

MODELISATION CAUSALE DES CIRCUITS A COUPLAGE MAGNETIQUES

Jean-Pierre CARON

Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique
de Puissance de Lille, Groupe ENSAM
8, bd Louis XIV
59046 LILLE

Dans le bulletin de l'Union des Physiciens n°785, (Hautier, Faucher, 96), le **graphe informationnel causal (GIC)** était présenté comme un outil de modélisation et de synthèse des commandes des systèmes électrotechniques. Son concept s'appuie sur la **causalité naturelle**, encore qualifiée de **causalité intégrale** ; propriété qui doit être absolument respectée dans la phase de modélisation de tout processus physique mettant en jeu des **transferts énergétiques**. La démarche causale garantit au physicien une juste interprétation et doit lui éviter également l'écueil de certaines simulations numériques effectuées sur des modèles issus de manipulations de relations en contradiction avec les principes de causalité.

Dans le présent article, la **méthodologie causale** est appliquée au couplage magnétique mis en œuvre dans les transformateurs ; elle débouche soit sur une représentation par **GIC** pouvant donner lieu à une **simulation numérique**, plus ou moins fine selon le niveau de connaissance sur le comportement du matériau magnétique, soit sur un modèle électrique considéré alors comme un élément dans un ensemble plus complexe de conversion statique de l'énergie électrique (Hautier, Caron, 98).

La base fondamentale de l'**étude dynamique** des circuits électriques à couplage magnétique nous est donnée par la loi de **Faraday**. Elle exprime la relation rigide entre une force électromotrice e (f.e.m.), tension induite dans un circuit électrique, et le taux de variation temporelle du flux d'induction magnétique φ qui le traverse.

Avec des orientations convenables (voir fig. 1) pour le calcul du flux φ d'une part et la désignation algébrique de la f.e.m. e d'autre part, on démontre que :

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

Cette variation du flux d'induction découle de plusieurs causes telles le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique, l'application d'une tension électrique à ses bornes ou à celles d'un autre circuit électrique qui lui est couplé. La relation de Faraday est analogue, en mécanique, à celle qui existe entre le moment cinétique et le couple résultant exercé sur un solide indéformable en rotation. Il résulte de la causalité des phénomènes physiques qu'en magnétodynamique **le flux d'induction à travers un circuit intègre la tension qui lui est appliquée**, à l'analogie du moment cinétique du solide précédent qui intègre le couple résultant.

1 Description et conventions de signe

Deux circuits (C_1) et (C_2), généralement réalisés par des bobines constituées de spires aux nombres respectifs n_1 et n_2 , sont couplés magnétiquement (voir fig. 1). Les flux d'induction magnétique qu'ils enlacent sont totalisés et désignés respectivement par φ_1 et φ_2 ; ils sont définis à partir d'une orientation des contours qui impose alors celle des surfaces (normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2) selon la règle du trièdre direct ainsi que celle des générateurs de Faraday de f.e.m. respectives e_1 et e_2 .

Les bobines sont marquées d'un point (.) disposé à l'une de leurs deux bornes de manière à rendre compte du sens de l'enroulement selon la règle simple suivante : « **Un courant positif entrant par le point (.) crée un champ d'induction magnétique dont le flux dans le circuit magnétique est positif** ».

Enfin on choisit également un sens positif d'une part pour les tensions aux bornes des circuits et, d'autre part, pour les courants qui les parcourent. En général l'un d'eux est connecté à une source d'entrée (tension v_1 , courant i_1) qui fournit de l'énergie de sorte que ses orientations sont établies selon la **convention récepteur**, alors que le deuxième se voit attribuer la **convention générateur** lorsqu'il est raccordé à un dipôle de charge ou source de sortie (tension v_2 , courant i_2). Un premier modèle, établi à la figure 2, est construit sur la base des relations de maille ; il tient compte des résistances (r_1 et r_2) des circuits :

$$v_1 = r_1 i_1 - e_1 = r_1 i_1 + \frac{d\varphi_1}{dt} \quad (2)$$

$$v_2 = -r_2 i_2 - e_2 = -r_2 i_2 + \frac{d\varphi_2}{dt} \quad (3)$$

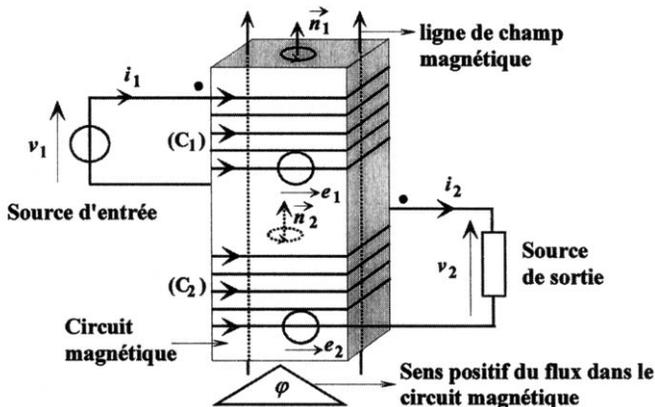


Figure 1 Structure de couplage magnétique de deux circuits électriques avec conventions de signe.

