé facilement en considérant le diviseur de tension à vide formé par \underline{R} et \underline{C} . D'autre part, $\underline{I}_- = 0$ permet d'exprimer simplement le potentiel \underline{V}_- en appliquant le théorème de superposition ou le théorème de Millman :

$$\underline{V}_- = [\underline{U}_S + \underline{U}_E] / 2; \underline{V}_+ = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \cdot \underline{U}_E \quad \left| \quad \underline{V}_- = [\underline{U}_S + \underline{U}_E] / 2; \underline{V}_+ = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \cdot \underline{U}_E$$

En exprimant l'égalité des potentiels \underline{V}_+ et \underline{V}_- , on obtient l'expression des fonctions de transfert :

$$\underline{T}_1 = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad \Bigg| \quad \underline{T}_2 = \frac{-1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Choix de composants pour l'étude expérimentale

$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 15 \text{ nF}$ et la résistance variable R est constituée de boîtes à décades $\times 1000$ et $\times 10000$. On pourra expérimenter et comparer les deux montages en traçant une courbe $\varphi(f)$ ou $\varphi(R)$ avec une fréquence du signal d'entrée de l'ordre de 1500 Hz.

On remarquera tout d'abord l'égalité des amplitudes de u_S et de u_E ; le premier montage introduit un retard de u_S par rapport à u_E , réglable entre 0 et $-\Pi$, alors que le second introduit une avance de u_S par rapport à u_E , réglable entre 0 et $+\Pi$. Ces montages sont utiles pour corriger les défauts de certains montages (déphasage introduit par un amplificateur opérationnel réel dans un amplificateur devant fonctionner à haute fréquence).

3. EXPLOITATION DES EXPRESSIONS COMPLEXES \underline{T}_1 ET \underline{T}_2

En posant $x = RC\omega$, ($x > 0$), on obtient :

$$\underline{T}_1 = \frac{1 - jx}{1 + jx} \quad \text{et} \quad \underline{T}_2 = \frac{-1 + jx}{1 + jx}$$

Le calcul du module de ces fonctions de transfert comme rapport des modules du numérateur et du dénominateur ne pose pas de problème, et l'on obtient facilement $T_1 = T_2 = 1$ (égalité des amplitudes).

Pour ce qui est du calcul de l'argument de ces fonctions de transfert, il faut être beaucoup plus prudent.

Nous noterons φ l'argument de \underline{T} , soit l'argument $\varphi_{NUM} - \varphi_{DEN}$, et donc le déphasage de u_S par rapport à u_E .

Rappels

1. L'argument d'un rapport de deux complexes est égal à la différence des arguments du numérateur et du dénominateur.
2. Pour un nombre complexe \underline{N} de forme algébrique $a + jb$, $\arg(\underline{N}) = \arctan(b/a)$, solution valable uniquement si a est positif ; c'est la solution $[\arctan(b/a) + \Pi]$ qui est juste si a est négatif.

L'exemple de ces deux montages déphaseurs illustre bien l'importance de tenir compte des deux solutions congrues modulo Π qui se présentent lorsqu'on écrit l'argument. En effet, le calcul simple appliqué à \underline{T}_1 ne pose pas de problème, mais est erroné s'il est appliqué à \underline{T}_2 , et amène à deux solutions identiques :

$$\begin{aligned} \arg(\underline{T}_1) &= \arg(1 - jx) - \arg(1 + jx) = \arctan(-x) - \arctan(x) = -2 \arctan(x) \\ \Rightarrow \tan(\varphi/2) &= -x \end{aligned}$$

...solution juste...

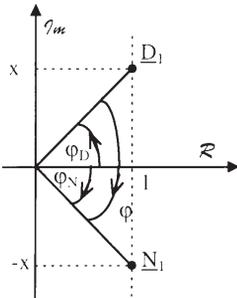
$$\begin{aligned} \arg(\underline{T}_2) &= \arg(-1 + jx) - \arg(1 + jx) = \mathbf{\arctan(-x)} - \arctan(x) = -2 \arctan(x) \\ \Rightarrow \tan(\varphi/2) &= -x \end{aligned}$$

...solution fausse...

- Ce risque d'erreur est supprimé si on passe par une représentation dans le plan complexe des arguments φ_N et φ_D du numérateur et du dénominateur.

