Mathématiques et Sciences Physiques : problèmes soulevés par le sujet du bac de physique série S 1996

par Jean-Luc GASSER
groupe Maths-Physique
IREM de Strasbourg

Cet article sera publié dans la revue REPERES IREM n° 34 (Janvier 1999) sous le titre «Réflexions inspirées par le sujet du BAC de Physique Série S 1996».

RÉSUMÉ

Le sujet de Physique du BAC série S 1996 soulève de nombreux problèmes de fond entre les exigences et les attentes des enseignants de Mathématiques et de Sciences Physiques de l'enseignement secondaire. Les thèmes développés dans cet article concernent la notion de dérivée d'une fonction et de son approximation à partir de données expérimentales, la notion de fonction linéaire et affine, ainsi que la notion d'asymptote.

Le groupe Maths - Physique de l'IREM de Strasbourg[1] mène une réflexion depuis plus de quatre années sur l'enseignement de ces disciplines au lycée. Après avoir élaboré des activités dans le cadre des programmes et pouvant être traitées dans chaque matière [1], le groupe a rédigé un dictionnaire «bilingue» Mathématiques et Sciences Physiques [2] qui contient une cinquantaine d'entrées utilisées conjointement dans les deux matières. Les similitudes et les différences de contenu des mots répertoriés ont été mises en évidence, et l'on a ainsi pu constater que certains termes pouvaient semer une importante confusion dans l'esprit des enseignants comme dans celui des élèves. Pour plus de précisions concernant les notions de translation et de rotation, on pourra se référer à un article précédemment publié dans la revue REPERES-IREM [3] ; les problèmes soulevés par le terme «linéaire» ont été évoqués dans une publication publiée dans le bulletin vert de l'APMEP [4].

1 Le groupe Mathématiques-Sciences Physiques est composé des enseignants du secondaire et du supérieur suivants :
Mathématiques : Frédéric Doue, Jean-Luc Gasser, Suzy Haegel.
Sciences Physiques : Jean-Yves Cabel, Patrick Delourme, Norbert Fleury.

Dans le cadre de cet article, seront développées quelques réflexions inspirées par le sujet du BAC de Juin 1996 de Sciences Physiques de la série S, s'organisant autour des notions de dérivée, de limite et de fonctions affine et linéaire. En effet, les collègues de Sciences Physiques, présents lors de la réunion d'harmonisation des barèmes, ont pu constater que les candidats pouvaient perdre jusqu'à 1,5 point sur 20 avec un correcteur «pointilleux», alors que les raisonnements mathématiques mis en œuvre étaient corrects et auraient été acceptés sans problème dans cette discipline.

De l'avis de nombreux enseignants de Sciences Physiques, ce sujet présente de nombreuses faiblesses que nous soulignerons, mais la raison d'être de cet article est davantage de poser des questions de fond soulevées par les thèmes abordés. On pourra donc faire une lecture à deux niveaux de cet article :

• Les incohérences du sujet et du corrigé type proposé.

• Les notions mathématiques mises en œuvre et la façon dont elles sont abordées (ou ignorées) dans les programmes des deux matières.

Dans un premier temps, nous reproduisons les extraits du sujet de Sciences Physiques qui nous intéressent, puis les solutions préconisées par les physiciens ; ces dernières sont commentées en mettant en évidence les points litigieux. Dans la troisième partie, les notions mises en œuvre sont analysées, et nous dégageons les lignes directrices qui posent problème face aux exigences des enseignants de Mathématiques et de Sciences Physiques. L'analyse de questions souvent abordées dans des problèmes de physique amène une réflexion quant au contenu du programme d'analyse de mathématiques au lycée et nous conduit à suggérer d'introduire dans les programmes d'enseignement quelques repères qui en sont actuellement absents.

Avant de rentrer dans le vif du sujet (dans les deux sens du terme !), nous tenons à préciser l'état d'esprit dans lequel nous avons écrit cet article : le professeur de Mathématiques ne veut pas donner de leçons au professeur de Sciences Physiques, et réciproquement. Les critiques que nous formulons sont à placer dans le cadre des programmes de l'enseignement secondaire et des premières années du supérieur, et non pas dans le cadre global des deux Sciences considérées. Nous pointons quelques dysfonctionnements regrettables afin de susciter une réflexion, et proposons quelques pistes pour y remédier. Les commentaires que nous formulons dans la partie 2.) prennent tout leur sens après la lecture des critiques de la partie 3.), que nous avons écrites à part pour une meilleure compréhension des problèmes soulevés par ce sujet d'examen.

1. EXTRAITS DU SUJET D'EXAMEN

Nous n'avons reproduit que les parties du texte original qui étaient intéressantes ou nécessaires à la compréhension du texte.

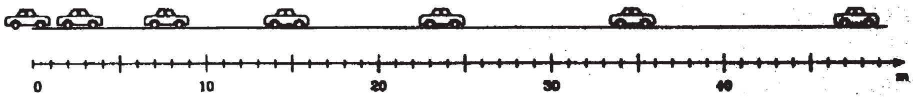


Figure 1

II. voiture au banc d'essai

Une voiture **(...)** se déplace sur une route horizontale rectiligne **(...)**

1. Etude du mouvement pendant la phase de démarrage (vitesse inférieure à 20 ms^{-1}).

On photographie les positions successives de la voiture toutes les secondes *(figure 1 de la feuille annexe, à rendre avec la copie)*. Le départ des photographies est synchronisé avec celui de la voiture. *A* $t = 0$, l'avant de la voiture coïncide avec la position origine $x = 0$ (pour plus de clarté, la position de la voiture à cet instant n'a pas été représentée sur l'enregistrement)[2].