Le modèle peut être affiné dès qu'on précise les hypothèses sur l'état magnétique du matériau constituant le circuit magnétique ; on distingue alors deux cas d'étude selon la relation entre les champs d'induction B et d'excitation magnétique H .

La relation est linéaire : les circuits sont décrits par inductances propres et inductance mutuelle ; les pertes ferromagnétiques ne sont pas prises en considération.

La relation est non linéaire, non bijective : on considère dans ce cas un **flux commun** aux spires des deux bobines lié rigidement aux deux courants i_1 et i_2 et un **flux de fuites magnétiques totalisées** soit au primaire (C_1), soit au secondaire (C_2), respectivement φ_{f1} et φ_{f2} .

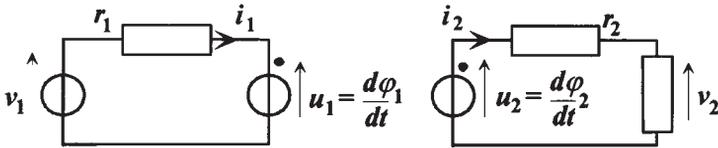


Figure 2 Modèle de représentation électrique.

2 Modélisation dans l'hypothèse linéaire

2.1 Considérations énergétiques

Trois paramètres magnétiques sont définis :

L_1 , inductance propre de (C_1) ;

L_2 , inductance propre de (C_2) ;

M , inductance mutuelle entre (C_1) et (C_2) ;

ils servent à exprimer les relations rigides (atemporelles) entre les flux d'induction φ_1 , φ_2 et les courants i_1 , i_2 :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\varphi] = [L] [i] \quad (4)$$

Si le couplage est imparfait ($0 < M < \sqrt{L_1 L_2}$), la matrice $[L]$ des coefficients inductifs est inversible, on établit alors la relation :

$$[i] = [L]^{-1} [\varphi] \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A un instant t donné, l'énergie emmagasinée dans les tubes de flux d'induction résulte de l'intégration de la puissance instantanée fournie aux deux enroulements après déduction des pertes Joule et dans l'hypothèse de pertes ferromagnétiques nulles.

La loi de Faraday, en raison des définitions des coefficients inductifs, établit des relations rigides entre les tensions u_1 , u_2 et les dérivées des courants i_1 , i_2 :

$$u_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \quad (6)$$

$$u_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (7)$$

La puissance électromagnétique instantanée P_{em} s'exprime par :

$$p_{em} = [u]'[i] = [i]'[u]$$

soit encore :

$$p_{em} = \frac{d}{dt}[\varphi]'[i] = [i]' \frac{d}{dt}[\varphi] \quad (8)$$

Par intégration de $dW_{em} = p_{em} dt$ à partir de valeurs initiales nulles, on trouve :

$$W_{em} = \frac{1}{2} [i]' [L] [i] = \frac{1}{2} [L_1 i_1^2 - 2 M i_1 i_2 + L_2 i_2^2] \quad (9)$$

$$W_{em} = \frac{1}{2} [\varphi]' [L]^{-1} [\varphi] = \frac{1}{2(L_1 L_2 - M^2)} [L_2 \varphi_1^2 - 2 M \varphi_1 \varphi_2 + L_1 \varphi_2^2] \quad (10)$$

Les relations (9) et (10) indiquent que le vecteur d'état est de dimension deux ; on peut alors choisir comme variables d'état :

- soit les deux flux φ_1 , φ_2
- soit les deux courants i_1 , i_2
- soit un courant et un flux

ou encore deux combinaisons linéairement indépendantes des variables d'état précédemment désignées.

Remarque : Si le couplage est parfait, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, la matrice inductance ne peut être inversée et $\varphi_2 = \sqrt{L_1 / L_2} \varphi_1$, alors le vecteur d'état est de dimension unité.

2.2 Modèles aux sources liées et aux inductances de fuites totalisées

Afin d'établir une correspondance avec la modélisation électrotechnique usuelle, on considère que le flux d'induction φ_1 , lié aux effets magnétiques des deux courants i_1 et i_2 , est proportionnel à la valeur particulière $i_{1\mu}$ du courant i_1 , désigné comme **courant magnétisant primaire** :

$$i_{1\mu} = \frac{\varphi_1}{L_1} = i_1 - \frac{M}{L_1} i_2 \quad (11)$$

Le courant $i_{1\mu}$ émane en fait de l'intégration de sa dérivée, elle-même proportionnelle à la tension u_1 d'après la loi de Faraday et selon la relation :

$$R11 \rightarrow \frac{di_{1\mu}}{dt} = \frac{u_1}{L_1} \quad (12)$$

Par la suite nous désignons par *Ri* toute relation caractérisant un processeur intégral de sorte que si $y = dx/dt$ et x sont respectivement ses grandeurs d'entrée et de sortie on a :

$$Ri \rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t y(t).dt \quad (13)$$

avec $x(t_0)$, valeur initiale de la variable d'état x et grandeur d'entrée implicite.