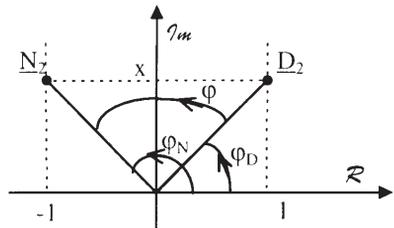
$$\underline{T}_1 = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \underline{N}_1 / \underline{D}_1$$

$$-\Pi/2 < \varphi_N < 0 \quad \text{et} \quad 0 < \varphi_D < +\Pi/2$$



$$\underline{T}_2 = \frac{-1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \underline{N}_2 / \underline{D}_2$$

$$+\Pi/2 < \varphi_N < \Pi \quad \text{et} \quad 0 < \varphi_D < +\Pi/2$$



$$\varphi = \varphi_N - \varphi_D = 2 \cdot \varphi_N$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_N - \varphi_D = \Pi - 2 \cdot \varphi_D \\ \Rightarrow \varphi/2 &= \Pi/2 - \varphi_D \end{aligned}$$

D'où :

$$\tan(\varphi/2) = \tan(\varphi_N) = -x$$

La relation trigonométrique

$\tan(\Pi/2 - \alpha) = 1/\tan(\alpha)$ conduit à :

$$\tan(\varphi/2) = 1/\tan(\varphi_D) = 1/x$$

•• Une autre solution consiste à déduire la relation donnant le déphasage φ_2 introduit par le deuxième montage à partir de celle caractérisant le premier, en remarquant que $T_2 = -T_1$:

$$T_2 = -T_1 \Rightarrow \arg(T_2) = \pi + \arg(T_1) \Leftrightarrow \varphi_2 = \pi + \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2/2 = \pi/2 + \varphi_1/2$$

La relation trigonométrique $\tan(\Pi/2 + \alpha) = -1/\tan(\alpha)$ permet donc de passer de :

$$\tan(\varphi_1/2) = -x$$

à :

$$\tan(\varphi_2/2) = 1/x$$

••• Une dernière méthode consiste à ramener le rapport des complexes à une forme algébrique, en multipliant le dénominateur par son expression conjuguée ; le dénominateur réel de la fraction n'intervient pas dans l'expression de l'argument :

$$T_1 = \frac{1 - jx}{1 + jx} \cdot \frac{1 - jx}{1 - jx} = \frac{1 - x^2 - 2jx}{1 + x^2}$$

d'où :
$$\arg(T_1) = \arctan \frac{-2x}{1 - x^2} *$$

En identifiant $(-x)$ et $\tan(\varphi/2)$ dans la relation trigonométrique :

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \cdot \tan(\varphi)}{1 - \tan^2(\varphi)} \Leftrightarrow \tan(\varphi) = \frac{2 \cdot \tan(\varphi/2)}{1 - \tan^2(\varphi/2)}$$

on retrouve bien l'expression : $\tan(\varphi/2) = -x$.

* A noter que si $(1 - x^2) < 0$, c'est-à-dire si $x > 1$, ce qui correspond aussi à $R \cdot I < I / C\omega$, ou encore à une position du point D située entre Q et B sur la figure 1, et donc à φ compris entre $-\Pi/2$ et $-\Pi$, il faut écrire :

$$\arg(T_2) = \arctan \frac{2x}{-1 - x^2} + \Pi$$

ce qui n'a toutefois pas d'influence sur l'expression finale puisque $\tan(\varphi) = \tan(\varphi - \Pi)$.

Le cas particulier $x = 1$ où $\frac{-2x}{1-x^2} \rightarrow -\infty$ correspond à $\varphi \rightarrow -\Pi/2$; le point D se trouve en Q sur la figure 1.

$$\underline{T}_2 = \frac{-1+jx}{1+jx} \cdot \frac{1-jx}{1-jx} = \frac{-1+x^2+2jx}{1-x^2}$$

d'où :

$$\arg(\underline{T}_2) = \arctan \frac{2x}{-1+x^2} \quad **$$

En divisant numérateur et dénominateur par x^2 , on se ramène à :

$$\arg(\underline{T}_2) = \arctan \frac{2/x}{1-(1/x^2)}$$

expression qui permet d'identifier $(1/x)$ et $\tan(\varphi/2)$ dans la relation trigonométrique :

$$\tan(\varphi) = \frac{2 \cdot \tan(\varphi/2)}{1 - \tan^2(\varphi/2)}$$

on retrouve ainsi l'expression : $\tan(\varphi/2) = 1/x$

** On remarquera à nouveau que $(-1+x^2) < 0$, c'est-à-dire $x < 1$, correspond à $R \cdot I < I / C\omega$, ou encore à une position du point D située entre Q et B sur la figure 2, et donc à φ compris entre $+\Pi/2$ et $+\Pi$, il faut écrire :

$$\arg(\underline{T}_2) = \arctan \frac{2x}{-1+x^2} + \Pi$$

ce qui n'a toutefois pas d'influence sur l'expression finale puisque $\tan(\varphi) = \tan(\varphi - \Pi)$.

Annexe 1

Les résultats expérimentaux ci-dessous (voir courbes 1 et 2) ont été obtenus par des mesures de déphasages à l'oscilloscope avec les montages à amplificateur opérationnel, à une fréquence de 1 kHz, et modélisés avec le logiciel REGRESSI par un groupe d'élèves, en séance de TP.