1.1. Indiquer une méthode utilisable pour déterminer, avec une bonne approximation[3], la vitesse de la voiture à une date t donnée.

1.2. Donner dans un tableau les valeurs de la vitesse aux dates 1s, 2s,... 6s.

1.3. Représenter graphiquement les variations de cette vitesse en fonction du temps sur la figure 2 de la feuille annexe.

1.4. Montrer que la courbe construite permet de déterminer la nature du mouvement pendant cette phase.

(...)

III. Réaction entre l'eau oxygénée et les ions iodure

On se propose d'étudier la cinétique de la réaction entre l'eau oxygénée **...** et les ions iodure**...**

2 L'énoncé est fortement ambigu : il sous-entend que la vitesse initiale est nulle, alors que cette donnée n'est pas fournie explicitement dans l'énoncé. Une lecture approfondie du texte met bien en évidence cette lacune.

3 Un des problèmes dont il est question vient de l'expression «avec une bonne approximation».

Principe des mesures : le mélange des réactifs ayant été fait à la date $t = 0$. (...)

Les mesures ont permis de suivre l'évolution de la concentration du diiode formé en fonction du temps, et de tracer les deux courbes $[I_2] = f(t)$ données page suivante, pour deux solutions différentes : (...)

1. Etude cinétique

1.1. Définir la vitesse de formation du diiode à une date *t*. La calculer en $mmol \cdot L^{-1} \cdot \min^{-1}$ pour chacune des deux courbes *(a)* et *(b)* à la date $t = 2$ min. (...)

2. Etude du milieu réactionnel

(...)

2.3. Montrer que la concentration de diiode formé, lorsque la réaction est terminée, est en accord avec le résultat de la question précédente.

2.4. Peut-on considérer que cette concentration limite est atteinte :

– pour le mélange (1) ?

– pour le mélange (2) ?

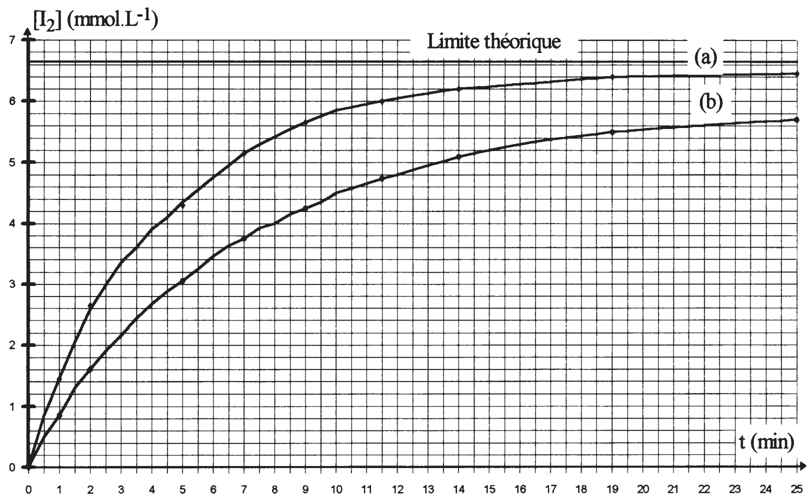


Figure 2 : Réaction entre l'eau oxygénée et les ions iodure = $[I_2] = f(t)$

2. SOLUTIONS APPORTEES PAR LE PHYSICIEN ET COMMENTAIRES

SOLUTIONS DES QUESTIONS DU PROBLÈME : «VOITURE AU BANC D'ESSAI»

Solution proposée par le corrigé type :

1.1. Le calcul de la vitesse à l'instant n est donné par l'expression :

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} \tag{1}$$

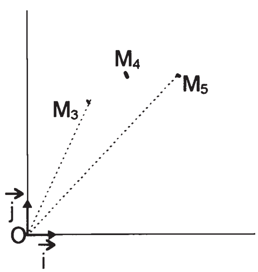
Nos commentaires :

Du fait de la pratique expérimentale (par exemple l'enregistrement par étincelles à intervalles de temps réguliers des déplacements d'un mobile sur un coussin d'air), on définit, ***en 1ère S***, **la vitesse instantanée** au point M_i comme la vitesse moyenne sur un petit intervalle **autour** du point M_i.