Dans ces conditions, le courant i_1 résulte de la sommation du courant magnétisant avec i_{2m} , **courant secondaire modulé** par M/L_1 :

$$R12 \rightarrow i_1 = i_{1\mu} + \frac{M}{L_1} i_2 \quad (14)$$

$$R13 \rightarrow i_{2m} = \frac{M}{L_1} i_2 \quad (15)$$

La relation *R12* exprime aussi la loi des noeuds dans le contexte d'une modélisation électrique du primaire mis sous la forme de l'inductance L_1 en parallèle sur la **source de courant i_{2m} liée au courant secondaire i_2** (voir fig. 3).

Quant au secondaire, l'élimination de di_1/dt entre (6) et (7) débouche sur la relation des tensions suivante :

$$u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 - L_2 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \frac{di_2}{dt} \tag{16}$$

et sur une structure constituée d'une **source de tension** u_{1m} **liée à la tension primaire** par le **coefficient de modulation** $m_1 = M / L_1$:

$$R14 \rightarrow u_{1m} = m_1 u_1 \tag{17}$$

en série avec N_2 , **inductance de fuites totalisées au secondaire** :

$$N_2 = L_2 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \tag{18}$$

Le coefficient de L_2 , habituellement noté σ , est défini comme le **coefficient de dispersion de Blondel** : $N_2 = \sigma L_2$.

Dans la conception du Graphe Informationnel de Causalité de la figure 3, le courant secondaire i_2 doit être perçu en tant que grandeur de sortie d'un processeur intégral d'entrée di_2 / dt donnée par la relation R15 déduite de (16) :

$$R15 \rightarrow \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{N_2} (u_{1m} - u_2) \tag{19}$$

Les relations R13 et R14 de définition des sources liées décrivent une **double modulation** que la modélisation électrique représente également par un **transformateur parfait de rapport de transformation** m_1 .

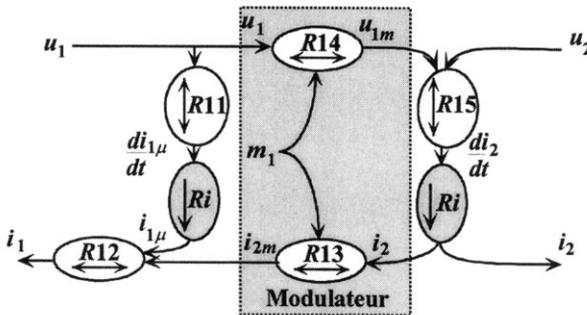


Figure 3 GIC à courant magnétisant primaire.

Remarque sur la représentation GIC : Un ovale avec une flèche simple modélise un processeur intégral alors qu'une flèche double désigne un processus rigide caractéristique d'une relation atemporelle ; le graphe est nécessairement orienté.

Le transfert énergétique étant réversible, les bobines jouent indifféremment le rôle des circuits primaire et secondaire ; il est donc naturel de proposer une modélisation, complémentaire à la précédente, mettant en exergue un **courant magnétisant secondaire** $i_{2\mu}$ et une **inductance de fuites totalisées au primaire** N_1 .

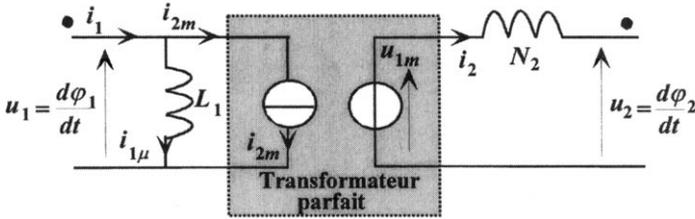


Figure 4 Modèle aux sources liées et à inductance de fuites totalisées au secondaire.

Le passage d'une structure à l'autre s'effectue alors simplement par permutation des indices 1 et 2 et changement de signe des courants.

