

**EXPRESSION GENERALE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE EN FONCTION DE  
LA DISTRIBUTION DES CHARGES ET DES COURANTS**
**André BOUSSIE**

 Lycée Louis le Grand  
75005 - PARIS

**RÉSUMÉ**

*Contrairement à la méthode traditionnelle de l'électrodynamique qui consiste à calculer le potentiel pour en déduire le champ, le champ électromagnétique peut s'exprimer directement par des intégrales sur les distributions de charges et de courants. Après avoir établi ces expressions, nous les utilisons pour retrouver quelques champs particuliers bien connus. Cette méthode permet de s'affranchir des difficultés liées à la pluralité des potentiels et d'accéder à une définition électrodynamique des termes de Coulomb et de Neumann indépendante de toute jauge.*

**MÉTHODE TRADITIONNELLE DE CALCUL  
DU CHAMP ÉLECTRODYNAMIQUE À PARTIR DU POTENTIEL**

Les équations du potentiel électromagnétique  $\{V(M,t), \vec{A}(M,t)\}$ , sous la forme

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0, \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}, \quad (1)$$

sont valables avec une jauge de Lorentz. Elles admettent comme solution particulière fonction de la distribution des sources  $\{\rho(P,t), \vec{j}(P,t)\}$ , les potentiels retardés

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\text{espace})} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} \delta\tau, \quad \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\text{espace})} \frac{\vec{j}(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} \delta\tau \quad (2).$$

Une fois ces potentiels calculés, on en déduit le champ électromagnétique  $\{\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\}$

par 
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}. \quad (3)$$

## EXPRESSION DIRECTE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

L'élimination de  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  des équations de Maxwell conduit aux équations du second ordre des champs :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B} + \mu_0 \text{rot} \vec{J} = \vec{0}. \quad (4)$$

Ces dernières équations peuvent être également établies à partir de celles des potentiels (1) en leur appliquant les opérateurs  $\text{grad}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\text{rot}$  puis en les combinant conformément aux expressions (3).

Les équations (4), de même type que les équations (1), admettent des solutions particulières de même forme :

$$\vec{E}(M,t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\text{espace})} \frac{(\text{grad} \rho)_{(P,t')}}{PM} \delta\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\text{espace})} \frac{\left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right)_{(P,t')}}{PM} \delta\tau, \quad (5)$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\text{espace})} \frac{(\text{rot} \vec{J})_{(P,t')}}{PM} \delta\tau, \quad (6)$$

où  $t'$  est la fonction  $t'(t,P) = t - \frac{PM}{c}$  qui remplace  $t$  dans les expressions des sources en tenant compte du retard  $\frac{PM}{c} d\tau$  à la propagation.

L'obtention de ces expressions à partir des équations du second ordre fait surgir des problèmes mathématiques de même nature que ceux qui sont habituellement discutés lors de l'établissement des potentiels retardés (2) :

1. Pourquoi retient-on les solutions avec retard et non celles avec avance ? Pour des raisons de causalité.

2. Les expressions (5) et (6) vérifient-elles les équations de Maxwell ? Bien entendu. La preuve en est apportée plus loin par la relation entre les deux méthodes de calcul du champ.

## CAS DU CHAMP STATIQUE (INDÉPENDANT DU TEMPS)

Quand les sources  $\{\rho(P,t), \vec{J}(P,t)\}$  ne dépendent pas du temps, la fonction  $t'$  disparaît des expressions (5) et (6) et la dérivée  $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$  est nulle. Les fonctions à intégrer dans les deux intégrales restantes peuvent s'exprimer comme somme de deux termes :

$$\frac{1}{PM} \overrightarrow{\text{grad}} \rho(P) = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho(P)}{PM} - \rho(P) \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{PM} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho(P)}{PM} - \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (7)$$

$$\frac{1}{PM} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J}(P) = \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{J}(P)}{PM} - \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{PM} \wedge \vec{J}(P) = \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{J}(P)}{PM} + \vec{J}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (8)$$

Par application du théorème d'Ostrogradsky généralisé, les intégrales des premiers termes se mettent sous la forme d'intégrales de surface :

$$\int_{(\text{espace})} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho(P)}{PM} \delta\tau = \int_{(S^\infty)} \frac{\rho(P)}{PM} \delta\vec{S} = \vec{0}, \quad (9)$$

$$\int_{(\text{espace})} \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{J}(P)}{PM} \delta\tau = - \int_{(S^\infty)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} \wedge \delta\vec{S} = \vec{0}. \quad (10)$$

Ces intégrales sur une surface de Gauss tendant vers l'infini et englobant les sources, sont nulles puisque les sources sont elles-mêmes nulles sur cette surface.