Exemple : Sur l'enregistrement ci-dessous, on approxime les vitesses instantanées numériques et vectorielles au temps t_3 par :

$$V_{M_3} = \frac{M_2 M_4}{t_4 - t_2} \qquad \vec{V}_{M_3} = \frac{\overrightarrow{M_2 M_4}}{t_4 - t_2}$$

En ***Terminale S***, on utilise la notion de dérivée, en cherchant pour la vitesse instantanée, la limite de la vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps tend vers zéro.



$$\vec{V}_{M_4} = \frac{\overrightarrow{M_3 M_5}}{t_5 - t_3} = \frac{\overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_3}}{t_5 - t_3} \quad \text{vecteur vitesse moyenne}$$

$$\vec{V}_{M_4} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_3}}{t_5 - t_3} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{t_4} \quad \text{vecteur vitesse instantanée au temps } t = t_4$$

On pourra remarquer que ce choix qui est dicté par l'obtention d'une meilleure précision expérimentale, entre en conflit avec l'approche traditionnelle de la notion de dérivée en mathématiques, dans laquelle le nombre dérivé est obtenu comme la limite du taux d'accroissement au point d'étude x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \tag{4}$$

alors qu'en formalisant la méthode expérimentale proposée par les physiciens, on définira :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \right) \tag{5}$$

Certains élèves ont donc donné l'une des réponses suivantes :

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \tag{2}$$

ou :

$$v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \tag{3}$$

Elles n'ont pas été acceptées par la très grande majorité des correcteurs, alors que les élèves ont présente à l'esprit la notion mathématique, telle qu'elle leur a été enseignée depuis la classe de première : le nombre dérivé en un point est la limite du cœfficient directeur de la sécante en ce point.

De plus, la lecture attentive des programmes de Sciences Physiques en vigueur à la rentrée 1996 montre que la formule (1) n'est pas explicitement exigible des élèves. Les programmes parus dans les B.O. hors série du 24 septembre 1992 (première) et du B.O. spécial n° 3 du 16 février 1995 (terminale)[4] précisent simplement que les élèves doivent «savoir analyser un document chronophotographique pour déterminer vecteurs vitesse et accélération».

Solution proposée par le corrigé type :

1.2. **Les valeurs numériques obtenues avec cette formule (1) sont donc :**

vitesse V_i au temps t_i	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
vitesse en $m.s^{-1}$	2	4	6	8	10	12

Nos commentaires :

On remarquera que la valeur au temps $t = 0$ ne peut pas être obtenue de cette façon (on ne connaît pas la valeur au temps $t = -1$), elle est en fait donnée par l'énoncé[5]. Les valeurs obtenues sont en progression arithmétique, ce qui correspond à un mouvement uniformément accéléré.

Si on prend la formule (2), on obtient le tableau suivant :

vitesse V_i au temps t_i	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	*V5*
vitesse en $m.s^{-1}$	1	3	5	7	9	11

Ces valeurs amènent plusieurs remarques :

- on peut calculer la vitesse au temps $t = 0$, et cette valeur contredit l'énoncé. Le candidat peut donc soupçonner une éventuelle erreur, ou bien simplement supprimer la valeur de cette liste !
- Les valeurs obtenues sont également en progression arithmétique, ce qui est rassurant connaissant le résultat à obtenir...

Si on prend la formule (3), on obtient le tableau suivant :

vitesse V_i au temps t_i	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	*V6*
vitesse en $m.s^{-1}$	1	3	5	7	9	11

A ce stade du problème, on ne décèle aucune contradiction avec l'énoncé, et les valeurs obtenues sont bien en progression arithmétique.

4 Ces références sont données dans les programmes publiés par le CRDP, édition 1996.
5 En admettant que la vitesse initiale est effectivement nulle...

Solution proposée par le corrigé type :

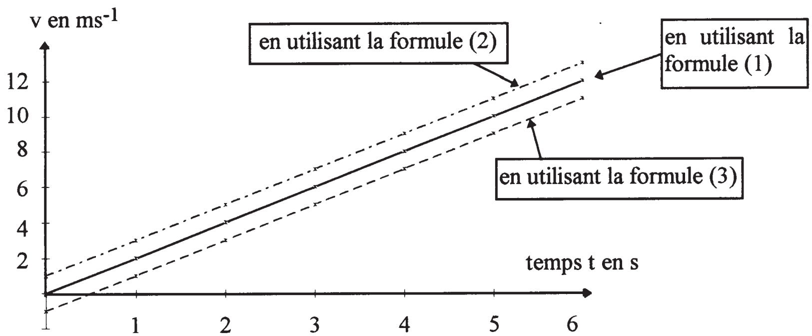
1.3. **Représentation graphique des variations de cette vitesse en fonction du temps**

Nos commentaires :

Les deux autres courbes obtenues ont été tracées sur le même graphique.

Solution proposée par le corrigé type :

1.4. **La courbe est rectiligne et passe par l'origine. Le mouvement est uniformément accéléré avec une vitesse initiale nulle.**



Nos commentaires :

En utilisant la formule (1) : Le physicien dira que c'est la représentation graphique d'une **fonction linéaire**. Il est important de noter que les élèves qui répondent que c'est une **fonction affine** (qui est particulière, puisque sa représentation graphique passe par l'origine) se font **sanctionner**, alors qu'en mathématiques cette réponse est tout à fait correcte ! Le problème est analogue à celui qui consiste à dire qu'un carré n'est pas un rectangle particulier. Voir à ce sujet la partie 3.