On déduit ainsi les nouvelles relations :

$$R21 \rightarrow \frac{di_{2\mu}}{dt} = -\frac{u_2}{L_2} \quad (20)$$

$$R22 \rightarrow i_2 = i_{2\mu} + m_2 i_1 \quad (21)$$

$$R23 \rightarrow i_{1m} = m_2 i_1 \quad (22)$$

$$R24 \rightarrow u_{2m} = m_2 u_2 \quad (23)$$

$$R25 \rightarrow \frac{di_1}{dt} = (u_1 - u_{2m}) / N_1 \quad (24)$$

avec $N_1 = \sigma L_1$, inductance de fuites totalisées au primaire, et $m_2 = M / L_2$, auxquelles on associe le GIC de la figure 5 et le modèle de la figure 6.

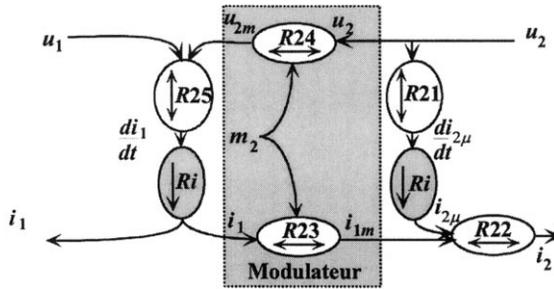


Figure 5 GIC à courant magnétisant secondaire.

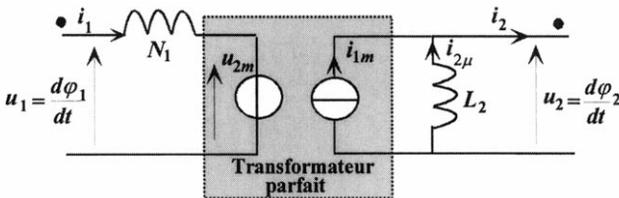


Figure 6 Modèle aux sources liées et à inductance de fuites totalisées au primaire.

2.4 Modèles ramenés au primaire et au secondaire

Pour des raisons de commodité mais aussi d'exploitation des mesurages effectués lors des essais à vide et en court-circuit, les représentations du transformateur parfait par les sources liées sont éliminées des figures 4 et 6 pour aboutir à ce qu'il est convenu d'appeler les modèles ramenés soit au primaire, soit au secondaire. Ils sont rassemblés à la figure 7 et demeurent entièrement équivalents pour toutes les applications dynamiques.

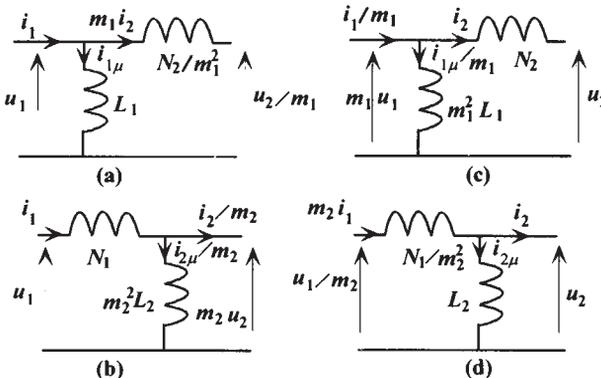


Figure 7 Modèles ramenés au primaire (a, b) et au secondaire (c, d).

2.5 Application aux transformateurs à trois enroulements

Ce sont des composants magnétiques largement répandus dans le domaine des alimentations à découpage dont les niveaux d'induction sont suffisamment faibles pour admettre la linéarisation de la caractéristique magnétique et justifier ainsi la description par inductances propres et mutuelles. Les trois enroulements B_1 , B_2 , et B_3 de la figure 8 sont associés aux relations flux-courants suivantes :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \\ -i_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

L_1, L_2, L_3 sont les inductances propres des bobines respectivement B_1, B_2, B_3 .

Les inductances mutuelles sont réciproques : $M_{ij} = M_{ji}$, de sorte que le transformateur est caractérisé par six paramètres mesurables séparément :

$$L_1, L_2, L_3, M_{12}, M_{13}, M_{23}$$

La disposition des enroulements laisse supposer que la bobine B_1 (primaire) est un récepteur raccordé à la source de tension u_1 , alors que les deux autres enroulements (secondaires) jouent le rôle de générateurs pour les récepteurs qui ne sont pas représentés.

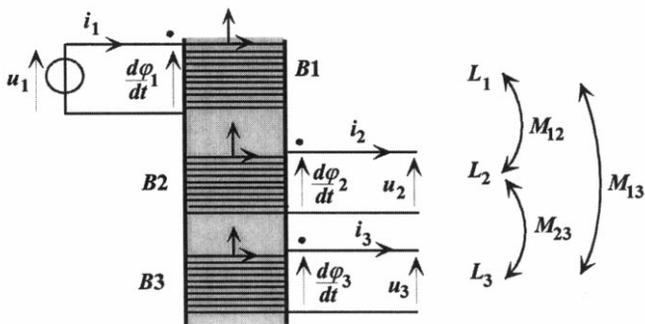


Figure 8 Transformateur à trois enroulements.