Il reste finalement :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\text{espace})} \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \delta\tau, \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\text{espace})} \vec{J}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \delta\tau,$$

qui sont bien les expressions intégrales des champs électrostatiques et magnétostatiques.

## CAS DU CHAMP QUASISTATIQUE

Les variations des sources dans le temps sont dans ce cas suffisamment lentes et leur domaine d'action est suffisamment restreint pour que l'on puisse approximer, de façon classique, la fonction  $t'$  par  $t$ . Les intégrales calculées dans le cas statique restent valables sauf celle en  $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$  qui n'est plus

$$\text{nulle :} \quad \int_{(\text{espace})} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \frac{\delta\tau}{PM} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\text{espace})} \vec{J} \frac{\delta\tau}{PM}.$$

Le champ électromagnétique quasistatique s'exprime alors par :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\text{espace})} \rho(P,t) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \delta\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\text{espace})} \vec{J}(P,t) \frac{\delta\tau}{PM},$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\text{espace})} \vec{J}(P,t) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \delta\tau.$$

Le second terme du champ électrique est bien le champ de Neumann exprimé en fonction des courants. Habituellement on le donne sous la forme  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  qui présente l'inconvénient de dépendre de la jauge utilisée pour le potentiel. La jauge  $\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{(espace)}} \vec{j}(P,t) \frac{\delta\tau}{PM}$ , qui prolonge l'expression de la magnétostatique, permet de retrouver l'expression directe du champ quasistatique. C'est ce que j'appelle une jauge naturelle<sup>[1]</sup>.

## CAS DU CHAMP DE RAYONNEMENT DIPOLAIRE

Le dipôle émetteur  $\vec{p}(t)$  est localisé dans un petit volume dont les points P restent très proches d'un point O. Dans les expressions (5) et (6) on peut remplacer les dénominateurs PM par OM = r. En ce qui concerne  $t' = t - \frac{PM}{c}$ , on peut le considérer comme très voisin de  $t - \frac{OM}{c}$  et utiliser des développements limités en fonction de  $\vec{OP}$  jusqu'au premier ordre non nul :

$$PM = r - \frac{\vec{OM}}{OM} \cdot \vec{OP} = r - \vec{u}_r \cdot \vec{OP}.$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{j})_{(P,t')} = (\vec{\text{rot}} \vec{j})_{(P,t - \frac{r}{c})} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{j})_{(P,t - \frac{r}{c})} \frac{1}{c} \vec{u}_r \cdot \vec{OP}.$$

Le premier terme conduit au champ magnétique quasistatique établi ci-dessus, négligeable à grande distance du dipôle. Dans le champ magnétique lointain il ne subsiste que l'intégrale du deuxième terme

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \int_{\text{(espace)}} \left( \vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right)_{(P,t - \frac{r}{c})} \vec{u}_r \cdot \vec{OP} \delta\tau.$$

Le calcul est mené selon la méthode utilisée dans les équations (8) et (10) :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \int_{\text{(espace)}} - \vec{\text{grad}}(\vec{u}_r \cdot \vec{OP}) \wedge \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \delta\tau.$$

Comme  $\vec{\text{grad}}(\vec{u}_r \cdot \vec{OP}) = \vec{u}_r$  et  $\int \vec{j} \delta\tau = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , on obtient pour le champ magnétique rayonné :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \wedge \vec{u}_r,$$

qui est bien l'expression recherchée.

Le calcul du champ électrique peut se conduire de la même façon. Il se complique de la nécessité de pousser le développement limité jusqu'au second ordre pour obtenir le champ lointain. Dans ces

conditions il est plus judicieux de le calculer par la méthode classique, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère.

## RELATION ENTRE LES DEUX MÉTHODES

Les expressions directes (5) et (6) du champ peuvent être établies à partir des expressions classiques (2) et (3). La démonstration nécessite quelques techniques calculatoires dont voici les grandes étapes dans le cas du champ magnétique.