En utilisant la formule (2) : On peut très bien répondre qu'entre les temps $t = 1s$ et $t = 6s$, le mouvement est uniformément accéléré. Si on trace la droite, elle coupe l'axe des ordonnées en 1, ce qui correspond à une vitesse initiale non nulle. Dans ce cas, si le tracé effectué est une portion de droite, ce qui contredit l'énoncé, la notion de fonction affine est acceptée.

En utilisant la formule (3) : Les remarques sont analogues à celles qui concernent la formule (2), mais la voiture aurait eu une vitesse initiale négative, donc aurait commencé en marche arrière.

On voit donc qu'un élève qui a compris les notions mathématiques mises en jeu peut se faire sanctionner de façon non négligeable. Un travail de clarification des attentes de chacun, et d'harmonisation semble ici indispensable, tant au niveau des enseignants que des élèves. On pourra trouver quelques éléments de réponse dans la **troisième** partie de cet article.

SOLUTION DES QUESTIONS DU PROBLÈME : «RÉACTION ENTRE L'EAU OXYGÉNÉE ET LES IONS IODURE»

Solution proposée par le corrigé type :

III. 1.1. *Cette vitesse est égale au cœfficient directeur de la tangente à la courbe* $\left[I_2\right] = f(t)$ *à la date t*

Valeurs :

$$\text{Pour le mélange (1) : } v_1 = 0{,}75\ mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$$

$$\text{Pour le mélange (2) : } v_2 = 0{,}60\ mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$$

On acceptera les valeurs suivantes :

$$0{,}72 \le v_1 \le 0{,}79\ (en\ mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1})$$

$$0{,}57 \le v_2 \le 0{,}63\ (en\ mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1})$$

Nos commentaires :

Le corrigé ne propose ni n'impose de méthode pour calculer ce nombre, bien qu'on puisse observer un tracé de tangente à la courbe sur le corrigé type. Ce dernier propose simplement un intervalle de validité des coefficients directeur sans qu'on ne connaisse les critères qui ont présidé à ce choix.

A priori, on peut tracer géométriquement la tangente à la courbe et lire son cœfficient directeur, ou alors prendre deux points voisins sur la courbe et calculer le cœfficient directeur de la sécante ainsi obtenue. Remarquons que la courbe proposée est effectivement une courbe expérimentale : on peut voir neuf points «mesurés» sur chaque courbe, et la courbe elle-même a été tracée à main levée (voir la courbe donnée dans la partie I qui a été retracée pour les besoins de cet article). Pourquoi ne pourrait-on pas encore utiliser la méthode de la partie II pour calculer le nombre dérivé à la date $t = 2\ min$? La valeur ainsi obtenue $\left(\dfrac{4{,}3 - 1{,}4}{4} = 0{,}725\right)$ pour le premier mélange est effectivement dans l'intervalle accepté par le corrigé, alors que la valeur obtenue pour le second mélange $\left(\frac{3{,}05 - 0{,}9}{4} = 0{,}5375\right)$ n'est pas jugée acceptable ! Heureusement, les intervalles acceptables ayant été élargis lors de la réunion d'harmonisation, aucune réponse de ce type n'a pu être rejetée.

Solution proposée par le corrigé type :

2.3 On obtient $\left[I_2\right]_\infty = 6{,}67 \times 10^{-3}\ mol \cdot L^{-1}$ en tenant compte de la stœchiométrie de l'équation bilan.

Nos commentaires :

Le raisonnement tenu n'a pas d'importance ici. Seul le résultat nous importe : la droite d'équation $y = 6{,}63 \times 10^{-3}$ est asymptote horizontale à la courbe.

Solution proposée par le corrigé type :

2.4 Pour le mélange (1), la limite est presque atteinte. Pour le mélange (2), on est assez loin de la limite.

Nos commentaires :

On peut être d'accord avec le résultat proposé pour le mélange (2), mais concernant celui du mélange (1), on pourrait ne pas être d'accord ! La courbe est encore loin de l'asymptote théorique à l'oeil nu.

3. NOTIONS MISES EN ŒUVRE, CRITIQUES, LIMITATIONS.

Une des difficultés de l'exercice de calcul de valeur approchée de la vitesse de l'automobile, est la confusion entre sa valeur exacte et une valeur approchée, ainsi que son calcul exact ou approché. En physique, les fonctions étudiées sont en général dérivables, sauf en certains points particuliers (chocs,...). Les passages entre variables discrètes (mesures physiques) et continues (modèle mathématique) sont souvent implicites, et représentent une source de difficultés pour les élèves et les enseignants.

Question II. 1.1 et 1.2

Dans ces questions, il s'agit de calculer le nombre dérivé en un point d'une fonction dont on connaît la valeur en un certain nombre de points (expériences, tableau de valeurs,...). En fait, ce problème est totalement ignoré par les programmes de mathématiques et n'est pas posé dans les programmes de physique, qui se contentent d'y apporter une réponse sans la justifier, réponse qui n'est parfois pas justifiable comme nous allons le voir ! Le programme de sciences physiques stipule simplement que les élèves de terminales S sachent «analyser un document chronophotographique pour déterminer vecteurs vitesse et accélération, étudier les caractéristiques d'un mouvement».