Le modèle électrique (voir fig. 9) est établi avec le souci de faire apparaître les sources liées de courant et de tension, éléments de base des deux transformateurs parfaits entre B1 et B2 d'une part et entre B1 et B3 d'autre part, à l'identique de la représentation de la figure 4.

La relation entre le flux primaire φ_1 et les trois courants i_1, i_2, i_3 peut être mise sous la forme suivante :

$$i_1 = \frac{\varphi_1}{L_1} + \frac{M_{12}}{L_1} i_2 + \frac{M_{13}}{L_1} i_3 \quad (26)$$

de façon à introduire le courant magnétisant primaire :

$$i_{1\mu} = \varphi_1 / L_1 \quad (27)$$

Les coefficients de modulation ou rapports de transformation sont également définis :

$$m_{12} = M_{12} / L_1, \quad m_{13} = M_{13} / L_1 \quad (28)$$

Les deux courants secondaires modulés, ou ramenés au primaire, sont écrits :

$$i_{2m} = m_{12} i_2, \quad i_{3m} = m_{13} i_3 \quad (29)$$

et modélisés par des sources liées de courant, disposées en parallèle (voir fig. 9) sur l'inductance L_1 ; l'ensemble étant alimenté par la source de tension u_1 , puisqu'en raison de la loi de Faraday : $d\varphi_1 / dt = u_1$.

On procède ensuite à l'élimination de i_1 entre φ_2 et φ_1 d'une part, et entre φ_3 et φ_1 d'autre part. On trouve ainsi :

$$\varphi_2 = \frac{M_{12}}{L_1} \varphi_1 - L_2 \left(1 - \frac{M_{12}^2}{L_1 L_2} \right) i_2 - \left(M_{23} - \frac{M_{12} M_{13}}{L_1} \right) i_3 \quad (30)$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{13}}{L_1} \varphi_1 - \left(M_{23} - \frac{M_{12} M_{13}}{L_1} \right) i_2 - L_3 \left(1 - \frac{M_{13}^2}{L_1 L_3} \right) i_3 \quad (31)$$

Notons :

$$l_2 = L_2 \left(1 - \frac{M_{12}^2}{L_1 L_2} \right), \quad l_{23} = \left(M_{23} - \frac{M_{12} M_{13}}{L_1} \right), \quad l_3 = L_3 \left(1 - \frac{M_{13}^2}{L_1 L_3} \right) \quad (32)$$

Les expressions de l_2 et l_3 , similaires à (18), permettent de les considérer comme inductances de fuites totalisées respectivement dans B2 et B3 lorsque l'un des courants secondaires i_3 ou i_2 est nul.

Les tensions de sortie u_2 et u_3 sont calculées par application de la loi de Faraday :

$$u_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = m_{12} u_1 - (l_2 - l_{23}) \frac{di_2}{dt} - l_{23} \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} \quad (33)$$

$$u_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = m_{13}u_1 - (l_3 - l_{23})\frac{di_3}{dt} - l_{23}\frac{d(i_2 + i_3)}{dt} \quad (34)$$

La forme donnée aux relations (33) et (34) montre que l'inductance l_{23} est caractéristique du couplage entre $B2$ et $B3$ en présence de $B1$; elle débouche également sur la modélisation des secondaires à l'aide des sources de tension liées à la tension primaire u_1 .

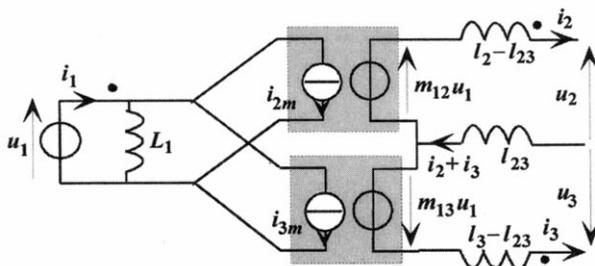


Figure 9 Modèle aux sources liées d'un transformateur à trois enroulements.

3 Modélisation dans l'hypothèse de non linéarité

3.1 Expressions des flux d'induction

La notion de mutuelle induction n'est plus réaliste car la décomposition algébrique des flux primaire φ_1 et secondaire φ_2 devient impossible en raison de la relation non linéaire existant entre les champs d'excitation magnétique H et d'induction B , alors que la composition des forces magnétomotrices $n_1 i_1$ et $n_2 i_2$ reste justifiée par le théorème d'Ampère. Dans ce nouveau contexte, le flux φ dans le circuit magnétique, enlacé par les enroulements primaire et secondaire, est supposé **commun** à l'ensemble des spires de ces deux bobinages. En l'absence de fuites magnétiques, les flux φ_1 et φ_2 sont simplement totalisés en tenant compte des nombres respectifs de spires n_1 et n_2 .