Il s'agit d'appliquer le rotationnel (par rapport à M) à l'expression intégrale (2) de  $\vec{A}$  (par rapport à P). On fait rentrer  $\vec{\text{rot}}_M$  dans l'intégrale puis on remarque que les dérivations en M qui en résultent sur les deux termes en PM donnent l'opposé des mêmes dérivations en P, ce qui permet de remplacer  $\vec{\text{rot}}_M$  par  $-\vec{\text{rot}}_P$  et conduit à une intégrale nulle par la même méthode qu'en (10). On a introduit cependant une dérivation supplémentaire par rapport à la variable P non liée à PM, dérivation que l'on annule en rajoutant le terme opposé  $\frac{1}{PM} \vec{\text{rot}} \vec{J}$ , ce qui conduit à l'expression directe (6) du champ magnétique.

On démontre de même que chacun des deux termes de l'expression directe (5) du champ électrique se déduit respectivement des deux termes de l'expression (3) appliquée aux potentiels retardés (2).

## DÉFINITION ÉLECTRODYNAMIQUE DES TERMES DE COULOMB ET DE NEUMANN : JAUGE NATURELLE

L'expression générale (5) du champ électrique comporte deux termes, l'un fonction de la distribution des charges  $\rho(P,t)$ , l'autre de la distribution des courants  $\vec{J}(P,t)$ . Dans les cas statiques et quasistatiques, ces termes conduisent respectivement au champ de Coulomb et au champ de Neumann. L'expression (5) permet leur généralisation au cas d'un champ électrodynamique créé par des charges et des courants connus :

$$\text{terme de Coulomb} \quad \vec{E}_C(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\text{espace})} \frac{-(\vec{\text{grad}} \rho)(P,t')}{PM} \delta\tau,$$

$$\text{terme de Neumann} \quad \vec{E}_N(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\text{espace})} \frac{-\left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{J}\right)(P,t')}{PM} \delta\tau.$$

Ces termes, étant définis indépendamment du potentiel électromagnétique, ne sont pas tributaires de la jauge utilisée pour celui-ci. On a vu cependant dans le paragraphe précédent qu'il est

Vol 92 - Juin 1998

Expression générale du champ électromagnétique ...

possible de les obtenir à partir du potentiel, à condition d'utiliser les expressions des potentiels retardés (2). La jauge correspondant à ces expressions peut alors être considérée comme une jauge naturelle qui permet de retrouver les deux termes de Coulomb et de Neumann par les méthodes classiques. En désignant par  $\{V_n(M,t), \vec{A}_n(M,t)\}$  ce potentiel naturel, les deux termes s'expriment en électrodynamique comme dans le cas quasistatique :

$$\vec{E}_C = - \text{grad } V_n, \quad \vec{E}_N = - \frac{\partial \vec{A}_n}{\partial t}.$$

## SIGNIFICATION PHYSIQUE DES DEUX TERMES

Dans les cas statiques et quasistatiques les deux termes peuvent être considérés comme des champs : le champ électrique dû aux charges et celui dû aux courants variables. Ces deux types de sources sont indépendantes, puisque les courants sont conservatifs ou quasi-conservatifs ; les deux champs électriques le sont donc aussi, ce qui leur confère une signification physique. Il est alors tout à fait licite de les considérer séparément, par exemple dans l'utilisation de la circulation.

Dans le cas électrodynamique les sources sont couplées par l'équation de conservation de la charge  $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div } \vec{j} = 0$ .

Les deux termes ne sont donc pas indépendants et l'on ne peut pas les considérer comme deux champs physiquement distincts. Expérimentalement on ne peut pas séparer les deux termes : le champ électrodynamique est indivisible. Leur utilisation dans ce cas ne peut présenter qu'un intérêt calculatoire.

Enfin il ne faut pas oublier que dans certaines situations, en présence de conducteurs notamment, les charges et les courants sont eux-mêmes liés au champ. Dans ce cas la notion simple de source perd elle-même son sens physique lié à la causalité.

---

<sup>(1)</sup> A. BOUSSIE, Quelle tension mesure un voltmètre en régime quasistatique ? BUP 744, mai 1992, p. 760.