Il s'agit en fait d'un problème d'analyse numérique qui n'est en aucune façon abordé dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Toutes les fonctions que les élèves sont amenés à étudier sont en effet connues continûment (formules, représentation graphique continue,...), et le calcul approché de la dérivée en un point n'est pas posé si on ne dispose que de données discrètes sur la fonction. Il est donc tout à fait normal que certains élèves reviennent à l'approche mathématique faite en première, qui consiste à définir le nombre dérivé en un point comme limite du cœfficient directeur d'une sécante qui passe par le point d'abscisse x_0 (formule (4)). Nous pouvons même dire que cette démarche satisfait quelque part l'enseignant de mathématiques, car une idée importante de la notion de dérivée a été retenue, ce qui est souvent loin d'être le cas... Nous ajouterons que bien que la notion de dérivée symétrique existe, peu d'élèves auront l'occasion de la rencontrer au cours de leurs études, même plusieurs années après le BAC.

On trouvera dans n'importe quel ouvrage d'analyse numérique des méthodes qui permettent de calculer la valeur approchée du nombre dérivé en un point connaissant des valeurs prises par la fonction autour de ce point, nous ne les développerons donc pas ici. L'expression de l'erreur commise montre évidemment qu'elle diminue lorsque l'intervalle entre les valeurs connues de la fonction diminue. L'idée la plus simple consiste évidemment à utiliser la formule (1) couramment employée en physique. Analysons d'un peu plus près sa signification.

La fonction f est supposée avoir toutes les propriétés requises si aucune précision n'est apportée, et on utilisera les notations habituelles : la fonction à étudier s'appelle f, h est un réel «petit» strictement positif.

En mathématiques, on cherche le nombre dérivé en x_0 en calculant :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Les approximations proposées dans les formules (2) et (3) consistent donc à prendre les nombres :

$$\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \qquad (6)$$

et :

$$\left(\frac{f(x_0) + f(x_0 - h)}{h}\right) \tag{7}$$

comme approximations du nombre $f'(x_0)$.

En mathématiques le nombre h prend des valeurs positives et négatives. Il n'y a donc pas lieu de distinguer ces deux formules.

La méthode proposée en physique conduit à évaluer la valeur approchée du nombre dérivé en x_0 par l'expression :

$$\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}\right) \tag{8}$$

Il est presque sûr qu'en prenant la formule (2) ou (6) ou la formule (3) ou (7) pour calculer une valeur approchée du nombre dérivé, on commet une erreur systématique puisque la tangente est précisément obtenue par le cœfficient directeur de la droite qui a une intersection «double» avec la courbe, ce qui ne saurait être le cas ici (voir Figure 1). Les nombres calculés par les formules (6) et (7) sont les cœfficients directeurs des sécantes $(M_0\ M_2)$ et $(M_0\ M_1)$ respectivement.

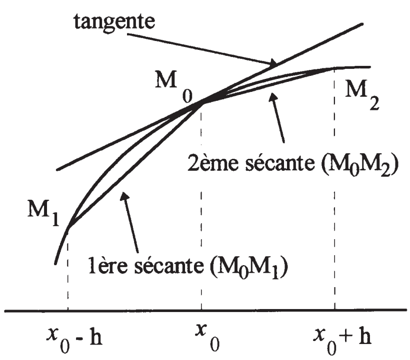


Figure 1

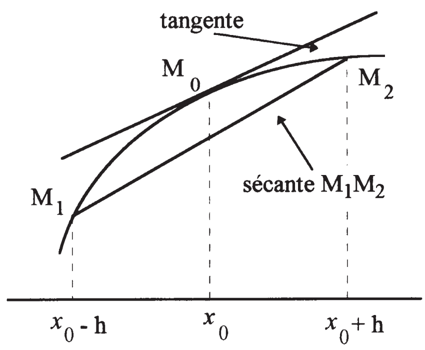


Figure 2

La formule (1) ou (8) propose en fait de prendre la moyenne arithmétique des cœfficients directeurs à droite et à gauche. Intuitivement cette valeur est meilleure, puisqu'on fait la moyenne de deux valeurs biaisées, l'une supérieurement $(M_0\ M_2)$ et l'autre inférieurement $(M_0\ M_1)$ (voir Figure 2) :
On calcule alors le cœfficient directeur de la droite $(M_1\ M_2)$.

• La formule des accroissements finis nous apprend que si la fonction f est continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[, alors il existe un réel c de]a,b[tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$$

La formule (1) suggère en fait que $c = \frac{a+b}{2}$ et donc que (voir Figure 3) :

$$f'(c) = f'\frac{a+b}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

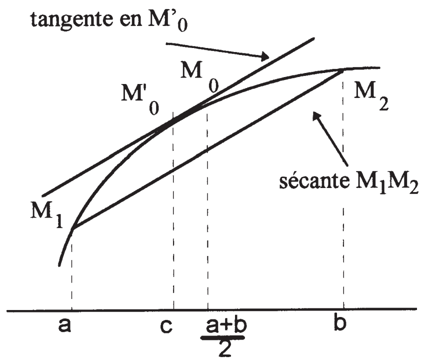


Figure 3

Ce n'est évidemment pas forcément le cas, et une question qui vient à l'esprit est de caractériser les fonctions pour lesquelles cette propriété est toujours vraie. Voir plus loin...