La modélisation des fuites magnétiques concerne pour l'essentiel les lignes de champ situées en dehors des circuits ferromagnétiques, c'est-à-dire celles qui circulent dans les conducteurs, les isolants et l'air, soit dans les milieux où la perméabilité magnétique est celle du vide. On admet généralement que l'énergie électromagnétique emmagasinée dans les tubes de flux de fuite est concentrée dans les bobinages à cause de leur épanouissement à l'extérieur de ces derniers.

Les dispositions habituelles en enroulements concentriques ou en galettes de bobines alternées ne permettent pas de séparer les fuites magnétiques pour les attribuer à chacun des deux circuits primaire et secondaire. Les méthodes de calcul (McLyman, 88), (Ferrieux, Forest, 94), d'ailleurs développées par de nombreux auteurs, consistent à exprimer l'énergie électromagnétique W_{emf} contenue dans le volume occupé par les

bobinages et leur intervalle d'isolant en fonction de l'un des deux courants i_1 ou i_2 tout en considérant infinie la perméabilité relative des matériaux ferromagnétiques ($n_1 i_1 = n_2 i_2$). C'est ainsi que peuvent être calculées les inductances de fuites totalisées au primaire et au secondaire, respectivement N_1 et N_2 :

$$W_{emf} = \frac{1}{2} N_1 i_1^2 = \frac{1}{2} N_2 i_2^2 \quad (35)$$

Le concept même de représentation des fuites magnétiques par l'une ou l'autre des inductances de fuites totalisées est conforté par l'expérimentation puisque les essais en court-circuit du secondaire et du primaire permettent les mesures séparées de N_1 et N_2 . Ces définitions ont alors une incidence sur l'expression des flux d'induction et, selon l'hypothèse choisie, on obtient :

$$\varphi_1 = n_1 \varphi, \quad \varphi_2 = n_2 \varphi + \varphi_{f2} \text{ avec } \varphi_{f2} = -N_2 i_2 \quad (36)$$

ou

$$\varphi_1 = n_1 \varphi + \varphi_{f1}, \quad \varphi_2 = n_2 \varphi \text{ avec } \varphi_{f1} = N_1 i_1 \quad (37)$$

La correspondance avec le modèle linéaire sans pertes devient évidente et les relations d'identification sont établies :

a) Cas des fuites totalisées au secondaire

$$m_1 = \frac{M}{L_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad M = \sqrt{L_1(L_2 - N_2)} \quad (38)$$

La description du circuit magnétique (loi d'Hopkinson) à l'aide d'un **modèle à réluctances** : R réluctance principale pour la partie ferromagnétique soumise au flux φ et R_{f2} réluctance de fuite parcourue par le flux φ_{f2} / n_2 débouche sur la représentation de la figure 10a et les expressions des inductances :

$$L_1 = n_1^2 / R, \quad M = n_1 n_2 / R, \quad L_2 - N_2 = n_2^2 / R, \quad N_2 = n_2^2 / R_{f2} \quad (39)$$

b) Cas des fuites totalisées au primaire (voir fig. 10b)

$$m_2 = \frac{M}{L_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad M = \sqrt{(L_1 - N_1)L_2} \quad (40)$$

$$L_2 = n_2^2 / R, \quad M = n_1 n_2 / R, \quad L_1 - N_1 = n_1^2 / R, \quad N_1 = n_1^2 / R_{f1} \quad (41)$$

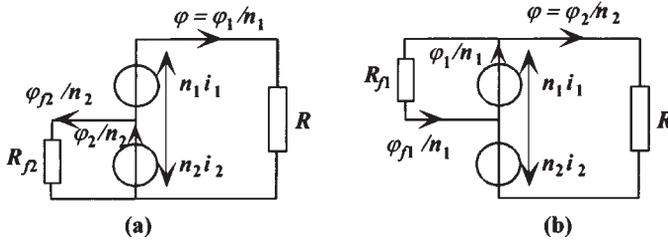


Figure 10 Modélisation magnétoélectrique.

Nous rappelons cependant que l'évaluation de la réductance d'un tronçon de circuit magnétique homogène requiert obligatoirement la linéarité entre B et H , en d'autres termes cela suppose la perméabilité magnétique constante.

L'usage de la modélisation par analogie magnétoélectrique est donc abandonnée dans la suite du développement de ce paragraphe.