Courbe 1 : $\Phi = -2 \cdot \arctan(R.C.2\pi.1000)$

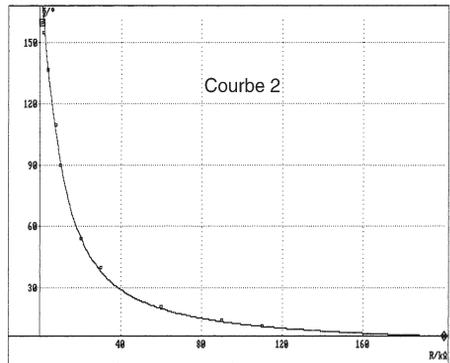
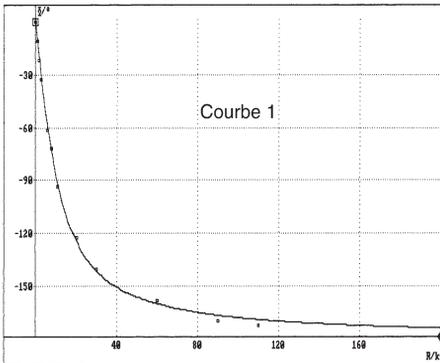
$$C = 15.123 \text{ n} \pm 23 \text{ p}$$

Écart relatif sur $\Phi = 2.0 \%$.

Courbe 2 : $\Phi = 2 \cdot \arctan(1 / (R.C.2\pi.1000))$

$$C = 15.441 \text{ n} \pm 78 \text{ p}$$

Écart relatif sur $\Phi = 3.7 \%$.



Pour une exploitation des mesures sur papier millimétré, il faudrait tracer $\tan(\varphi / 2)$ en fonction de R (et vérifier l'alignement des points de mesure sur une droite passant par l'origine et de coefficient directeur égal à $-2\pi fC$) pour la courbe 1, alors que la courbe 2, il faudrait tracer $\tan(\varphi / 2)$ en fonction de $1/R$ (et vérifier l'alignement des points de mesure sur une droite passant par l'origine et de coefficient directeur égal à $1 / 2\pi fC$).

Annexe 2

Rappel des méthodes de mesure de déphasage

On peut utiliser la base de temps de l'oscilloscope et la proportionnalité entre le *déphasage angulaire* φ (variant de 0 à 2π), et le *déphasage temporel* τ (variant de 0 à T).

Cette méthode donne le signe du déphasage. Pour la figure A, la tension u_1 est en avance sur la tension u_2 , ce qui correspond à un déphasage $\varphi_{1/2}$ (de u_1 par rapport à u_2) positif. Le *déphasage temporel* τ vaut une division, la période correspondant à dix divisions, on obtient pour le déphasage angulaire $\varphi = (1/10) \cdot 2\pi$ radians ou $\varphi = (1/10) \cdot 360^\circ$.

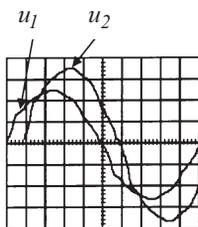


Figure A

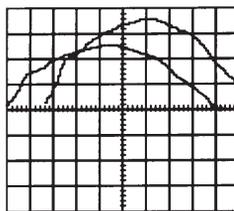


Figure B

Il est commode de procéder à un étalonnage de l'axe des abscisses en décalibrant la base de temps (méthode des neuf carreaux par demi-période, pour une lecture en degrés) : sur la figure B, une demi-période, soit un déphasage de 180° , correspondant à neuf divisions, on peut lire le déphasage angulaire directement, puisque une division correspond alors à 20° .

Pour les oscilloscopes possédant une touche d'expansion de la base de temps (EXP \times 5), parfois appelée «loupe de l'oscillo.», il est commode de faire correspondre, en décalibrant la base de temps, une période à 7,2 divisions, de manière à obtenir, en actionnant la touche EXP, $7,2 \times 5 = 36$ divisions par période, soit une division pour 10° .

En travaillant en mode X/Y, la méthode de l'ellipse fournit $\sin \varphi$ en faisant le rapport de la petite hauteur de l'ellipse par sa grande hauteur. La solution φ est comprise

entre 0 et $\pi/2$ si l'ellipse occupe les cadrans 1 et 3 : pour la B', on a $\sin \varphi = 4,4 / 6$ d'où $\varphi = 0,82$ rad.

Il faut par contre retenir la solution $\varphi' = \pi - \varphi$, si l'ellipse occupe les cadrans 2 et 4 : pour la figure A', on a aussi $\sin \varphi = 4,4 / 6$, mais $\varphi = \pi - 0,82 = 2,32$ rad.

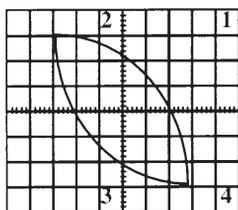


Figure A'

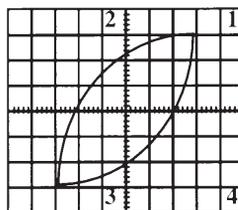


Figure B'

Cette méthode ne donne pas le signe du déphasage et devient imprécise pour les tensions en quadrature de phase ; elle est par contre plus précise que la précédente pour les petites valeurs de déphasages.