• Examinons maintenant l'ordre de l'approximation. En employant la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2, on obtient :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}\ f''(c_1)$$

avec :

$$c_1 \in \left[x_0 \,;\, x_0 + h\right]$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}\, f''(c_2)$$

avec :

$$c_2 \in \left[x_0 - h \,;\, x_0\right]$$

D’où par soustraction :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h}{4}\, \left(f''(c_1) - f''(c_2)\right)$$

On obtient donc une bonne approximation de *f’* grâce à l’approximation suggérée par les Physiciens dans les deux cas suivants lorsque le nombre

$$\frac{h}{4}\, \left(f''(c_1) - f''(c_2)\right) \text{ est «petit» :}$$

*** Si le nombre h est «petit» :**

Le cours de physique indique bien que la longueur de l’intervalle doit tendre vers 0. On peut considérer que c’est le cas si l’on observe, par exemple, l’enregistrement sur table à coussin d’air du déplacement d’un solide qui n’est pas animé d’une trop grande vitesse par rapport à l’intervalle entre deux étincelles (plusieurs dizaines de millisecondes en général). Est-ce vraiment le cas dans ce problème ? L’exercice est donc en dehors du champ d’application de la méthode proposée !

*** Si la dérivée seconde varie peu. Un cas extrême se produit lorsque *f ”* est constante, donc si *f* est une fonction polynôme du second degré...**

Cette dernière remarque explique pourquoi les résultats obtenus sont excellents avec l’approximation de la formule (1), puisqu’on aboutit parfaitement au résultat proposé, à savoir que la vitesse augmente linéairement avec le temps, ce qui correspond à une accélération constante. Mais le fait que la vitesse augmente linéairement avec le temps est obtenu même si l’on prend une des formules (2) ou (3), avec simplement un problème de vitesse initiale non nulle (si on suppose qu’elle l’est...). En fait la méthode de calcul proposée est parfaite avec le problème étudié : on utilise une propriété caractéristique des fonctions polynômes du second degré (ou de la courbe parabole) !

*** Si f est une fonction polynôme du second degré, alors pour tous les réels a et b, la relation suivante est vérifiée :**

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* Géométriquement, le cœfficient directeur de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x_0 est égal au cœfficient directeur de la sécante à la courbe passant par deux points dont les abscisses sont symétriques par rapport à x_0.

* En fait, lorsqu'on calcule les valeurs des tableaux proposés dans la solution avec les formules (2) et (3), on calcule les différences finies d'une fonction tabulée, et celui qui les a un peu étudiées sait bien que les valeurs obtenues seront en progression arithmétique si la fonction est un polynôme du second degré (voir également plus loin).

La question à poser n'est donc certainement pas le calcul approché d'une vitesse, du moins si aucune considération sur les limites de validité de la formule (1) ou bien la caractérisation d'une fonction polynôme du second degré n'a été sérieusement abordée en cours.

Nous avons posé ce problème à des enseignants de mathématiques lors d'une journée de formation dans le cadre de la MAFPEN. Leur réaction a été intéressante, puisque le calcul d'une valeur approchée du nombre dérivé en un point à l'aide de valeurs tabulées d'une fonction n'est pas au programme de l'enseignement secondaire. Trois types d'approche sont apparus :

* Certains stagiaires ont reconnu les valeurs de la fonction $x \to x^2$ et ont calculé sa dérivée pour répondre à la question posée...

* D'autres ont utilisé la formule (2) ou (3), en calculant donc la vitesse moyenne sur un intervalle de temps (et non pas sur deux).

* Les derniers ont utilisé la formule proposée par les physiciens, et ont justifié leur choix par la notion d'interpolation linéaire. Cette réaction est très intéressante, car elle dépend apparemment des générations d'enseignants. Pour certains, l'utilisation de l'interpolation linéaire fait partie de leur formation initiale, et était très présente lors de leurs études. Pour les générations suivantes, cette démarche est beaucoup moins naturelle. Ce phénomène rejoint une observation analogue en ce qui concerne les notions de translation et de rotation (voir [3]).

Une autre approche du problème posé dans ce sujet pourrait consister en la démarche suivante :

En cours de mathématiques, on peut facilement établir un résultat classique des propriétés des différences finies pour les fonctions polynômes, en se limitant éventuellement au deuxième degré pour des raisons de difficultés calculatoires. Une fonction polynôme étant tabulée avec un pas régulier, on calcule les différences finies successives, et si le polynôme est de degré n, alors toutes les différences finies d'ordre supérieur ou égales à $n + 1$ sont nulles (ce résultat est analogue à celui de la dérivation). On peut aussi s'arrêter avant : il est facile d'établir que les différences finies d'ordre n sont constantes, que celles d'ordre $(n - 1)$ sont en progression arithmétique... Si l'on reprend l'exemple proposé par le sujet, le résultat qu'on peut obtenir est que si la fonction tabulée (les positions de la voiture toutes les secondes) est un polynôme, alors ce polynôme est du second degré, et donc, son polynôme dérivé est du premier degré (la vitesse est une fonction affine du temps) :

valeurs tabulées (position de la voiture)	0		1		4		9		16		25		36
différence première (vitesse)		1		3		5		7		9		11	
différence seconde (accélération)			2		2		2		2		2		
différence troisième				0		0		0		0			

A ce stade, on peut donc dire que l'accélération de la voiture est bien constante pendant la phase de démarrage. Si on veut connaître sa vitesse exacte à un instant donné, on sait, d'après le cours, que la formule (1) nous la donnera.