3.2 Relation entre le courant magnétisant et le flux commun

Dans l'hypothèse non linéaire, le courant magnétisant est redéfini grâce au théorème d'Ampère qui établit la relation entre les courants i_1 , i_2 et l'intégrale de circulation de l'excitation magnétique H le long d'une ligne de champ Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = n_1 i_1 - n_2 i_2 \quad (42)$$

La différence des Ampère-tours, encore désignée force magnétomotrice (f.m.m.), peut être aussi bien obtenue par un courant unique, qu'il soit primaire ($i_{1\mu}$) ou secondaire ($i_{2\mu}$). Ces courants magnétisants, précédemment introduits par les relations (11) et (20) dans l'hypothèse linéaire, sont liés aux courants réels par l'égalité des f.m.m. :

$$i_{1\mu} = i_1 - \frac{n_2}{n_1} i_2, \quad i_{2\mu} = i_2 - \frac{n_1}{n_2} i_1 \Rightarrow i_{2\mu} = -\frac{n_2}{n_1} i_{1\mu} \quad (43)$$

En fait l'état magnétique est incomplètement défini puisqu'à une valeur de l'excitation H correspond une infinité de valeurs de l'induction B , elles-mêmes dépendant de l'état initial (mémoire) et de la valeur $d\varphi/dt$ imposée par la tension d'alimentation.

Alors se pose la question fondamentale à laquelle nous sommes contraints d'apporter une réponse, voire même approchée :

« Comment effectuer le passage du flux commun (ou plutôt de sa dérivée temporelle) à l'un des deux courants magnétisants ? »

C'est un problème hautement complexe et la littérature scientifique, diverse sur le sujet, montre l'extrême difficulté à prendre en considération, dans les modélisations, les phénomènes observés et physiquement justifiés de saturation, de mémorisation, d'hystérésis et d'induction de courants variables dans les circuits magnétiques. Toutes ces propriétés caractéristiques sont évidemment présentes dans la relation recherchée puisque le flux commun et le(s) courant(s) magnétisant(s) sont les images respectives de l'induction B et de l'excitation H .

Sans toutefois avoir recours à des moyens puissants de calcul des champs magnétiques et à des modèles macroscopiques de la matière aimantée (Jiles, Atherton, 86), (Tuinenga, 94), on peut raisonnablement proposer une approche pragmatique d'élaboration d'un modèle analytique construit à partir d'un relevé expérimental en régime permanent sinusoïdal de tension (Leplus, 89), (Degobert, 91). Cette démarche évite d'entrer dans les aspects dimensionnels particuliers au circuit magnétique puisque le matériau conditionné est placé en situation dans un environnement bien précis.

On considère en premier lieu le plus grand cycle dans le plan (i_μ, φ) , celui qui est décrit, à fréquence et température constantes, pour une alimentation en tension sinusoïdale d'amplitude suffisante pour observer la saturation. Cette dernière est atteinte lorsque les caractéristiques montante et descendante sont confondues, c'est-à-dire au delà des points de coordonnées $(i_{\mu sat}, \varphi_{sat})$ et $(-i_{\mu sat}, -\varphi_{sat})$.

Le graphe peut être scindé en quatre parties, notées de 1 à 4 sur la figure 11 et définies par des équations polynomiales.

Dans le domaine de saturation, la polarisation magnétique est maximale, alors $\Delta B / \Delta H = \text{cste} = \mu_0$ et on peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \text{Partie 3} &\rightarrow (\varphi - \varphi_{sat}) = K(i_\mu - i_{\mu sat}) \\ \text{Partie 4} &\rightarrow (\varphi + \varphi_{sat}) = K(i_\mu + i_{\mu sat}) \end{aligned} \quad (44)$$

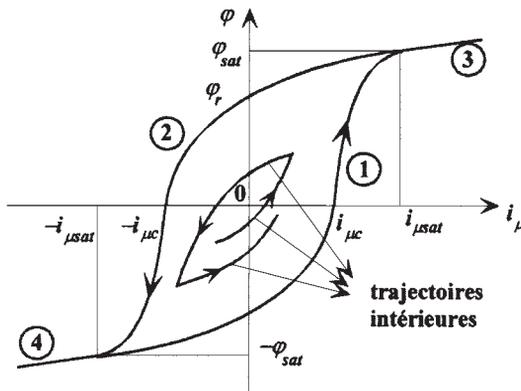


Figure 11 Caractéristiques magnétiques.

Les courbes (1) et (2) sont symétriques par rapport à l'origine et une équation donnant des résultats satisfaisants pour les associations transformateur-convertisseur statique électronique présente la forme suivante :

$$i_{\mu} = k_a \cdot \text{SGN}(d\varphi / dt) + k_c \cdot \varphi + k_d \varphi^3 + k_e (\varphi - k_b \cdot \text{SGN}(d\varphi / dt))^7 \quad (45)$$

Les coefficients k_a , k_b , k_c , k_d , k_e sont calculés par la résolution d'un système de cinq équations déduites de l'écriture de (45) en cinq points particulièrement caractéristiques du graphe.

- A $\varphi = 0$, le courant coercitif $i_{\mu c}$ est égal à $k_a - k_e k_b^7$; on vérifie habituellement que $k_e k_b^7 \ll k_a$ de sorte que k_a s'identifie à $i_{\mu c}$.
- La pente initiale $di_{\mu} / d\varphi$ au point coercitif ($i_{\mu} = i_{\mu c}$, $\varphi = 0$) est mesurée sur la courbe (1), son expression $k_c + 7k_e k_b^6$ fournit k_c car le deuxième terme lui est bien inférieur.
- Les points symétriques de saturation nous donnent :

$$\begin{aligned} i_{\mu sat} &= k_a + k_c \varphi_{sat} + k_d \varphi_{sat}^3 + k_e (\varphi_{sat} - k_b)^7 \\ -i_{\mu sat} &= k_a - k_c \varphi_{sat} - k_d \varphi_{sat}^3 - k_e (\varphi_{sat} + k_b)^7 \end{aligned} \quad (46)$$

- Le point d'induction rémanente ($i_{\mu} = 0$, $\varphi = \varphi_r$) vérifie la relation :

$$0 = -k_a + k_c \varphi_r + k_d \varphi_r^3 + k_e (\varphi_r + k_b)^7 \quad (47)$$

Les trajectoires intérieures sont déduites de l'équation (45), une méthode basique consiste à transformer par affinité d'axe φ d'une part la caractéristique (1) à φ croissant et, d'autre part, la caractéristique (2) à φ décroissant ; les références de définition du rapport d'affinité étant respectivement φ_{sat} et $-\varphi_{sat}$. Les changements de trajectoire se produisent à l'inversion du signe de $d\varphi/dt$ et il est parfois nécessaire d'adapter le rapport d'affinité afin de maintenir la trajectoire à l'intérieur du grand cycle.

A partir d'un point initial (instant t_0) de coordonnées $i_{\mu}(t_0)$, $\varphi(t_0)$ et du signe de $d\varphi/dt$, on connaît la trajectoire probable $i_{\mu}(\varphi)$ et donc sa pente $di_{\mu} / d\varphi = f(\varphi)$. On peut donc désormais déduire di_{μ} / dt à partir de $d\varphi/dt$ puisque :

$$RNL \rightarrow \frac{di_{\mu}}{dt} = f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \quad (48)$$

et proposer la modification des graphes de causalité des figures 3 et 5 par l'introduction d'un processeur non linéaire (RNL) représenté à la figure 12 et complété par les conditions initiales.

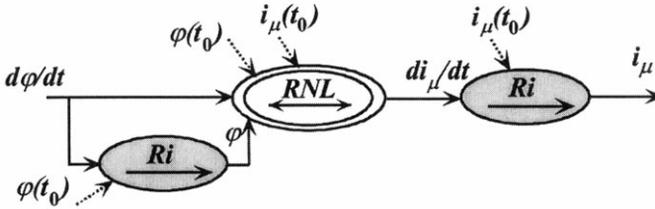


Figure 12 GIC sur les non linéarités magnétiques.

Conclusion

Dans la **modélisation dynamique** des circuits électriques à couplage magnétique, la **méthodologie causale** aboutit à une juste interprétation de l'élaboration des courants induits, liés rigidement aux flux d'induction, par l'**intégration** de tensions électriques. Elle montre également l'effet naturel de **réaction** propre à tous les systèmes physiques mettant en œuvre un **stockage énergétique** qu'il soit potentiel ou cinétique.

Bibliographie

Colonel Wm. T. McLyman (1988), *Transformer and Inductor Design Handbook*. Editions Marcel Dekker, New-York.

Degobert P. (1991), *Conception d'une alimentation à résonance pour servomoteur à courant continu*. Mémoire d'Ingénieur du Conservatoire National des Arts et Métiers, Centre régional de Lille.

Ferrieux J.-P., Forest F. (1994), *Alimentations à découpage, Convertisseurs à résonance*. Editions Masson, Paris.

Hautier J.-P., Caron J.-P. (1998), *Convertisseurs statiques : méthodologie causale de modélisation et de commande*. Editions Technip, Paris (à paraître, fin du 2ème semestre 98).

Hautier J.-P., Faucher J. (1996), *Le Graphe Informationnel Causal, outil de modélisation et de synthèse des commandes des processus électromécaniques*. Bulletin de l'Union des Physiciens n°785, Cahier Spécial de l'Enseignement Supérieur 1996, pp. 167-189.

Jiles D.C., D.L. Atherton (1986), *Theory of ferromagnetic hysteresis*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol. 61, n°48.

Leplus F. (1989), *Sur la modélisation numérique des transformateurs. Application aux montages redresseurs et gradateurs*. Thèse de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

Tuinenga P. W. (1994), *Spice - Guide pour l'analyse et la simulation de circuits avec PSpice*. Editions Masson Paris, Prentice Hall Londres.