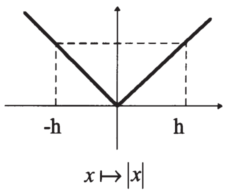
Il nous semble que cette démarche serait plus adéquate, car on ne fait pas de pseudo calcul de vitesse, qui donne des résultats parfaits simplement parce que le mouvement est uniformément accéléré. Si l'on étudiait un mouvement circulaire, les résultats donnés par la formule (1) seraient moins bons, sauf dans le cas du mouvement circulaire uniforme, pour lequel la valeur numérique sera inexacte (la corde est plus courte que l'arc) mais le support vectoriel correct (la médiatrice de la corde est aussi un rayon du cercle, et est donc perpendiculaire à la tangente au cercle).

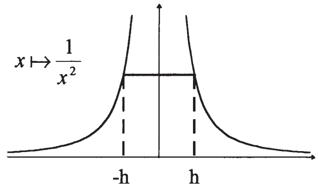
- La limite lorsque h tend vers zéro de l'expression :

$$\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}\right) \tag{8}$$

peut-elle servir de définition du nombre dérivé en un point en mathématiques comme le suggère l'approche faite en cours de physique du secondaire ?

Nous apportons une réponse négative en considérant les deux contre-exemples suivants :





Pour chacune de ces deux fonctions, l'expression :

$$\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}\right)$$

est nulle pour tout h strictement positif, alors que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable à l'origine (on obtient en fait la moyenne de la dérivée à droite et à gauche) et que la fonction $x \to \frac{1}{x^2}$ n'est même pas définie à l'origine. Il serait donc sage de critiquer la formule (8) à l'aide de ces deux contre-exemples.

Question II. 1.3

En mathématiques, toute fonction du type est appelée fonction affine, quelles que soient les valeurs de a et b. En particulier si $b = 0$, on obtient les fonctions affines particulières appelées fonctions linéaires, et si $a = 0$, on obtient les fonctions affines particulières appelées fonctions constantes. Cette approche est importante du point de vue structurel et est à mettre en parallèle avec deux exemples suivants :

- Tout nombre entier est également un nombre décimal particulier, qui est également un nombre rationnel particulier, qui est également un nombre réel particulier. Ceci signifie simplement que l'ensemble des entiers est inclus dans l'ensemble des nombres décimaux, qui est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels, qui est inclus dans l'ensemble des nombres réels. Personne ne dira qu'un entier n'est pas un décimal particulier !
- Un carré est un rectangle particulier, qui est lui même un parallélogramme particulier. On peut bien, sûr considérer qu'un carré n'est pas un rectangle, et que l'appellation rectangle exclut la catégorie des carrés comme cela est parfois fait à l'école primaire. Mais quel dommage !

Ne pas considérer les inclusions précédentes est une perte de richesse évidente, et il en est de même pour les notions de fonctions affines et linéaires (à un moindre degré cependant). En fait, dans l'enseignement secondaire, les propriétés des fonctions linéaires ne sont pas vraiment mises en évidence et exploitées de façon approfondie. Cela pourrait justifier éventuellement l'exigence d'une distinction entre fonction linéaire (on est dans une situation de proportionnalité) et fonction affine non-linéaire.

De plus, la structure des programmes de mathématiques ne va pas dans ce sens. Au collège, on étudie des situations de proportionnalité issues de domaines variés avec un nombre fini et restreint de valeurs. On met en évidence les propriétés additives et multiplicatives de ces situations. La représentation graphique des situations étudiées met en évidence l'alignement des points sur une droite passant par l'origine. On utilise bien l'expression «en fonction de »[6], mais la notion de fonction est hors programme au collège. On «introduit prudemment la notation *f(x)* »[7] en 3^{e}, et on y emploie les termes de fonctions affines et linéaires en traçant les droites qui y sont associées. La notion de fonction n'est étudiée qu'à partir de la seconde, et on n'étudie pas de propriétés fonctionnelles qui mettraient en évidence les propriétés des fonctions linéaire, à savoir :

pour tous les réels x, y et k

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \ et \ f(kx)=kf(x)$$

Nous ferons une dernière remarque qui nous incite à ne pas utiliser la notion de fonction linéaire à ce niveau. En seconde, les élèves étudient les propriétés de certains dipôles électriques, et en particulier les dipôles linéaires (voir [4]). Ces derniers ont la particularité d'admettre une caractéristique... qui est une droite affine ! Cette étude rend encore plus difficile la distinction entre fonctions affines et linéaires au sens mathématique. Les tests que nous avons effectués au niveau des classes de seconde et de terminale mettent en évidence la confusion qui règne dans l'esprit des élèves.

Les fonctions linéaires sont des fonctions parmi d'autres, et il n'y a pas de raison dans le cadre des programmes, de faire une distinction systématique et forcenée entre les fonctions linéaires et les fonctions affines non-linéaires. C'est en fait la notion de proportionnalité qu'il faudrait mettre en évidence ici, en évitant la notion de linéarité qui est inadaptée par rapport à la formation des élèves.

Question III. 2.4.

Quels sont les critères qui permettent de décider que «la courbe a atteint son asymptote » ?

6 citation du programme.
7 citation du programme.

• Est-ce le pourcentage d'ion iodure atteint par rapport à la limite théorique ? Il n'est que d'environ 97 % et 81 % pour les deux réactions étudiées au bout de 26 min. Graphiquement, la courbe n'est confondue avec son asymptote (vu l'échelle choisie qui est raisonnable) dans aucun des deux cas.

• Est ce la vitesse de formation des produits qui est devenue tellement faible que l'on peut considérer que la réaction est achevée ? La vitesse initiale de formation était d'environ 1,75 $mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$ (cœfficient directeur de la tangente à l'origine). Si on fait un calcul approché en utilisant la formule (2), on trouve respectivement 0,014 et 0,028 $mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$, ce qui correspond environ à 0,8 % et 1,6 % de la vitesse initiale de formation. Ce critère est-il pertinent ?

• Les Physiciens considèrent qu'un phénomène évolutif au cours du temps a atteint sa limite si on ne peut plus mesurer les variations de la quantité étudiée. Est-ce le cas ici ? L'intervalle d'étude semble trop court pour l'affirmer, et si c'est le cas, la limite théorique calculée est bien loin de la limite de concentration observée. L'exemple proposé n'est pas judicieux.

• Dans le cadre des programmes, la notion d'asymptote est vue pour la première fois en classe de première, lors de l'étude des limites. On la définit comme étant une droite dont la courbe s'approche d'aussi près que l'on veut. Toutes les représentations graphiques qu'auront tracées les élèves lors de cette première approche, qui est donc prééminente dans leur esprit, et qui auront formé une image mentale simple, auront montré que la courbe se confond avec l'asymptote si les unités sont judicieusement choisies. Cette approche entre une fois de plus en conflit avec la représentation graphique proposée aux candidats de l'examen.

• Dans le programme de sciences physiques de terminale S, beaucoup de phénomènes rencontrés ont une propriété asymptotique, par exemple les réactions en chimie, ainsi que des propriétés de charge ou de décharge du condensateur. Dans ce dernier cas, on considère, par exemple, que le condensateur est chargé lorsqu'on ne peut plus mesurer la valeur du courant de charge, même si le modèle mathématique qui exploite une fonction exponentielle montre que la fonction qui modélise ce phénomène n'atteint jamais la valeur de l'asymptote. En pratique, le Physicien considère qu'au bout de cinq fois la constante de temps d'un circuit RC, le condensateur a atteint sa charge définitive. Aucun Mathématicien ne critiquera ce point de vue ! De plus la courbe de charge du condensateur est effectivement confondue graphiquement avec son asymptote.

Les approches du Mathématicien (notions d'infiniment petit) et du Physicien (limites des mesures du phénomène étudié, pertinence d'un modèle mathématique) sont très intéressantes et mériteraient d'être approfondies dans un autre cadre. Une question de ce type ne devrait être posée à un examen que si le phénomène étudié est significatif, et encore, quel est la compétence qui est alors évaluée ?

CONCLUSION

L'étude des notions mises en œuvre dans l'enseignement des sciences physiques en terminale S fait apparaître une lacune dans le contenu des programmes de mathématiques correspondant, en ce qui concerne l'approximation numérique des valeurs de la fonction dérivée. Une harmonisation, tant entre les programmes des deux matières qu'entre les exigences des enseignants et des correcteurs, est souhaitable pour éviter des phénomènes nuisibles aux élèves.

Il n'est pas admissible qu'un candidat au Baccalauréat soit pénalisé pour les réponses qu'il donne quand les notions de fonctions affines et linéaires ont été correctement comprises du point de vue mathématique.

De même, il n'est pas acceptable qu'un candidat au Baccalauréat soit sanctionné s'il ne donne pas la formule attendue d'approximation du nombre dérivé d'une fonction quand :

- d'une part, les programmes de mathématiques n'abordent pas les notions correspondantes d'analyse numérique et que la notion de dérivée est précisément introduite à l'aide d'une formule qui n'est pas acceptée ici.
- d'autre part, cette notion n'est pas explicitement exigible dans les programmes de sciences physiques en vigueur (voir la note n° 4) même si les enseignants la considèrent comme allant de soi.

Ne pourrait-on pas envisager que les notions correspondantes d'analyse numérique soient abordées dans les programmes de mathématiques et de sciences physiques de l'enseignement secondaire ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] «Mathématiques et Sciences Physiques», brochure S158 de l'IREM de Strasbourg (Juin 1994).

[2] «Dictionnaire de Mathématiques et Sciences Physiques», brochure S169 de l'IREM de Strasbourg (Juin 1996).

[3] Jean-Luc Gasser : *«Mathématiques et Sciences Physiques : translations et rotations»* dans la revue REPERES, n° 25, octobre 1996, p. 19-34.

[4] Suzy Haegel : *«Maths-Physique : une activité commune»* dans le bulletin vert de l'APMEP, n° 407, décembre 1996, p. 666-671.